

偏微分方程

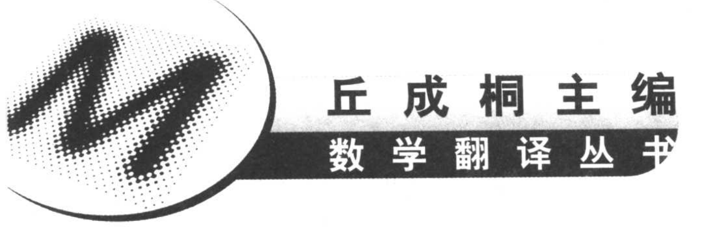
Partial Differential Equations

■ Harold Levine 著

■ 葛显良 译

■ 叶其孝 校

高等教育出版社
Higher Education Press



偏微分方程

Partial Differential Equations

■ **Harold Levine** 著

■ 葛显良 译

■ 叶其孝 校

高等教育出版社
Higher Education Press

International Press

图字: 01–2007–3410 号

图书在版编目 (CIP) 数据

偏微分方程/ (美) 莱文 (Levine, H.);
葛显良译, 叶其孝校. —北京:
高等教育出版社, 2007.8
(数学翻译丛书/ 丘成桐主编)
书名原文: Partial Differential Equations
ISBN 978–7–04–017359–8

I. 偏··· II.①莱···②葛···③叶··· III.偏微分方程 - 高等学校 - 教学参考资料 IV.O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 号

策划编辑 郑轩辕 **责任编辑** 郑轩辕 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 黄建英
版式设计 马静如 **责任校对** 杨凤玲 **责任印制** 宋克学

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010 – 58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800 – 810 – 0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010 – 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2007 年 8 月第 1 版
印　　张	39.5	**印　　次**	2007 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	740 000	**定　　价**	61.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　17359 – 00

《数学翻译丛书》序

改革开放以后, 国内大学逐渐与国外的大学增加交流, 无论到国外留学或邀请外地到中国访问的学者每年都有增长, 对中国的科学现代化都大有帮助. 但是在翻译外国文献方面的工作尚不能算多. 基本上所有中国的教科书都还是由本国教授撰写, 有些已经比较陈旧, 追不上时代了. 很多国家, 例如俄罗斯、日本等, 都大量翻译外文书本来增长本国国民的阅读内容, 对数学的研究都大有裨益. 高等教育出版社和海外的国际出版社有鉴及此, 开始计划做有系统的翻译, 由王元院士领导, 北京的晨兴数学中心和杭州的浙江大学数学科学研究中心共同组织数学教授进行这个工作, 参与的教授很多, 有杨乐院士, 刘克峰教授等. 我们希望这套翻译书能够使我们的大学生有更多的角度来看数学, 丰富他们的知识. 海外的出版公司如美国数学学会等多有帮助, 我们谨此鸣谢.

丘成桐 (Shing-Tung Yau)

2005 年 1 月

感谢美国数学会为加强国际数学交流和促进数学发展贡献本书的中文版权。

Thanks for contributing the translation rights for the Chinese edition of this book by AMS to strengthen international exchange and promote the further development of Mathematics.

序

微分方程不仅在纯粹数学而且在应用数学中都起到了中心的作用, 对它的研究已经提供了具有重大理论和实践价值的结果. 这些方程, 例如以直接的方式表示了 Newton (牛顿) 的动力学运动基本定律 (17 世纪!), 并且使得对行星运动的第一次定量描述成为可能. 随后, 陈述有关流体和带电粒子的运动、热和质量的传递、地震和大气的运动以及无数物理、化学、工程现象的基本定律的微分方程的建立和得到认同显示了微分方程的崇高地位. 科学各领域的研究的开创阶段往往是比较短的, 把所考虑问题的描述性变量联系起来用一个或者多个微分方程的详细阐述是这个阶段的特色; 而在随后时间要更长一点的发展阶段, 中心问题是对上述方程求解 (解析或数值的). 为了从原来的微分方程已有的无穷多个解当中挑选出一个特定的解, 就需要补充的方程或条件; 为确保整个方程组 (它们中的每个方程都可以包含导数) 有唯一解, 充分考虑这些条件就成为必要的了.

通过引进新的概念 (在那个时代!), 以适定问题为特征的求解方程组的巨大进步来临了, 从此这个新概念被认为是数学推理发展中的一个里程碑. 值得注意的是两位新道路的开拓者, Fourier (傅里叶, 1768 — 1830) 和 Heaviside (赫维赛德, 1850 — 1925) 所依靠的是猜测性推理, 他们把为他们的建议提供坚实数学基础的必要工作留给了其他人去做. 借助于微分方程的公式化表述而得到满意解决的方程的数量以及大量可以应用的理论都在稳定地增长; 近年来人们亲眼目睹了迄今还是难以完全解决的微分方程, 即非线性微分方程研究中取得的惊人的进步, 这反映了对理论分析和数值分析两者的精巧的应用.

本书主题主要涉及比较简单的线性方程, 同时伴有由于通常需要求得满足事先规定的条件的解而引起的复杂性; 本书旨在给读者一个在经典框架内的直

接方法以及相关理论的广泛的概述. 为此, 本书讨论了大量的例子而且在每章末提出了更多的例子让读者去求解. 作者相信数值方法毫无疑问具有重大价值, 不过可以在熟悉了微分方程问题的公式化表述、总的概貌以及精妙之处之后再去学习. 我受惠于无数的图书和论文是显然的, 或许我为寻求能够传递公式化表述的精美和强健的各种例子的努力也是清清楚楚的.

我要感谢 Isolde Field 和 Vladimir Frenkel 为加工处理打印好的文本所给予的帮助.

Harold Levine

目　　录

① 实际上就是我们通常用的术语 “初边值问题”, 不过本书作者喜欢用 system 一词, 中译本把它译为方程组或组. —— 校注

两端点固定的弦在关于时间是周期的在弦上任一点处可以任意变化的外力的作用下产生的横振动的偏微分方程. 引进适当的 Green 函数用单个的积分方程来置换该运动方程. 带有许多辅助细节的求解这类积分方程的方法. 弦问题解的特点以及关于共振性态的评注. 带有关于时间周期变化的源的非齐次扩散偏微分方程; 重新表为积分方程, 无论源的频率怎样, 验证该问题的解是唯一的. 由一个非齐次常微分方程和一对齐次边界条件构成的问题的积分方程重新表示得到一般结论.

由无限区间和/或 (常微分方程最高阶导数的) 系数在一个端点为零所刻划的边值问题. 对照两个 (单变量) Green 函数的特点: 一个由常系数微分算子所定义, 它关于其参变量具有极点型的奇点, 另一个算子的最高阶 (二阶) 导数的系数在一个端点处为零, 它展示了相应的分枝/切割性质的奇点. 两个 Green 函数的组合用来表示另一个与偏微分方程及其替代表示式相联系的 Green 函数. 当原来的有限区间变成半无限区间时 Green 函数的极限性态, 相应的离散本征值谱由连续谱替代. 在无穷远处适当的边界条件. 量子力学中的线性振子; 一个例子揭示了, 尽管自变量的区间是无限的, 但是存在离散本征值谱.

基于在等距点处与三角多项式拟合的内插公式中系数的确定; 当多项式的次数变成无限而且已经指定三角级数的表示式时系数的极限形式. 函数的正交系和规范正交系. 用规范正交级数表示平方可积 (或 L_2) 函数. 平均收敛.L_2 函数的均方逼近.Bessel 不等式和 Parseval 等式. 完全规范正交集.

变量项级数[①]: 一致收敛性和相关的比较检验法. 三角 (或 Fourier) 级数的逐项积分和逐项微分. 非一致收敛性和 Gibbs (吉布斯) 现象. 扩散偏微分方程的初/边值问题, 验证所生成的级数解满足非齐次边界条件. Fourier 级数的部分和与收敛准则.

起源于分析学、几何学和技术建模中的 Fourier 级数的详细说明. 关于各种 Fourier 级数表示式的特点的评注.

① 即函数级数. —— 校注

引 言

偏微分方程 (PDE) 学科 (从 18 世纪算起) 有很长历史而且有一个活跃的当代发展阶段; 早期阶段 (分别集中注意于拉紧弦的振动和通过固体的热流) 促进了数学分析的具有重大意义的发展 (如函数和积分更广的概念, 三角级数或 Fourier 级数表示式的存在性), 同时偏微分方程与各式各样的数学、物理和技术问题的直接相关性在继续发展. 本书的目的是呈现本学科的适当广的引导性陈述, 同时充分关注分析细节、应用和历史渊源.

正如偏微分方程这个名称所蕴涵的含义, 它包含且确定多于一个自变量的函数, 而包含一个自变量函数的微分方程称为常微分方程 (ODE). 这样, 设 x, y 表示一对自变量而 $w(x, y)$ 是依赖于 x, y 的函数, 那么采用记号

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w_y = \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$w_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ w_{yy} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \ w_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\cdots$$

后, 具有形为

$$F(x, y, w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{yy}, w_{xy}, \cdots) = 0$$

的关系式就称它为对函数 $w(x, y)$ 的偏微分方程. 偏微分方程的阶是指该方程中出现的最高阶导数的阶. 线性偏微分方程是其生成函数 F 线性地依赖于除 x, y 以外的它的所有自变量; 因此, 两个自变量 x, y 的一阶和二阶线性偏微分方程的一般形式分别是

$$L_1[w] = a(x, y)w_x + b(x, y)w_y + c(x, y)w = g(x, y)$$

和

$$L_2[w] = a(x,y)w_{xx} + 2b(x,y)w_{xy} + c(x,y)w_{yy}$$
$$+d(x,y)w_x + e(x,y)w_y + f(x,y)w = g(x,y),$$

分别带有不同的系数函数 $a(x,y), \cdots, f(x,y)$ 和另一个不包含 w 的项 $g(x,y)$. 称 $g(x,y)=0$ 的线性方程

$$L[w] = 0$$

为*齐次线性方程*; 且非齐次线性方程 $L[w]=g(x,y)$ 的任何两个不同解的差也是 $L[w]=0$ 的一个解.

*拟线性*偏微分方程是其中最高阶导数线性地出现的方程, 可用以下特殊方程作例子

$$(1+w^2)w_x + w_y = x^2.$$

如果一个拟线性偏微分方程中最高阶导数的系数只是自变量的函数, 该方程称为*几乎线性的*或半线性的, 例如

$$x^2 w_{xx} + 4xy w_{yy} + w w_x + w^2 = 0.$$

对多于两个自变量的偏微分方程, 可用类似的定义和特性描述.

其解决依赖于求解偏微分方程有实际和理论意义的问题不胜枚举; 所以只需提到在一般情形下偏微分方程的中心作用就足够了, 如扩散和波现象的具体分析、连同声暴的特殊分析、非正则粒子 (或布朗 (Brown)) 运动、过给定曲线的极小面积曲面、电话交换机上的呼叫 $\cdots\cdots$. 线性偏微分方程的相对简单性, 就像线性常微分方程那样, 在理论和应用两方面都有大量文献. 某些流体表面上*孤立波*模型的典型非线性偏微分方程和其他有物理意义的方程组在最近几十年激起了令人鼓舞的值得注意的发展, 而且没有任何发展减慢的迹象; 因此偏微分方程一直是一个重要而且活跃的学科.

第一章

偏微分法

在直接讨论偏微分方程之前自然先对偏微分法作简单的复习. 当依赖于两个自变量 x 和 y 的函数 $w(x,y)$ 时, 可以考虑将 y 作为常数求 w 对 x 的导数, 或者将 x 作为常数而求 w 对 y 的导数; 它们分别有习惯上常用的记号 $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial w}{\partial y}$, 其中用符号 ∂ 而不用 d 表明所涉及的是偏导数. 例如, 设

$$w = x^2 + 2y^2 + xy,$$

则

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + y, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 4y + x.$$

类似的记号可用于二阶导数: $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ 对 x 的导数表为 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ 对 y 的导数表为 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$, 如此等等. 从上面的例子中得出

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 4,$$

且

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 1,$$

这里后面的关系式表明, 当这两个偏导数连续时, 可以交换求偏导数次序有可能普遍成立.

在一元情形, 即当 $w = w(x)$, 有两个不同的量 (见图 1)

$$\Delta w = w(x_0 + h) - w(x_0)$$

和

$$dw = \left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=x_0} \cdot h;$$

令 $h = dx$ (由 $w = x$ 时得出), 上面第二式写成

$$dw = \left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=x_0} dx$$

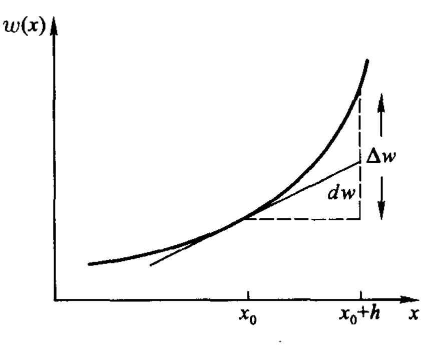


图 1

的形式, 称为 w 在 x_0 处的**微分**. 显然, 最后的式子提供了与 x 的小改变量相关联的 w 的改变量的一个近似值, 而且是基于将曲线 $w = w(x)$ 用其在 $x = x_0$ 处的切线来代替.

如果自变量 x 的改变量为无穷小的量 dx, 而 y 保持不变, 那么 w 的成比例的改变量 dw 表成

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx,$$

类似地, x 保持不变时, 由自变量 y 的无穷小改变量 dy 产生的 w 的改变量表为

$$dw = \frac{\partial w}{\partial y} dy.$$

如果再假设 x 和 y 两者同时且独立地改变 dx 和 dy, 则

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy \tag{1.1}$$

称为**全微分**; 这代表由无穷小改变量 dx 和 dy 引起而其平方项和积忽略不计时的 w 的纯改变量. 如果 w 具有早先给出的明显的多项式形式, 容易验证 (1.1) 式; 一般形式的严格证明不必在此详述.

一个重要的技巧是自变量的任意代换或变换所引起的函数的偏导数的变化结果. 设原来的自变量 x, y 代换成新的一对 u, v, 从而函数 $w(x, y)$ 变成 (一般地) 另一个变换变量后的函数 $w(u, v)$; 如何得到 w 关于新自变量的偏导数? 为简单起见, 从变量的线性变换

$$x = u + v, \quad y = u - v$$

以及相关的表示式

$$dx = du + dv, \quad dy = du - dv$$

开始, 则 (1.1) 变成

$$\begin{aligned} dw &= \frac{\partial w}{\partial x}(du + dv) + \frac{\partial w}{\partial y}(du - dv) \\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) du + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) dv. \end{aligned} \tag{1.2}$$

一开始考虑 w 作为变量 u, v 的函数的话, 得出

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv, \tag{1.3}$$

由此比较 (1.2),(1.3) 得出

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{1.4}$$

这些方程可用以由 w 对原变量 x, y 的一阶偏导数确定 w 对新变量 u, v 的一阶偏导数. 对 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial w}{\partial y}$ 解 (1.4) 得到逆关系式

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}\right). \tag{1.5}$$

以下假设变量 x, y 和 u, v 之间的关系是一般情形, 即

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \tag{1.6}$$

φ, ψ 是两个非线性且可微的函数. 这两个方程定义一个正常的变量替换, 如果它们也可由 x, y 唯一确定 u, v; 而且一一对应的适当条件是要求变换的雅可比 (Jacobi) 行列式不为零, 即

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} \neq 0. \tag{1.7}$$

由于

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv, \quad dy = \frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv,$$

因而

$$\begin{aligned} dw &= \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy \\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) dv \\ &= \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv, \end{aligned}$$

(1.4) 式的推广是

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial u},\quad \frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial v}. \tag{1.8}$$

举一个例子, 考虑变换

$$x=\frac{1}{2}(u^2-v^2),\quad y=uv, \tag{1.9}$$

对此, $J=\begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix}=u^2+v^2\neq 0$, 只要 u,v 两者不同时等于零. 关系式 (1.9) 可逆, 得到

$$u=\pm\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x},\quad v=\pm\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}, \tag{1.10}$$

且对 u,v 平面上不含原点的任何区域, (x,y) 与 (u,v) 之间一一对应.

用 (1.8) 导出

$$\frac{\partial w}{\partial u}=u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial v}=-v\frac{\partial w}{\partial x}+u\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{1.11}$$

且对 $\dfrac{\partial w}{\partial x},\dfrac{\partial w}{\partial y}$ 求解, 得出

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{u^2+v^2}\left(u\frac{\partial w}{\partial u}-v\frac{\partial w}{\partial v}\right),\quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{1}{u^2+v^2}\left(v\frac{\partial w}{\partial u}+u\frac{\partial w}{\partial v}\right). \tag{1.12}$$

关系式 (1.12) 的算子形式由略去任意函数的明显标记得到, 即

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{u^2+v^2}\left(u\frac{\partial}{\partial u}-v\frac{\partial}{\partial v}\right),\quad \frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{u^2+v^2}\left(v\frac{\partial}{\partial u}+u\frac{\partial}{\partial v}\right), \tag{1.13}$$

在马上就会详细讲述的高阶导数的计算中, 将证明这种算子表示是有用的.

当涉及二阶或更高阶偏导数时, 与一阶偏导数的表示式 (1.8) 比较, 有复杂得多的形式; 因此我们仅在两个自变量和二阶导数情况下建立几个表示式作为代表. 首先, 考虑 (1.8) 式对 u 微分, 事先要指出, 右边两项中每一项是乘积形式, 其中每项中的一个因子 (例如 $\dfrac{\partial w}{\partial x}$) 表示为 x,y 的函数, 而另一因子 (例如 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}$) 表示为 u,v 的函数. 第一因子对 u 的导数是经过交换微分次序和应用 (1.8) 后得出的; 这样

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)\\&=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial u}.\end{aligned}$$

(1.8) 式左边微分直接得出结果 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}$, 而从右边不难确定组成 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}$ 的所有项, 得出

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 \\ &\quad + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

在上式中将 u 代换成 v, 得出对 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}$ 的类似表示式, 且用类似方法得到以下结果

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial u\partial v}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

与 (1.11) 比较, (1.14),(1.15) 的相对复杂性显而易见.

相继应用 (1.13) 中出现的一阶微分算子, 得到对 x, y 和 u, v 的二阶偏导数之间的联系, 即

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{u^2+v^2}\left(u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}\right)\frac{1}{u^2+v^2}\left(u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}\right) \\ &= \frac{1}{(u^2+v^2)^2}\left(u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}\right) \\ &\quad + \frac{1}{u^2+v^2}\left[\left(u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}\right)\frac{1}{u^2+v^2}\right]\left(u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}\right) \\ &= \frac{1}{(u^2+v^2)^2}\left[u\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial}{\partial u}\right) - 2uv\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} + v\frac{\partial}{\partial v}\left(v\frac{\partial}{\partial v}\right)\right] \\ &\quad - \frac{2(u^2-v^2)}{(u^2+v^2)^3}\left(u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}\right) \\ &= \frac{1}{(u^2+v^2)^2}\left[u^2\frac{\partial^2}{\partial u^2} + u\frac{\partial}{\partial u} - 2uv\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} + v^2\frac{\partial^2}{\partial v^2} + v\frac{\partial}{\partial v}\right] \\ &\quad - \frac{2(u^2-v^2)}{(u^2+v^2)^3}\left(u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}\right), \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{1}{(u^2+v^2)^2}\left[v^2\frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2uv\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} + v\frac{\partial}{\partial v} + u^2\frac{\partial^2}{\partial v^2} + u\frac{\partial}{\partial u}\right] \\ &\quad - \frac{4uv}{(u^2+v^2)^3}\left(v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}\right). \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=&\frac{1}{u^2+v^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\\&+\left[\frac{2u}{(u^2+v^2)^2}-\frac{2u(u^2-v^2)}{(u^2+v^2)^3}-\frac{4uv^2}{(u^2+v^2)^3}\right]\frac{\partial}{\partial u}\\&+\left[\frac{2v}{(u^2+v^2)^2}+\frac{2v(u^2-v^2)}{(u^2+v^2)^3}-\frac{4u^2v}{(u^2+v^2)^3}\right]\frac{\partial}{\partial v}\\=&\frac{1}{u^2+v^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right),\end{aligned}$$

由此得出, 如果 $w(x,y)$ 满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0,$$

则由 (1.9),(1.10) 表示的自变量 $x,y\to u,v$ 之间的变换不改变 w 满足的微分方程的形式, 即

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0,\quad u^2+v^2\neq 0.$$

根据复变函数理论可以预料到这个结果, 因为有关的变换联系着复变量 $z=x+iy$ 和 $w=u+iv$, 即 $z=w^2/2$, 且一般地

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\left|\frac{dw}{dz}\right|^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right),$$

这里

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2.$$

研究偏微分方程常常需要复合微分法, 而有些相关细节值得注意. 先考虑一元函数 $f(\xi)$, 其性质由一平面曲线 (见图 2 a) 所揭示; 再假设

$$\xi=\varphi(x,y)$$

定义一个两个自变量的函数. 则表达式

$$w(x,y)=f(\varphi(x,y))=F(x,y)$$

在 x,y,w 三维空间中表示一个开或闭曲面 (见图 2 b), 依赖于 x,y 的范围和函数 φ,f 的特殊形式.

借助于两函数 f 和 φ, w 的微分规则包括

$$\begin{aligned}&\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{df}{d\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{d^2 f}{d\xi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\frac{df}{d\xi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\\&\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{df}{d\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\frac{d^2 f}{d\xi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{df}{d\xi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y},\cdots\end{aligned}$$

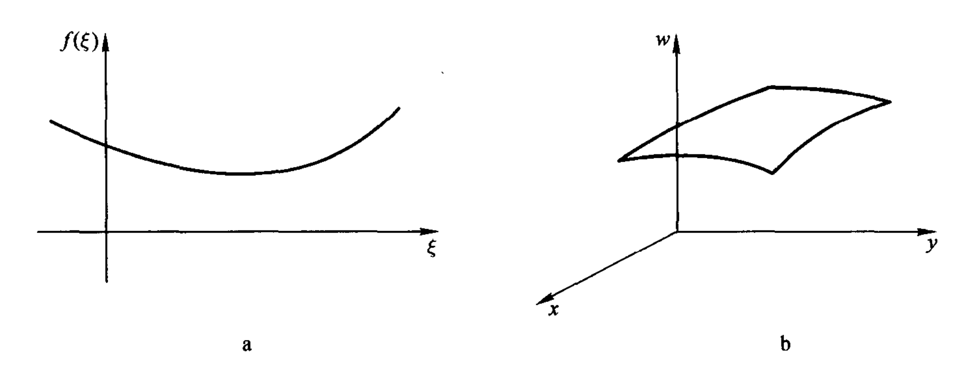


图 2

其中 $\dfrac{df}{d\xi}, \dfrac{d^2 f}{d\xi^2}, \cdots$ 表示 f 对其单自变量的常导数; 而且理解为这样微分后 ξ 换成 $\varphi(x, y)$.

例 1: 给定

$$w = e^{\xi},\ \xi = \frac{x}{y} \quad 或者 \quad w(x, y) = e^{x/y},$$

可得

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{y} e^{x/y}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} e^{x/y}$$

和

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2} e^{x/y} - \frac{x}{y^3} e^{x/y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}.$$

由此可知 w 满足一阶偏微分方程

$$x w_x + y w_y = 0$$

是显然的.

例 2: 给定 $w(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}} e^{-x^2/4y}, y > 0$, 则

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{x}{2y^{3/2}} e^{-x^2/4y}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{2y^{3/2}} e^{-x^2/4y} + \frac{x^2}{4y^{5/2}} e^{-x^2/4y},$$

且

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{1}{2y^{3/2}} e^{-x^2/4y} + \frac{x^2}{4y^{5/2}} e^{-x^2/4y}.$$

所以函数 w 满足二阶线性常系数偏微分方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

对任意固定的 y 值, w 的剖面作为 x 的函数, 如图 3 所示, 在 $x=0$ 处有极大值, 即 $w(0,y)=\dfrac{1}{\sqrt{y}}$, 当 $y\to 0$ 时此峰值无限上升, 其宽度在中点 $x=0$ 附近变狭, 与此相一致的事实是表示面积的积分

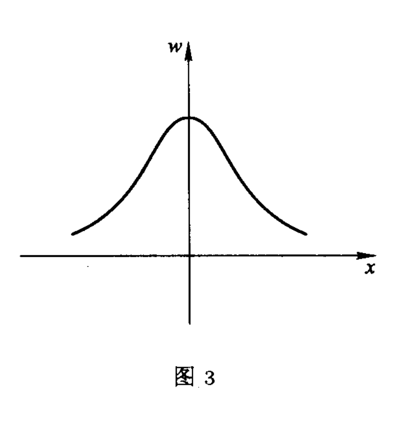


图 3

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x,y)dx = \frac{1}{\sqrt{y}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/4y}dx$$
$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2}d\sigma = 2\sqrt{\pi}$$

与 y 无关. 即在沿 x 轴放置的一无穷长细杆中的非定常扩散或热传导问题中, 给上述函数一种物理解释是可能的, y 作为时间变量, $w(x,y)$ 表示温度分布从一开始的局部形式 (在 $x=0$ 附近) 的演变 (在时刻 $y=0$ 后). 上面指出的 w 对 x 的积分值的不变性简单地表示呈现在该杆上的热的总量不随时间而改变, 扩散只是带来关于温度和热量的重新分布.

习　题　1

1. 方程 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 分别在整个区域 $-\infty<x,y<\infty, 0\leqslant r<\infty, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 中把平面上的 Descates (笛卡儿) 坐标和极坐标联系起来. 求一阶导数 $\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial}{\partial r},\dfrac{\partial}{\partial \theta}$ 之间的关系, 然后用此简化并求解一阶偏微分方程

$$xw_y - yw_x = 0.$$

求二阶偏导数之间的关系并由此变换命名的 Laplace (拉普拉斯) 方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0.$$

2. 设 $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}, v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ 确定了一组变量替换, 对函数 w 确定 $w_{xx}+w_{yy}$ 和 $w_{uu}+w_{vv}$ 之间的对应关系.

3. 验证经自变量变换

$$x=e^u\cos v,\quad y=e^u\sin v$$

或按复形式

$$z=x+iy=e^{u+iv}$$

变换, 关系式

$$(x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$

成立.

4. 考虑变量变换

$$x=\frac{1}{2}(u+v),\quad y=\sqrt{uv},\quad u\geqslant 0, v\geqslant 0,$$

它蕴涵 $x\geqslant y\geqslant 0$, 因此变换到 x,y 平面上第一象限中正 x 轴与分角线 $y=x$ 之间的部分. 这区域中的每一点对应于两对 u,v 的非负值, 它们可由二次方程

$$\lambda^2-2x\lambda+y^2=0$$

求得; 如果 $u\geqslant v$, 则得到 (x,y) 与 (u,v) 之间的一一对应, 因此 (u,v) 平面上的这个区域确切地镜面反射成 (x,y) 平面上区域; 其逆变换为

$$u=x+\sqrt{x^2-y^2},\quad v=x-\sqrt{x^2-y^2}.$$

验证关系式

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{2}{u-v}\left(u\frac{\partial w}{\partial u}-v\frac{\partial w}{\partial v}\right),\quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{2\sqrt{uv}}{u-v}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial w}{\partial u}\right)$$

和

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)w=&\frac{4u(u+v)}{(u-v)^2}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{4v(u+v)}{(u-v)^2}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}-\frac{16uv}{(u-v)^2}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\\&-2\frac{u^2+v^2+6uv}{(u-v)^3}\frac{\partial w}{\partial u}+2\frac{u^2+v^2+6uv}{(u-v)^2}\frac{\partial w}{\partial v}.\end{aligned}$$

5. 设 $x_0(s), y_0(s)$ 表示一光滑曲线上一任意点的坐标, 用其上某点作起始点的弧长 s 来表示; 则

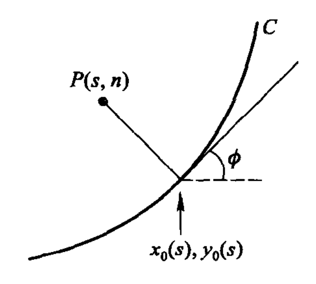
$$x=x_0(s)-n\sin\phi,\quad y=y_0(s)+n\cos\phi \tag{*}$$

确定了一个点 P 的位置, P 与曲线的法线距离为 n, 而该曲线的切线与 x 方向的夹角为 ϕ, 即

$$x_0'(s)=\cos\phi,\quad y_0'(s)=\sin\phi.$$

如果

$$\frac{d\phi}{ds}=\frac{1}{\tau(s)}$$



定义了 C 的局部曲率半径 $\tau(s)$, 由关系式 $(*)$ 得到

$$dx = \left(1 - \frac{n}{\tau}\right)\cos\phi ds - \sin\phi dn,$$
$$dy = \left(1 - \frac{n}{\tau}\right)\sin\phi ds + \cos\phi dn.$$

推导出关系式

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{1 - \dfrac{n}{\tau}}\cos\phi\frac{\partial}{\partial s} - \sin\phi\frac{\partial}{\partial n},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{1 - \dfrac{n}{\tau}}\sin\phi\frac{\partial}{\partial s} + \cos\phi\frac{\partial}{\partial n},$$

并证明

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = \left[\frac{1}{1 - \dfrac{n}{\tau(s)}}\frac{\partial}{\partial s}\right]^2 + \frac{\partial^2}{\partial n^2} - \frac{1}{\tau(s) - n}\frac{\partial}{\partial n},$$

这里微分算子的幂记号表示重复次数. Laplace 算子的上述形式在分析偏微分方程

$$(\nabla^2 - \alpha^2)\psi = 0$$

的解时是有用的, 其中 (正) 参数 $\alpha \gg \dfrac{1}{\tau}$ 且 ψ 是沿该曲线给定的.

6. 用显式微分法验证

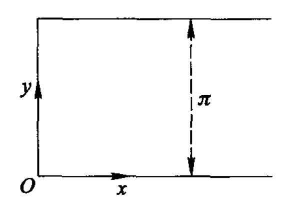
$$\phi(x, y) = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\sin y}{\sinh x}\right)$$

是 Laplace 方程

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$$

的一个解. 考虑半无限带形区域

$$0 \leqslant x < \infty, \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi,$$



$\phi(0,y), \phi(x,0), \phi(x,\pi), \phi(\infty,y)$ 的值分别是什么? 求原点附近 $(x \ll 1, y \ll 1)\phi(x,y)$ 的一个近似且证明它满足有关的边界条件. (回忆 $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}x = \dfrac{1}{1+x^2}, \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$)

7. 验证两个自变量 x, t 和一个参数 c 的函数

$$w(x,t;c) = \frac{1}{2}c\ \mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{c}(x-ct)\right)$$

满足非线性偏微分方程

$$\frac{\partial w}{\partial t} + 6w\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0.$$

这是著名的孤立 (且不变) 波形式, 它沿 x 方向以速度 c 随时间的推移而前进, 在 19 世纪确实被亲眼目睹到的一种扰动 (如在一运河中水的局部隆起), 在 19 世纪 60 年代其理论发现对非线性波现象的研究给予巨大推动.

8. 考虑非齐次非线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\alpha e^{-\beta\phi}, \quad \alpha > 0, \beta > 0 \tag{*}$$

和由

$$w = u + iv = f(z) = f(x+iy)$$

给出的自变量的变换. 引入函数

$$\begin{aligned}\psi &= \phi - \frac{2}{\beta}\ln\left|\frac{dz}{dw}\right| = \phi - \frac{1}{\beta}\ln\left|\frac{dz}{dw}\right|^2 \\ &= \phi - \frac{1}{\beta}\ln\frac{dz}{dw} - \frac{1}{\beta}\ln\frac{\overline{dz}}{dw} = \phi - F(u+iv) - F(u-iv),\end{aligned}$$

这里上划线表示复共轭 $(\overline{z} = x - iy, z\overline{z} = x^2 + y^2)$ 且注意关系式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)F(u \pm iv) = 0$$

导出另一个关系式, 即

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\left(2\ln\left|\frac{dz}{dw}\right|\right)=0.$$

证明 ψ 满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}=-\alpha e^{-\beta\psi},$$

且由此断定其解为

$$\psi=\frac{1}{\beta}\left\{\ln(\alpha\beta)-\ln\left(\frac{8}{(1-|w|^2)^2}\right)\right\}.$$

对应的 (*) 的解是什么?

9. 在非线性偏微分方程

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=2\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \tag{i}$$

中适当变换函数 ϕ 可得出它的解; 为此引入函数 $\psi(x,t)$, 其一阶偏导数表成

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\phi\psi, \tag{ii}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(\phi^2+\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\psi, \tag{iii}$$

从而断定要求两个混合二阶偏导数

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} \quad 和 \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial x}$$

相等是 (i) 的结果. 从关系式 (ii),(iii) 消去 ϕ 且求出 ψ 所满足的线性偏微分方程.

10. 假设流体中任一质点的位置坐标表示成形式

$$x=x(a,b,c,t),\ y=y(a,b,c,t),\ z=z(a,b,c,t) \tag{*}$$

这里 t 表示时间变量, 而 (a,b,c) 确定一参照点 (如在 $t=0$) 的位置; 用 x,y,z,t 表示 a,b,c 的互反关系式, 即

$$a=a(x,y,z,t),\ b=b(x,y,z,t),\ c=c(x,y,z,t).$$

函数 $F(x,y,z,t)$ 可表示温度或速度的 Descates 分量, 应用表示式 (*) 后, 变成一个 (不同的) 函数

$$\widetilde{F}(a,b,c,t)=F(x(a,b,c,t),y(a,b,c,t),z(a,b,c,t),t).$$

求关于时间的导数

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t}, \quad \frac{\partial F}{\partial t}$$

之间的关系, 这里自变量 (a,b,c) 在第一式中保持固定, 而 (x,y,z) 在第二式中固定; 前者给出与一个个别质点相联系的适当的变化, 而后者涉及流体中任一指定位置处质点的变化 (不关心该瞬时在该处的质点是否是变化前在该处的质点). 因为压力和外力 (如引力) 直接作用于诸质点上, 这是一开始就在动力学偏微分方程中固定点 (a,b,c) 处速度分量关于时间的导数, 该动力学方程和质量守恒以及热效应方程一起构成了支配一般流体运动规律的基本方程组.

第二章

偏微分方程的解及其具体确定

一个或多个*任意常数*出现于常微分方程的通解中 (有赖于方程的阶数); 与此相对照, 偏微分方程解中所得到的一般性要用任意函数来提供, 且确定特解 (或函数) 这件事一开始就需要注意.

回顾平面曲线族

$$\phi(x,y;c)=0,\ c \text{ 是任意参数}$$

描述了一阶常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=F(x,y)$$

的通解 (如果函数 F 非线性依赖于 y, 则不恒同于由参数 c 的个别值给出的解的奇解是可能的); 且常微分方程的特解通常可由在 $x=x_P$ 处选取 $y=y_P$ 的值, 或在解曲线上固定一点 P (见图 4) 而挑选出来.

具有两个自变量的一阶线性偏微分方程的最简单代表, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$, 有解

$$z=f(y)$$

其中 f 表示任意函数. 如何确定 f?

画一族平行于 x 方向的直线后 (如图 5 所示), 我们可在每条直线上的一个点上指定 z 的值, 则 z 在同一直线的所有其余点已知. 我们可以沿一直线段 P_1P_2 或曲线段 P_1P_3 选取 z 的值; 于是在位于 P_1 和 P_2 或 P_3 的纵坐标之间的所有

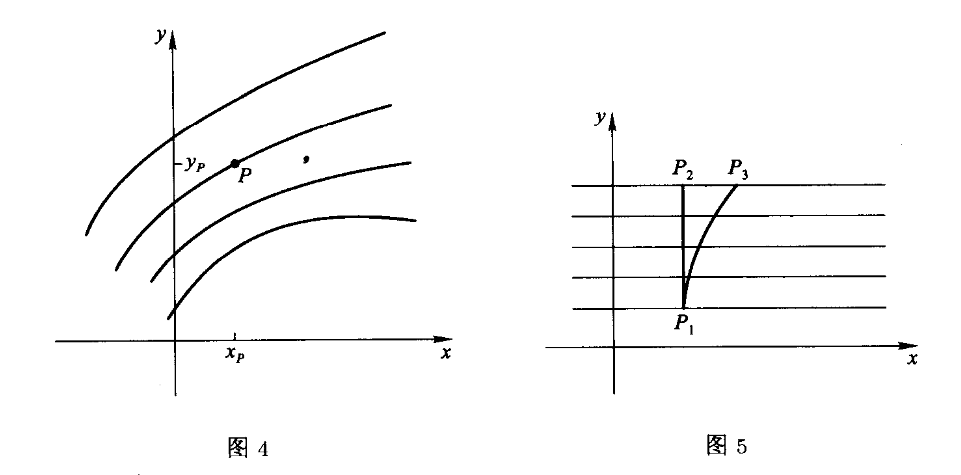


图 4　　图 5

直线上 z 就确定了. 此外在 $P_2(P_3)$ 之上或 P_1 之下的任何直线 (该平面上的点) 上, z 仍未知. 但是, 在 $y=$ 常数的单条直线上, 我们不能在多于一个点上固定 z 的值, 因为如果两个值不等, 会得出矛盾.

以下考虑一阶齐次偏微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0 \tag{2.1}$$

且引入自变量变换 $(x,y)\to(u,v), u=x+y, v=x-y$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}$$

且 (2.1) 变成一个单项方程

$$\frac{\partial z}{\partial u}=0.$$

因此 $z=f(v)$ 或

$$z=f(x-y) \tag{2.2}$$

表示一个易验证的 (2.1) 的带一个任意的可微函数 f 通解. 为了具体确定 f, 画一族斜率 1 的平行直线 (见图 6) 且在曲线或弧 γ 上的所有点处指定 z 的值; 则在与 γ 相交的每条直线的每一点上 z 等于 γ 与该直线交点处的指定值, 因而在 x,y 平面上直线族 $y=x+c$ 中过 γ 端点的两直线之间的区域内确定了 (2.1) 的一个解. 显然 z 在具有单位斜率的任一直线上不能任意指定, 所以弧 γ 与每一条这样的直线只能有一个交点.

例如: 如果 γ 在正虚轴上 $(y>0,x=0)$ 且在该处选取 $z(0,y)=e^{-y}$, 代入 (2.2) 给出

$$e^{-y}=f(-y),\quad y>0,$$

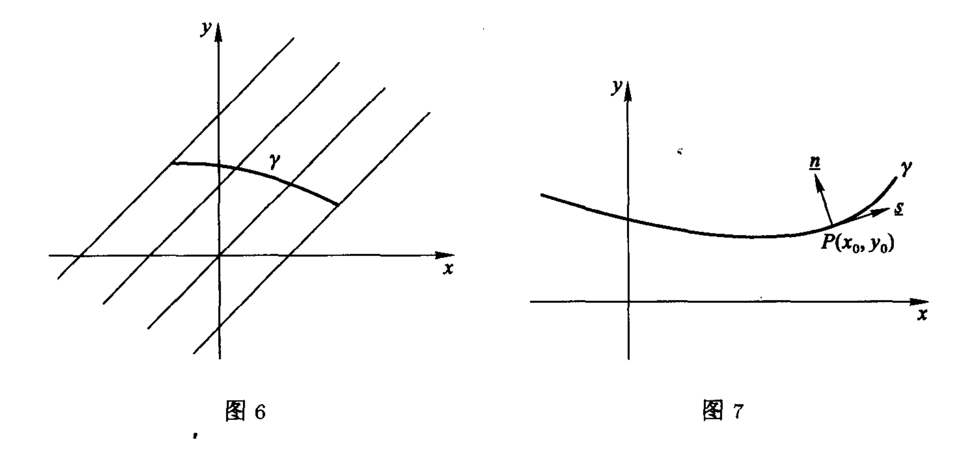


图 6

图 7

这表示

$$f(\xi)=e^{\xi},\quad \xi<0,$$

所以

$$z(x,y)=e^{x-y}$$

描述了在区域 $y>x$ 中的特解.

以下合乎逻辑地考虑一阶偏微分方程

$$a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=F(x,y,z) \tag{2.3}$$

的一个解是否能用在 x,y 平面中一条曲线 γ 上规定它的值来确定 (见图 7), 即用在 γ 上弧长 s 的给定函数

$$z=f(s) \tag{2.4}$$

来确定 (2.3) 的解; 设 $\underline{s},\underline{n}$ 分别表示曲线 γ 的切向和法向单位向量, 且注意到这两向量的方向余弦由

$$\frac{dx}{ds},\quad \frac{dy}{ds}\quad 和\quad -\frac{dy}{ds},\quad \frac{dx}{ds}. \tag{2.5}$$

给定. 不需偏微分方程 (2.3) 的解的任何先验细节, 只要假设 $z(x,y)$ 对 γ 上某点 $P(x_0,y_0)$ 的 Taylor (泰勒) 级数展开式存在, 即

$$\begin{aligned}z(x,y)=&z(x_0,y_0)+(x-x_0)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0+(y-y_0)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0\\&+\frac{1}{2}(x-x_0)^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0+(x-x_0)(y-y_0)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)_0\\&+\frac{1}{2}(y-y_0)^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_0+\cdots\end{aligned} \tag{2.6}$$

这里所有偏导数在 P 点取值. 第一项 $z(x_0, y_0)$ 由假设取规定值, 而且利用该偏微分方程和 γ 上的条件 (2.4), 在原则上可以求出在 P 点的所有偏导数. 微分 (2.4) 得

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \frac{df}{ds}, \tag{2.7}$$

其中给出的三个量 $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$ 和 $\frac{df}{ds}$ 表示 γ 上 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 之间的线性关系. 偏微分方程 (2.3) 本身提供了另一个线性关系, 只要

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ a(x,y) & b(x,y) \end{vmatrix} \neq 0$$

或

$$a(x,y)\frac{dy}{ds} - b(x,y)\frac{dx}{ds} \neq 0,$$

即

$$\frac{dy}{dx} \neq \frac{b(x,y)}{a(x,y)}, \tag{2.8}$$

则 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 能唯一分别地确定.

什么是求 z 的三个二阶偏导数的类似方法? 由 (2.7) 对 s 微分得出其中的一个关系式; 这给出

$$\begin{aligned}
\frac{d^2z}{ds^2} &= \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{dx}{ds} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dy}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{ds^2} \\
&= \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{dy}{ds}\right]\frac{dx}{ds} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{ds^2} \\
&\quad + \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{dy}{ds}\right]\frac{dy}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{ds^2} \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \\
&= \frac{d^2 f}{ds^2}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

该偏微分方程分别对 x 和 y 微分, 结果是

$$a(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}F(x,y,u) \tag{2.10}$$

和

$$a(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + b(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}F(x,y,u), \tag{2.11}$$

这样, 由 $z, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在 γ 上的参照点 P 处的已知结果, 三个方程 (2.8),(2.9),(2.10) 唯一确定 z 的二阶偏导数, 只要假设

$$\begin{vmatrix} \left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2 & 2\dfrac{dx}{ds}\dfrac{dy}{ds} & \left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2 \\ a(x,y) & b(x,y) & 0 \\ 0 & a(x,y) & b(x,y) \end{vmatrix} \neq 0,$$

即

$$b^2(x,y)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - 2a(x,y)b(x,y)\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + a^2(x,y)\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \neq 0,$$

或

$$\left(b(x,y)\frac{dx}{ds} - a(x,y)\frac{dy}{ds}\right)^2 \neq 0,$$

它与前面计算 z 的一阶偏导数的条件一致, 因此确定了 Taylor 展开式 (2.6) 中的 (关于 x, y) 线性项. 为了确定泰勒展式中的高次项, 同样的条件也对类似程序 (包括重复微分 (2.9)—(2.11)) 成立. 在这样的情况下, 我们得出结论, 偏微分方程 (2.3) 有一个解, 它沿 x, y 平面的一条曲线具有连续指定的 z 值, 该曲线处处不平行于由常微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)} \tag{2.12}$$

定义的 (单参数) 曲线族中的任一条曲线, 这族曲线称为该偏微分方程的特征线.

由确定常微分方程的一个解所需条件的个数和阶数之间的相等关系的提示, 当 z 及其法向导数两者沿一平面曲线 γ 独立地被指定时, 二阶偏微分方程

$$a(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{2.13}$$

的解有可能找到. 现在

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= \underset{\sim}{s} \cdot \nabla z = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{ds}, \\ \frac{\partial z}{\partial n} &= \underset{\sim}{n} \cdot \nabla z = -\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dx}{ds}, \end{aligned}$$

用 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 表示 z 的切向和法向导数, 其中右边式子的系数恰好是 (2.5) 中给出的 γ 的单位切向量和法向量的分量. 为了确定 Taylor 展式 (2.6) 的线性项, 反解上述两关系式即得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial z}{\partial n}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{dx}{ds}, \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial n}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{dy}{ds}. \tag{2.15}$$

两方程式

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dy}{ds},$$
$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{dy}{ds}$$

当和偏微分方程 (2.13) 联合在一起时, 可分别确定 z 的所有三个二阶偏导数, 只要假设

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & 0 \\ 0 & \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ a(x,y) & 2b(x,y) & c(x,y) \end{vmatrix} \neq 0,$$

即

$$a(x,y)\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-2b(x,y)\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+c(x,y)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\neq 0. \tag{2.16}$$

如果 γ 与由常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b(x,y)}{a(x,y)}\pm\frac{1}{a(x,y)}\sqrt{b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)} \tag{2.17}$$

定义的该偏微分方程的平面特征线之一不同, 则 γ 上的数据, 即 z 及其法向导数的值, 就可以延拓并且在 γ 附近求得一个解 (允许应用条件 (2.16) 以显式决定 (2.6) 中的后继项).

一阶或二阶线性偏微分方程 (2.3),(2.13) 被 x,y 平面上沿曲线 γ 的给定数据所确定的解的*存在性*的各自的条件 (2.12),(2.17) 可作一对比, (2.12) 定义一个 (实) 单参数曲线族, 而 (2.17) 定义了两族曲线

$$\frac{dy}{dx}=f_+(x,y),\quad \frac{dy}{dx}=f_-(x,y), \tag{2.18}$$

其中 f_+ 和 f_- 分别对应 (2.17) 右端式子中的正号和负号. 如果实函数 $a(x,y)$, $b(x,y)$ 和 $c(x,y)$ 满足 $b^2-ac>0$, 则上面两个常微分方程有两族解

$$\xi(x,y)=c_+,\quad \eta(x,y)=c_-;$$

如果 $b^2-ac=0$, 则只有一族解

$$\xi(x,y)=c;$$

最后, 如果 $b^2-ac<0$, 则方程 (2.18) 无实解. 在以上三种情况下, 人们分别称之为具有两族实特征线, 一族实特征线和 "虚" 特征线, 而对应的偏微分方程分别称为**双曲型、抛物型或椭圆型**.

当然, 也有这样的情形, 二阶偏微分方程的型在所考虑的自变量区域中发生改变, 例如当方程为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \tag{2.19}$$

而 y 容许取正、负两种值. 首先设 $y>0$, 则方程 (2.18) 变成

$$\frac{dy}{dx}=i\sqrt{y},\quad \frac{dy}{dx}=-i\sqrt{y},$$

对特征线导出复关系式

$$x\pm 2i\sqrt{y}=c_{\pm}. \tag{2.20}$$

引入自变量变换

$$\xi=x,\quad \eta=2\sqrt{y}, \tag{2.21}$$

从而

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial z}{\partial \eta},\\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)=\frac{1}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}+\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{2}{\eta}\right)\\
&=\frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}-\frac{1}{\eta}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right).
\end{aligned}$$

因此, (2.19) 变换后的形式为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}-\frac{1}{\eta}\frac{\partial z}{\partial \eta}=0, \tag{2.22}$$

比 (2.19) 有高阶导数的系数为常数的优点. (2.22) 的特征线由常微分方程

$$\frac{d\xi}{d\eta}=\mp i$$

得到, 有具体表示式

$$\xi=\mp i\eta+c_{\pm},$$

依据变量 ξ,η 的定义, (2.21) 与早先的式子 (2.20) 是一致的.

如果 $y<0$, 则

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{-y}$$

的解表示两族抛物线

$$x\pm 2\sqrt{-y}=c_{\pm}, \tag{2.23}$$

选取自变量变换

$$\xi=x+2\sqrt{-y},\quad \eta=x-2\sqrt{-y} \tag{2.24}$$

后, 方程 (2.19) 变成

$$4\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{2}{\xi-\eta}\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}-\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)=0. \tag{2.25}$$

(2.25) 的特征线由 (2.16) 得出, 具有形式 $d\xi d\eta=0$, 因而

$$\xi=c_1,\quad \eta=c_2,$$

由于 (2.24), 与原偏微分方程的特征线的一致性显而易见.

更一般地, 选取特征自变量可把二阶线性偏微分方程化为三种不同标准形式之一, 即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}=F\left(\xi,\eta,z,\frac{\partial z}{\partial\xi},\frac{\partial z}{\partial\eta}\right),\quad \text{双曲型},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=F\left(\xi,\eta,z,\frac{\partial z}{\partial\xi},\frac{\partial z}{\partial\eta}\right),\quad \text{椭圆型},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=F\left(\xi,\eta,z,\frac{\partial z}{\partial\xi},\frac{\partial z}{\partial\eta}\right),\quad \text{抛物型}.$$

这些方程与不同的物理现象 (波运动, 平稳或瞬态扩散过程) 有关. 包括分析的各种不同方面以及附带的特征在内的更多的细节将留待以后讨论.

这里我们将就确定解的问题, 特别是沿特征线指定数据的问题做一些附加的说明. 考虑 (抛物型) 方程

$$z_{xx}=z_y,$$

其特征线是 (单独的) 一族直线 $y=c$. 如沿特征线 $y=0$ 取一对条件, 例如说

$$z(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial}{\partial y}z(x,0)=\psi(x),$$

则函数 φ,ψ 不能独立地指定, 因为该偏微分方程要求

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}=\varphi''(x)=\psi(x).$$

此外, 当 $y=0$ 时, z 关于 y 的每个高阶导数是可以用 φ 对 x 的偶数阶导数来表示的, 即

$$\left.\frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right|_{y=0}=\varphi^{(2n)}(x),$$

因为关系式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}$$

显然成立, 从而各阶导数的公式也是显然的. 因此提出一个级数表示

$$z(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(2n)}(x)}{n!}y^n,$$

即使在 $y>0$ 区域内它是一个发散级数. 这样一特例就揭示沿一特征线指定数据是有限制的.

习 题 2

1. 求以下两个偏微分方程的标准形式并证明它们是相同的

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0, \tag{i}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\cos x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\sin^2 x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\sin x\frac{\partial z}{\partial y}=0. \tag{ii}$$

2. 两函数 $z(x,y)$ 和 $z_1(x,y)$ 具有 Jacobi (雅可比) 行列式为零

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y}\\ \dfrac{\partial z_1}{\partial x} & \dfrac{\partial z_1}{\partial y}\end{vmatrix}=0,$$

即由关系式

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z_1}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z_1}{\partial x}=0$$

联系着, 如果 z_1 给定, 则上式表示关于 z 的一阶偏微分方程.

证实

$$z(x,y)=F(z_1(x,y)) \tag{*}$$

满足该偏微分方程, 这里 F 表示一任意函数, 且注意到这蕴涵 z 是函数依赖于 z_1 的. 证明如果偏微分方程

$$a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

的一个解 $z_1(x,y)$ 已知, 则该方程所有其他的解均可用 (*) 表示.

3. 用由

$$u=x,\quad v=z_1(x,y)$$

定义的自变量变换分析上述问题中的偏微分方程, 且验证以上步骤也适用于非齐次偏微分方程

$$a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=c(x,y).$$

由此解以下特定的一对方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\begin{cases}0,\\1.\end{cases}$$

4. 设常微分方程

$$a(x,y)dx+b(x,y)dy=0, \tag{*}$$

其中微分组合不是恰当的, 即

$$adx+bdy\neq d\Phi(x,y),$$

求解此方程的一种方法就是寻找积分因子 $\mu(x,y)$, 即使得

$$\mu(adx+bdy)=d\Phi,$$

于是 (*) 的解就可以表成 $\Phi(x,y)=$ 常数; 这要求 μ 满足一阶偏微分方程

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu a)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu b).$$

在解上面的方程中, 关于特征线的作用一般有什么结论?

5. 给定联立一阶线性偏微分方程组

$$a_1\frac{\partial z^{(1)}}{\partial x}+b_1\frac{\partial z^{(1)}}{\partial y}+c_1\frac{\partial z^{(2)}}{\partial x}+d_1\frac{\partial z^{(2)}}{\partial y}=e_1,$$
$$a_2\frac{\partial z^{(1)}}{\partial x}+b_2\frac{\partial z^{(1)}}{\partial y}+c_2\frac{\partial z^{(2)}}{\partial x}+d_2\frac{\partial z^{(2)}}{\partial y}=e_2,$$

其中 $a_1,a_2,b_1,b_2,\cdots,e_1,e_2$ 是自变量 x,y 的函数. 假设在 x,y 平面的一条曲线 γ 上独立地指定了 $z^{(1)},z^{(2)}$, 即

$$z^{(1)}=f^{(1)}(s),\quad z^{(2)}=f^{(2)}(s),$$

其中 s 表示从某参照点起的弧长. 求出能沿曲线 γ 分别确定

$$\frac{\partial z^{(1)}}{\partial x},\quad \frac{\partial z^{(1)}}{\partial y},\quad \frac{\partial z^{(2)}}{\partial x},\quad \frac{\partial z^{(2)}}{\partial y}$$

的条件, 即一个特征线类型的方程.

6. 将单个的二阶偏微分方程

$$a(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

替换成四个一阶方程

$$u=\frac{\partial z}{\partial x},\quad v=\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+c\frac{\partial v}{\partial y}=F(x,y,z,u,v)$$

和

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

最后的方程是第一对方程所必需的相容性要求. 证明这方程组与前面建立的关于该二阶偏微分方程的特征方程是相同的.

7. 一阶和二阶偏微分方程 (2.3),(2.13) 的平面特征曲线已由一阶常微分方程所确定, 其中 y 是 x 的函数, 且后者的解描出了一个单参数曲线族 $y=y(x,c)$. 这样的族可以有隐式表示, 即

$$\varphi(x,y)=c,\quad c\text{ 为任意常数},$$

并且就特征方程的相应形式提出了一个问题.

证明对 (2.3),(2.13) φ 分别满足偏微分方程

$$a(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0 \tag{$*$}$$

或

$$a(x,y)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+2b(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+c(x,y)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2=0. \tag{$**$}$$

写出

$$y-y(x)=\varphi(x,y),$$

注意到它将常微分方程的解 $y=y(x)$ 与偏微分方程的解 $\varphi(x,y)=0$ 联系起来, 且把 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=-\dfrac{dy}{dx},\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}=1$ 代入 $(*)$, $(**)$ 中, 这样从上面的偏微分方程又恢复成常微分方程.

设 λ_1,λ_2 表示二次方程

$$a\lambda^2-2b\lambda+c=0$$

的根, 然后验证 (**) 代换成一对一阶偏微分方程

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0.$$

由此推出 (如果 $\lambda_1\neq\lambda_2$) 就有与以前观察到的相同的两个分离的特征线族.

8. 考虑二阶线性常系数偏微分方程

$$az_{xx}+2bz_{xy}+cz_{yy}+dz_x+ez_y+fz=F(x,y),$$

其特征线属于两直线族

$$y-\lambda_1 x=c_1,\quad y-\lambda_2 x=c_2$$

之一. 这里按照多项式方程

$$a\lambda^2-2b\lambda+c=0$$

的根的性质, 对 λ_1,λ_2, 包括两不同实数值, 相等实数值和共轭复数值三种情形 (参照前面). 引入由

$$\xi=\alpha x+\beta y,\quad \eta=\gamma x+\delta y \tag{*}$$

描述的自变量的线性 (或仿射) 变换 $(x,y)\to(\xi,\eta)$, 并找出偏微分方程作为结果所得的形式; 原偏微分方程和变换后方程的特征线之间有什么关系? 如果 (*) 取特殊形式

$$\xi=y-\lambda_1 x,\quad \eta=y-\lambda_2 x,$$

即 x,y 原来的特征组合定义新的坐标变量时, 确定给定偏微分方程的标准 (或正规) 形式.

第三章

偏微分方程和有关的任意函数

偏微分方程的解可以包含任意函数的特殊的例子揭示: 偏微分方程的解非常之多 (对于大多数偏微分方程而言, 它们的解远超过已经实际确定的解的个数). 作为例子, 下面的不包含 z 对 y 的导数的方程

$$z_x + p(x,y)z = 0 \tag{3.1}$$

是关于 x 的一个常微分方程, 但是与 $p(x,y) =$ 常数的常微分方程有显著的不同, 即, 在它们的解的表达式中可以用任意函数来替换任意积分常数, 具体地说, 使用因子

$$\exp\left(\int_y^x p(x',y)dx'\right)$$

可把 (3.1) 重写成

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(z\exp\left(\int_y^x p(x',y)dx'\right)\right) = 0,$$

因而

$$z(x,y) = f(y)\exp\left\{-\int_y^x p(x',y)dx'\right\} \tag{3.2}$$

用一个任意函数 $f(y)$ 来表示 (3.1) 的解.

以下考虑 (名副其实) 二阶偏微分方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \alpha x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + \alpha(1+xy)z = 0, \quad \alpha \text{ 为常数} \tag{3.3}$$

及其变形

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}+\alpha xz\right)+y\left(\frac{\partial z}{\partial y}+\alpha xz\right)=0, \tag{3.4}$$

由此推断出一对一阶方程

$$\frac{\partial z}{\partial y}+\alpha xz=w, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}+yw=0. \tag{3.6}$$

按照 (3.2),(3.6) 的解由

$$w=f(y)e^{-xy}$$

给出, 这样 (3.5) 变成

$$z_y+\alpha xz=f(y)e^{-xy}.$$

其积分因子是 $e^{\alpha xy}$, 且

$$\frac{\partial}{\partial y}(ze^{\alpha xy})=f(y)e^{(\alpha-1)xy},$$

因此

$$z(x,y)=e^{-\alpha xy}\left\{g(x)+\int_x^y f(y')e^{(\alpha-1)xy'}dy'\right\} \tag{3.7}$$

用两个任意函数 f,g 表示 (3.3) 的解. 我们注意到, (3.3) 的顺利解出是依赖于一种特殊情形, 即变形 (3.4) 不包含与 z 成比例的附加项.

特别地, 如果 $\alpha=1$, (3.7) 简化成

$$z(x,y)=e^{-xy}\{g(x)+f(y)\}, \tag{3.8}$$

其中对 y 的任意函数作了明显的重新定义; 考虑到它是线性的; (3.8) 的每一项分别满足此偏微分方程. 单独考虑第一项, 微分后得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-yz+e^{-xy}g'(x),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-xz,$$

且

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-z-x\frac{\partial z}{\partial x}=-z+xyz-xe^{-xy}g'(x),$$

由此得出所要求的

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+(1+xy)z&=-z+xyz-xe^{-xy}g'(x)-xyz\\&\quad+xe^{-xy}g'(x)-xyz+(1+xy)z=0.\end{aligned}$$

为了从包含自变量和因变量的一个关系式 (显式或隐式) 中消去任意函数, 然后得到一个偏微分方程, 通常需要一系列运算. 作为例子, 给定隐式关系式

$$z = f(x^2 + y^2 + z^2), \tag{3.9}$$

其中 f 是一元函数, 求导结果为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f' \cdot \left(2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f' \cdot \left(2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

其中 f' 表示常导数 (一元函数的导数), 以上两式相除结果得出与 f 无关的关系式

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{x + zz_x}{y + zz_y},$$

简化成 (线性) 偏微分方程

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{3.10}$$

一阶偏微分方程与曲面族有自然的联系且某些现成的例子值得注意. 首先, 考虑当一条称为母线的曲线 C 绕一固定直线 AB (见图 8) 旋转时所形成的旋转曲面. 将直角坐标系 x, y, z 的原点放在旋转轴 AB 上且注意到母线上每一点描绘出一个圆 Γ, 其中心在 AB 上且所在平面垂直于 AB; 而所考虑的曲面由这样的圆的全体形成.

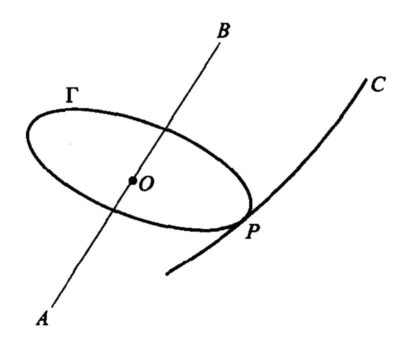


图 8

轴的方程为

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\lambda}, \tag{3.11}$$

而此轴的法平面是

$$\alpha x + \beta y + \lambda z = \sigma. \tag{3.12}$$

每一个圆 Γ 是一个法平面和一个中心在 O 的球面的交线, 因此由联立方程组

$$\alpha x + \beta y + \lambda z = \sigma, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \rho \tag{3.13}$$

所确定. 为了保证圆 Γ 上每一点与一母线或曲线 C 相接触, 三个方程, 即 (3.13) 加上 C 的方程必须相容, 且在消去 x, y, z 后可以建立关系式

$$F(\sigma, \rho) = 0$$

或

$$\sigma = f(\rho). \tag{3.14}$$

所以, 回顾 (3.13),(3.14), 围绕直线 (3.11) 的旋转曲面的一般方程变成

$$\alpha x + \beta y + \lambda z = f(x^2 + y^2 + z^2), \tag{3.15}$$

其中 f 表示一任意函数, 在选取曲线 C 后确定.

(3.15) 式对 x 和 y 分别求偏导数, 而将 z 作为其函数, 得

$$\alpha + \lambda\frac{\partial z}{\partial x} = f' \cdot \left(2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$
$$\beta + \lambda\frac{\partial z}{\partial y} = f' \cdot \left(2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

以上两式相除消去 f' 表示为一阶偏微分方程

$$(\lambda y - \beta z)\frac{\partial z}{\partial x} + (\alpha z - \lambda x)\frac{\partial z}{\partial y} = \beta x - \alpha y, \tag{3.16}$$

它描述了旋转曲面. 注意偏微分方程 (3.10) 是 (3.16) 的特殊情形, 适用于旋转轴沿 z 方向.

本身包含一任意函数的一个偏微分方程描述了每个或每一族平行曲面或平面曲线, 其中沿着一个特殊曲面 (或曲线) 的所有点处的法方向的一个一致法位移生成族中另一曲面 (或曲线). 为导出此偏微分方程, 考虑一个曲面 S 具有单位法向量 $\underline{n}$ 和该法方向的一个无穷小位移 (见图 9)

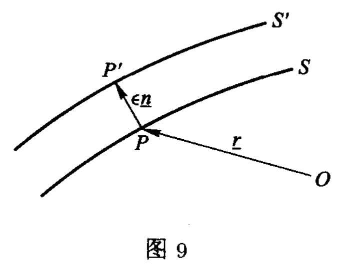


图 9

$$\underline{r'} = \underline{r} + \epsilon\underline{n}, \quad \epsilon \ll 1$$

使点 P 变成邻近点 P'. 如果 S 的方程是

$$\phi(\underline{r}) = c,$$

则

$$\begin{aligned}\phi(\underline{r'}) &= \phi(\underline{r} + \epsilon\underline{n}) = \phi(\underline{r}) + \epsilon\underline{n} \cdot \nabla\phi \\ &= \phi(\underline{r}) + \epsilon\underline{n} \cdot \left(\underline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \underline{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi \\ &= \phi(\underline{r}) + \epsilon\left\{\cos\alpha\frac{\partial\phi}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial\phi}{\partial y} + \cos\lambda\frac{\partial\phi}{\partial z}\right\}\end{aligned}$$

给出了 ϕ 的对应近似, 其中 α, β, λ 是 $\underline{n}$ 的方向余弦且 $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}, \dfrac{\partial\phi}{\partial y}, \dfrac{\partial\phi}{\partial z}$ 是向量 $\nabla\phi$ 的 x, y, z 分量; 且

$$\phi(\underline{r}') = c'$$

定义了这邻近的平行曲面. 因

$$\underline{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}, \quad |\nabla\phi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2},$$

由此推导出

$$\frac{\nabla\phi \cdot \nabla\phi}{|\nabla\phi|} = |\nabla\phi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2} = (c' - c)/\epsilon$$

或

$$\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2 = f(\phi), \tag{3.17}$$

由于参数的变化 $c' - c = \Delta c$ 仅依赖于函数 ϕ. 非线性偏微分方程 (3.17) 有三个自变量, 而对平行平面曲线的对应方程

$$\phi_x^2 + \phi_y^2 = f(\phi) \tag{3.18}$$

有两个自变量.

容易验证右边为常数项时的方程

$$\phi_x^2 + \phi_y^2 = 1 \tag{3.19}$$

有双参数解族

$$\phi(x, y, \alpha, \beta) = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} \tag{3.20}$$

或另一个双参数解族

$$\phi(x, y, \alpha, \beta) = \alpha x + \sqrt{1-\alpha^2}\, y + \beta, \tag{3.21}$$

后者的自变量处于分离的项. 表示式 (3.20),(3.21) 称为偏微分方程 (3.19) 的完全积分, 已被 Lagrange (拉格朗日) 所证明, 可用参数形式表示其通解. 这个方法依赖于对一个参数 (β) 作为另一参数 (α) 的任意函数的可容许表示

$$\beta = f(\alpha) \tag{3.22}$$

和联立方程对

$$\phi = \phi(x, y, \alpha, \beta), \quad \frac{\partial\phi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\phi}{\partial\beta} f'(\alpha) = 0, \tag{3.23}$$

第二个方程由第一个方程对 α 微分后得出. 这对方程联合地刻划了单参数曲线族包络的特征, 提供了偏微分方程 (3.19) 的通解. 这样, (3.20) 的完全积分具体确定了一个通解, 其几何解释是其圆心描绘一条任意轨迹的圆族的包络.

上述表明偏微分方程的解是多得不可胜数的, 因此求其解有很大自由, 如考虑它们的初始指定条件.

习　题　3

1. 从表示式

$$z = z(x, y) = x^k f(y/x)$$

中消去任意函数, 求得出的偏微分方程.

2. 求三阶偏微分方程

$$z_{xyy} - z_{xxx} = 0$$

的包含三个任意函数的解.

3. 在表示式

$$z(x, y) = f(x)g(y)$$

中消去任意函数确定一个二阶偏微分方程, 再直接解此方程.

4. 构造非齐次线性偏微分方程

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$$

的通解.

5. 对绕 z 轴的旋转曲面的一阶偏微分方程, 是否可能通过规定函数 $z(x, y)$ 沿 x, y 平面的圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 上的值而确定它的一个解? 求满足条件

$$z(x, 0) = e^x, \quad x > 0$$

的解.

6. 一个锥面是由过固定点 (α, β, λ) (称为顶点) 的一条无限直线 AB (称为母线) 沿给定曲线 C (称为准线) 移动生成的轨迹曲面 (见图 10).

设方程

$$x - \alpha = \rho(z - \lambda), \quad y - \beta = \sigma(z - \lambda)$$

表示母线, 其中 ρ, σ 是两个 (方向) 参数. 保证母线与准线之间的接触, 然后建立以 (α, β, λ) 为顶点的锥面的一般表示式和描述所有这些曲面的一阶偏微分方程.

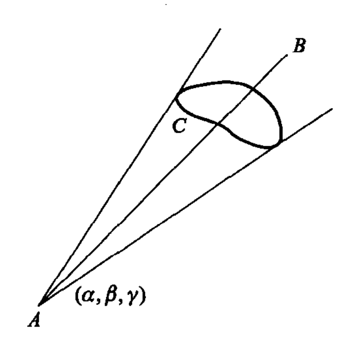


图 10

7. 指出偏微分方程

$$\phi_x^2+\phi_y^2=\phi_z^2$$

怎样转换成下式

$$\psi_x^2+\psi_y^2=1.$$

8. 求出容许带两个参数的完全积分或解

$$y^2(x^2-\alpha)=(z+\beta)^2$$

满足的偏微分方程.

9. 考虑一个分离型偏微分方程

$$\phi(x,z_x)=\psi(y,z_y) \tag{*}$$

并设

$$\phi(x,z_x)=c,\quad \psi(y,z_y)=c$$

具有公共的任意常数 c; 记 $z_x=f(x,c), z_y=g(y,c)$, 构造 (*) 的完全积分. 在第 8 题中的偏微分方程中应用这个方法.

10. 不相交曲面族 $\phi(\underline{r})=c$ 称为等势面, 如果其上有一个正则调和函数 ψ, 即 Laplace 方程 $\psi_{xx}+\psi_{yy}+\psi_{zz}=0$ 的解取 (不同的) 常数值. 给定隐式表示 $\psi=f(c)$ 和对 ψ 的上述要求, 证明将 c 看成 x,y,z 的函数时, 一族等势面的条件有形式

$$\frac{\nabla^2 c}{|\nabla c|^2}=\frac{c_{xx}+c_{yy}+c_{zz}}{|\nabla c|^2}=F(c).$$

检验在同心球面的情形这一条件是成立的.

第四章

偏微分方程的特解

偏微分方程有通解的情形是罕见的, 例如, 对相对简单的常系数线性方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y} \tag{4.1}$$

而言, 甚至不存在包罗一切形式的解, 即通过特定任意函数可产生所有其他的解. 可以得到 (4.1) 的显式解的期望是有道理的, 确实, 这些解包括带有任意参数的整族解 (所以达到了高度一般性).

在两个自变量的情形, 构造特解作为两个单变量函数的积, 即

$$z(x,y) = X(x)Y(y) \tag{4.2}$$

在很多情况下是可行的. 把 (4.2) 代入 (4.1) 并把结果写作

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y(y)}\frac{dY}{dy}.$$

因为 x, y 是自变量, 上式中等式左右两个部分必须有一个不依赖于 x, y 的公共量, 称为 λ, 它可以是实数或复数. 这就是说, 分别满足常微分方程

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \lambda X = 0, \quad \frac{dY}{dy} - \lambda Y = 0 \tag{4.3}$$

的两函数 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 之积 $X(x)Y(y)$ 表示 (4.1) 的一个解.

按照分离常数 λ 的不同选取, 这样定义的分离变量解取不同形式. 与 λ 不同的可能情况对应的解是:

1. $\lambda = \alpha^2 > 0$, 为正实数,

$$z(x,y) = \begin{cases} e^{\alpha x} \cdot e^{\alpha^2 y} \\ e^{-\alpha x} \cdot e^{\alpha^2 y} \end{cases}, \quad z(x,y) = \begin{cases} \cosh \alpha x e^{\alpha^2 y} \\ \sinh \alpha x e^{\alpha^2 y}. \end{cases}$$

2. $\lambda = -\beta^2 < 0$, 为负实数,

$$z(x,y) = \begin{cases} \cos \beta x e^{-\beta^2 y} \\ \sin \beta x e^{-\beta^2 y}. \end{cases}$$

3. $\lambda = 0$,

$$z(x,y) = A + Bx.$$

4. $\lambda = i\mu, \mu > 0$, 只有正虚部

$$z(x,y) = \begin{cases} e^{\sqrt{\mu/2x}} \cos\left\{\sqrt{\dfrac{\mu}{2}}x + \mu y + \delta\right\}, \\ e^{-\sqrt{\mu/2x}} \cos\left\{\sqrt{\dfrac{\mu}{2}}x - \mu y - \delta\right\} \end{cases} \quad \left(\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right).$$

所有上面这些解当 $-\infty < x, y < \infty$ 时都是有限的, 虽然某些解在 $|x|$ 和/或 $|y| \to \infty$ 时包含无界因子, 这些因子在考虑要求有界解的问题中将被除去.

考虑到偏微分方程 (4.1) 的线性性质, 特解

$$z(x,y,\beta) = \cos \beta x e^{-\beta^2 y}$$

可对任意参数 β 积分, 由此推出

$$w(x,y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos \beta x e^{-\beta^2 y} d\beta \tag{4.4}$$

也可能是解, 为了保证这是一个收敛的积分, 限制 $y > 0$ 是必要的. 对 w 求偏导数并分部积分后得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \sin \beta x \cdot \beta e^{-\beta^2 y} d\beta \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \sin \beta x \frac{d}{d\beta}\left(\frac{e^{-\beta^2 y}}{2y}\right) d\beta \\ &= -\frac{x}{\sqrt{\pi} y} \int_0^{\infty} \cos \beta x e^{-\beta^2 y} d\beta = -\frac{x}{2y} w. \end{aligned}$$

因此 w 满足一阶微分方程

$$\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{x}{2y}w=0 \quad 或 \quad \frac{\partial}{\partial x}(we^{x^2/4y})=0,$$

且由此

$$w(x,y)=F(y)e^{-x^2/4y}$$

带有任意函数 $F(y)$. 这里用 $x=0$ 代入且注意到 (4.4), 由此

$$w(0,y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\beta^2 y}d\beta=\frac{1}{\sqrt{y}}=F(y),$$

所以

$$w(x,y)=\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-x^2/4y}, \quad y>0, \tag{4.5}$$

这正是第一章例 2 中所讨论的函数, 可直接证明它是 (4.1) 的一个解. 此外必须注意 $w(x,y)$ 对变量 x,y, 不具有分离形式, 虽然它是由这样形式的函数集成的.

以下提出是否存在形如

$$z(x,y)=f\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right), \quad -\infty<x<\infty, \quad y>0 \tag{4.6}$$

的 (4.1) 的特解的问题, 其中 $f(\xi)$ 是其自变量 ξ 的可微函数. 由于

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{df}{d\xi}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{d^2 f}{d\xi^2}\cdot\frac{1}{y},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{df}{d\xi}\cdot\left(-\frac{x}{2y^{3/2}}\right), \quad \xi=\frac{x}{\sqrt{y}},$$

(4.6) 式满足 (4.1), 只要

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2}\cdot\frac{1}{y}=-\frac{1}{2}\frac{x}{y^{3/2}}\frac{df}{d\xi} \quad 或 \quad \frac{d^2 f}{d\xi^2}+\frac{\xi}{2}\frac{df}{d\xi}=0.$$

f 的这个常微分方程有另一种形式

$$\frac{d}{d\xi}\ln\frac{df}{d\xi}+\frac{\xi}{2}=0 \quad 从而 \quad \ln\frac{df}{d\xi}=-\frac{1}{4}\xi^2+c_1,$$

所以

$$\frac{df}{d\xi}=c_2 e^{-\frac{1}{4}\xi^2},$$

且

$$f(\xi)=A\int_0^{\xi}e^{-\frac{1}{4}\xi^2}d\xi+B,$$

带有一对任意常数 A, B.

回到原来的自变量 x, y, 显然有

$$z(x,y) = A\int_0^{x/2\sqrt{y}} e^{-\mu^2}d\mu + B \tag{4.7}$$

刻画了偏微分方程 (4.1) 的一个解. 引入所谓的**误差函数**

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\mu^2}d\mu, \tag{4.8}$$

它具有性质

$$\mathrm{erf}(0) = 0,\ \mathrm{erf}(\infty) = 1,\ \mathrm{erf}(-x) = -\mathrm{erf}(x),$$

且考虑解 (4.7) 的一个特殊代表

$$w(x,y) = \frac{1}{2}(w_+ - w_-)\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{y}}\right) + \frac{1}{2}(w_+ + w_-), \tag{4.9}$$

其中 w_+, w_- 表示正的任意常数 (例如说 $w_+ > w_-$).

按照误差函数的性质, 对任意固定的 $y > 0, w(x,y)$ 在两极限值 $w_-(x = -\infty)$ 和 $w_+(x = +\infty)$ 之间连续地变化; 当 y 取大的数量时,w 是渐变的, 当 y 取小的数量时, w 的变化主要发生于 $x = 0$ 的邻域内 (见图 11). 此外, (4.9) 式还预示当 $y \to 0$ 的极限情况下从 w_- (当 $x < 0$) 到 w_+ (当 $x > 0$) 有不连续的变化. 这种函数被 Kelvin (开尔文), 用于根据测得的地壳下温度梯度来估计地球的年龄 (x 是从地壳起的法向距离而 y 与时间成比例).

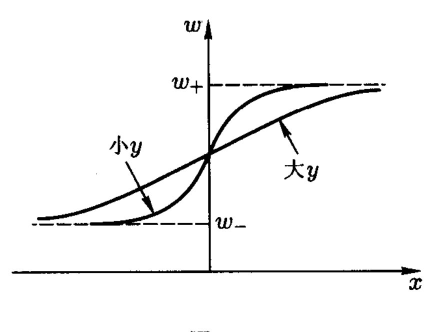


图 11

当偏微分方程与连续介质力学问题的关系变得清楚时, 这些方程获得了非常重要的地位; 不论是流体还是膜或绷紧的弦的运动, 介质或系统的状态是被一个或几个满足偏微分方程的位置和时间的函数所支配的. **定常的**, 或与时间无关的物理现象也由偏微分方程描述, 例如薄板平面上的温度分布. 表示一物理定律的有关偏微分方程的形式不应受坐标轴的特定指向的影响这一事实, 对于所述的方程的结构有确定的影响.

为阐明该论点, 考虑坐标变换

$$x' = x\cos\vartheta + y\sin\vartheta, \quad y' = -x\sin\vartheta + y\cos\vartheta \tag{4.10}$$

这说的是具有公共原点的一对坐标轴 (x, y), (x', y') (见图 12) 和一个任意的分离角 ϑ. 相关函数 z 的一阶偏导数之间的相互关系, 即

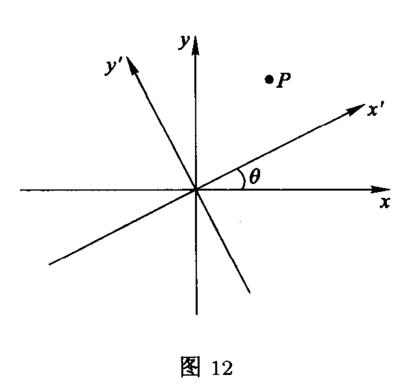


图 12

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\vartheta \frac{\partial z}{\partial x'} - \sin\vartheta \frac{\partial z}{\partial y'}$$

和

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sin\vartheta \frac{\partial z}{\partial x'} + \cos\vartheta \frac{\partial z}{\partial y'}$$

显然由相继的微分式推导出,

$$\begin{aligned} dz(x', y') &= \frac{\partial z}{\partial x'} dx' + \frac{\partial z}{\partial y'} dy' \\ &= \frac{\partial z}{\partial x'}(\cos\vartheta dx + \sin\vartheta dy) + \frac{\partial z}{\partial y'}(-\sin\vartheta dx + \cos\vartheta dy) \\ &= \left(\cos\vartheta \frac{\partial z}{\partial x'} - \sin\vartheta \frac{\partial z}{\partial y'}\right) dx + \left(\sin\vartheta \frac{\partial z}{\partial x'} + \cos\vartheta \frac{\partial z}{\partial y'}\right) dy \\ &= dz(x, y). \end{aligned}$$

一阶常系数偏微分方程

$$A\frac{\partial z}{\partial x} + B\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{4.11}$$

因此变成

$$(A\cos\vartheta + B\sin\vartheta)\frac{\partial z}{\partial x'} + (-A\sin\vartheta + B\cos\vartheta)\frac{\partial z}{\partial y'} = 0 \tag{4.12}$$

且与原方程有同样形式, 如果 (4.11) 和 (4.12) 中各导数的相应系数成比例, 即

$$A\cos\vartheta + B\sin\vartheta = \lambda A, \quad -A\sin\vartheta + B\cos\vartheta = \lambda B \tag{4.13}$$

只相差一个数字因子 λ. 要使保持假设 $A, B \neq 0$ 成立, 就要求线性方程组 (4.13) A, B 的系数行列式为零, 即

$$(\cos\vartheta - \lambda)^2 + \sin^2\vartheta = 0,$$

由此得出

$$\cos\vartheta = \lambda, \quad \sin\vartheta = 0.$$

由于上面两方程对所有 ϑ 不能同时成立, 所以

$$A\frac{\partial z}{\partial x'} + B\frac{\partial z}{\partial y'} \neq 0$$

且偏微分方程式 (4.11) 关于坐标轴旋转的形式不变性被排除. 因此推断出在用空间坐标系描述的问题中一阶偏微分方程没有重要意义. 相反地二阶 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \tag{4.14}$$

按 (4.10) 经自变量变换 $(x,y)\to(x',y')$ 后保持同样形式, 即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2}=0.$$

偏微分方程 (4.14) 适用于均匀物质薄板的定常温度分布, 且另一个二阶方程

$$k_1\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+k_2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

适用于平板沿 x,y 方向分别有不相等的常热传导系数的情形.

在描述物理性质的连续或宏观模型的偏微分方程式中, 二维或三维 Laplace 算子

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

或

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

的突出地位容易追溯到基本的空间对称性. 作为例子考虑位置函数 $\phi(\underline{r})$ 及其沿单位向量 $\underline{n}$ 的方向导数, 即

$$\underline{n}\cdot\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial n}=\left(a\frac{\partial\phi}{\partial x}+b\frac{\partial\phi}{\partial y}+c\frac{\partial\phi}{\partial z}\right),$$

其中 a,b,c 是 $\underline{n}$ 的方向余弦且满足关系式

$$a^2+b^2+c^2=1; \tag{4.15}$$

此外, ϕ 对 $\underline{n}$ 的二阶导数表成

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi}{\partial n^2}&=\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(a\frac{\partial\phi}{\partial x}+b\frac{\partial\phi}{\partial y}+c\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\\&=a^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\\&\quad+2ab\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+2ac\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}+2bc\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}.\end{aligned}$$

因为 a,b,c 的值均匀分布于 $(-1,1)$ 的范围内且平均值等于零, 即

$$\overline{a}=\overline{b}=\overline{c}=0,$$

由此推断出

$$\overline{(\partial\phi/\partial n)} = 0.$$

方向余弦的平方以及交叉乘积的平均值 (按照 (4.15)) 是

$$\overline{a^2} = \overline{b^2} = \overline{c^2} = \frac{1}{3}$$

和

$$\overline{ab} = \overline{ac} = \overline{bc} = 0,$$

因此

$$\overline{\frac{\partial^2\phi}{\partial n^2}} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{3}\nabla^2\phi,$$

且 ϕ 的 Laplace 算子与在任意点 (x, y, z) 处在所有可能的方向 (即沿过此点的所有直线方向) 所取的 ϕ 的二阶导数的平均值成比例. Laplace 算子还参与另一关系式, 对函数 ϕ 的两个值之差, 其中一个是具有无穷小半径 r 的球面的中心处的取值 ϕ, 另一个 $\overline{\phi}$ 则定义为该球面上所有点的平均值; 显然有

$$\nabla^2\phi = \frac{6}{r^2}(\phi - \overline{\phi}),$$

因而 Laplace 算子与热问题有自然联系, 其中温度差与热流量有关.

习　题　4

1. 给定偏微分方程

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

求分离变量形式的特解和通解. 求满足条件 $z(x, 0) = \sin x$ 的解.

2. 证明含有参数 λ 的函数

$$z(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}\ln x\right)e^{-\lambda y}, \quad x > 0$$

满足二阶偏微分方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

试判断 z 能否满足一对条件

$$z(1, y) = 0, \quad z(2, y) = 0.$$

3. 建立具有非线性特征线的变系数偏微分方程

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

的标准形式, 并证明可以按照易于构造通解的方式进行因式分解来完成. 直接代入该偏微分方程来验证其正确性. 求分离变量的解, 然后进行推广以再次得到已知的结果.

4. 求偏微分方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4z=\frac{\partial z}{\partial y}$$

的解使得当 x 和 $y\to\infty$ 时有零极限.

5. 讨论在柱空间坐标 r,ϑ,z 下三维 Laplace 方程即

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\vartheta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0,\quad 0\leqslant r<\infty,0\leqslant\vartheta<2\pi,0\leqslant z<\infty$$

的乘积形式的解, 乘积的因子只是每个坐标变量的函数, 特别地, 求在 $r=0$ 有界且关于 ϑ 以 2π 为周期的解.

6. 给定四阶偏微分方程

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\right]\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\right]\psi=0,$$

它与平面不可压缩黏性流体运动有关. 证实带有任意常数 A,B,C,D 的形如

$$\psi(r,\vartheta)=[Ar^3+Br\ln r+Cr+Dr^{-1}]\sin\vartheta$$

的特殊分离变量解的存在性.

7. 考虑偏微分方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial w}{\partial x}=0,$$

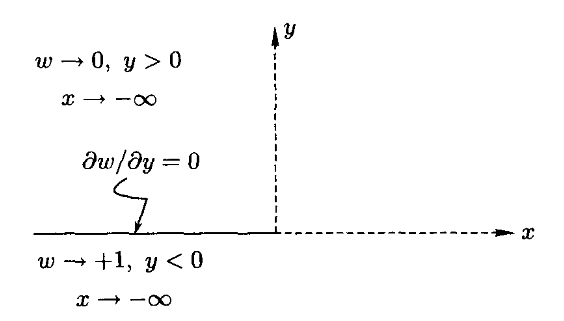
连同如下页图所示的边界条件.

用变量 u,v 替换 x,y, 其中

$$x=(u^2-v^2)/2,\quad y=uv,$$

是早先在方程 (1.9) 中所描述的一个变换, 从而得出该偏微分方程的对应形式. 验证变换后的边界条件是

$$\frac{\partial w}{\partial u}=0,u=0,\qquad \begin{aligned}&w\to 0,v\to\infty,\\&w\to 1,v\to-\infty,\end{aligned}$$



且证明单变量 v 的函数

$$w = \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{erf}\frac{v}{\sqrt{2}}\right)$$

满足所有的要求. w 沿正实轴的值是什么? (u, v 变量的有用性是基于这样的事实: 从变换关系式中消去 v 所得的抛物线族中, 负实轴 $y = 0, x < 0$ 对应于参数值 $u = 0$; 显然, 所得结果

$$y^2 = -2xu^2 + u^4$$

描述了关于 x 轴对称的抛物线族, 开口向左, 且顶点在 $x = u^2/2$.)

8. 两个自变量的函数

$$w(x,y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} f\left(y - \frac{x^2}{4\mu^2}\right)e^{-\mu^2}d\mu, \quad x, y > 0$$

在 $x = 0$ 简化成

$$w(0,y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} f(y)e^{-\mu^2}d\mu = f(y),$$

即任意的一元函数 f. 用关系式

$$y - \frac{x^2}{4\mu^2} = y', \quad \mu = \frac{x}{2\sqrt{y - y'}}, \quad d\mu = \frac{x}{4(y - y')^{3/2}}dy', \quad y' < y$$

改写 w 成形式

$$w(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{y} f(y')\frac{\exp\left\{-\dfrac{x^2}{4(y - y')}\right\}}{(y - y')^{3/2}}dy', \tag{$*$}$$

且证实在 $x > 0, w$ 满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad x, y > 0.$$

因此表示式 (*) 在 $x>0$ 确定了 w 作为该偏微分方程的一个解, 取极限 $x\to+0$, 它有所规定的形式 $f(y)$. (注意 $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-3/2}e^{-1/\varepsilon}=0$). (*) 的一种变形包含以零为下限的类似积分

$$w(x,y)=\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y f(y')\frac{\exp\left\{-\dfrac{x^2}{4(y-y')}\right\}}{(y-y')^{3/2}}dy', \qquad (**)$$

当考虑 w 的性质时, 它与前者 (*) 是不同的, 现在有

$$w(x,0)=0.$$

表示式 (**) 可解释成沿一根从 $x=0$ 扩展到 $x=\infty$ 的细杆上的线性非定常热流; 即当 (在 $t>0$), ($x>0$) 处的初始温度为零, 在端点 ($x=0$) 处以后时刻 ($t>0$) 的温度取指定值 $f(t)$ 时, $w(x,t)$ 表示该杆在任意位置 x 和时刻 t 的温度 (不考虑材料参数和量纲).

9. 设要求解方程组

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=0, 0<x,y<\infty, a,b \text{ 为常数}$$

和

$$z(0,y)=e^{-ay},\quad z(x,0)=1;$$

引入关系式

$$z=e^{-ay-bx}\cdot\phi,$$

$$u=ax,\quad v=by,$$

然后评述其有效性.

10. 时间 t 为自变量的偏微分方程的行波型解具有形式

$$z=a(x)f(b(x)-t),$$

其中 f 是一个任意函数而一对函数 $a(x),b(x)$ 满足适当的常微分方程. 求偏微分方程组

$$z_{xx}=z_{tt},\quad x^2z_{xx}+\frac{1}{4}z=z_{tt}$$

的这种形式的解.

11. 考虑非线性偏微分方程

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

和解 $w = f(x - vt)$, 它刻画了一个以常速度 v 行进的波形式. 证明可以得到函数 f 的一个一阶常微分方程.

第五章

相似解

利用自变量的组合而非分离自变量来进一步精心构造偏微分方程的特解是有好处的; 在前面的章节中已经指出, 式子

$$z = f\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right), \quad y > 0 \tag{5.1}$$

与偏微分方程

$$L[z] = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \tag{5.2}$$

是相容的, 只要函数 f 满足其自变量为 $\xi = x/\sqrt{y}$ 的一个常微分方程, 即

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2}\frac{df}{d\xi} = 0, \tag{5.3}$$

这样就可以有效地减少一个积分变量.

如果系数或参数 $\alpha(>0)$ 在该方程中出现, 例如

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \tag{5.4}$$

比 $\dfrac{x}{\sqrt{\alpha y}}$ 是无量纲的, 而且这个特点使得存在形如

$$z = f\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha y}}\right) \tag{5.5}$$

的解似乎是合理的. 再假设 (5.4) 的一个解通过条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} z dx = C$$

具体确定, 从而比

$$\frac{z\sqrt{\alpha y}}{C}$$

也是无量纲的量. 从这两个不同的比之间的隐式关系, 即

$$F\left(\frac{z\sqrt{\alpha y}}{C}, \frac{x}{\sqrt{\alpha y}}\right) = 0,$$

可推断出

$$\frac{z\sqrt{\alpha y}}{C} = f\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha y}}\right),$$

因此

$$z(x,y) = \frac{C}{\sqrt{\alpha y}} f\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha y}}\right) \tag{5.6}$$

是解的预期形式.

将最后的式子代入 (5.4), 得出一个对 f 的常微分方程, 即

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2}\frac{df}{d\xi} + \frac{1}{2} f = 0,$$

它可以改写成

$$\frac{d}{d\xi}\left[\frac{df}{d\xi} + \frac{1}{2}\xi f\right] = 0;$$

因此

$$\frac{df}{d\xi} + \frac{1}{2}\xi f = B$$

或

$$\frac{d}{d\xi}\left[e^{\xi^2/4} f\right] = B e^{\xi^2/4},$$

接着就得到带有一对任意常数 A, B 的完全确定的表示式

$$f(\xi) = A e^{-\xi^2/4} + B \int_0^{\xi} e^{-\frac{1}{4}(\xi^2 - \lambda^2)} d\lambda,$$

可直接证实函数

$$z(x,y) = \frac{A}{\sqrt{\alpha y}} \exp\left[-\frac{x^2}{4\alpha y}\right] + \frac{B}{\sqrt{\alpha y}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{\alpha y}}} \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{\alpha y} - \lambda^2\right)\right] d\lambda$$

满足偏微分方程 (5.4). 这里第一项的另一个变形

$$z(x,y)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}A\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha y}}\right),$$

等同于 (5.4) 的一个已知解的导数.

从常微分方程的解得到偏微分方程解的一个系统的方法是要考虑使偏微分方程形式不改变 (或不变量) 的自变量/因变量的特殊变换; 且类似不变量的变量的特殊组合的应用能把该偏微分方程转换成一个常微分方程. 就偏微分方程 (5.4) 而言, 考虑变换

$$x'=\epsilon^{\beta}x \quad y'=\epsilon^{\gamma}y,\ z'=\epsilon^{\delta}z, \tag{5.7}$$

它描述各变量的缩小或伸长; 参数 $\varepsilon(>0)$ 对 (5.7) 的所有关系式是同样的, 而 β,γ,δ 是可自由处置的. 由于

$$\frac{\partial z'}{\partial y'}=\epsilon^{\delta-\gamma}\frac{\partial z}{\partial y}$$

和

$$\frac{\partial z'}{\partial x'}=\epsilon^{\delta-\beta}\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}=\epsilon^{\delta-2\beta}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

得出, 如果

$$2\beta=\gamma, \tag{5.8}$$

有

$$L[z']=\frac{\partial z'}{\partial y'}-\alpha\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}=\epsilon^{\delta-\gamma}\frac{\partial z}{\partial y}-\alpha\epsilon^{\delta-2\beta}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\epsilon^{\delta-\gamma}L[z].$$

所以对联合变换 (5.7) 不论 δ 取何值, 只要 (5.8) 成立, 偏微分方程 (5.4) 就保持不变; 特别地, 选取 $\beta=1,\gamma=2$ 且注意到比

$$\frac{x'}{\sqrt{\alpha y'}}=\frac{\epsilon x}{\sqrt{\alpha\epsilon^2 y}}=\frac{x}{\sqrt{\alpha y}}$$

也是一个不变量. 由显式常微分方程决定的单个自变量 $\xi=\dfrac{x}{\sqrt{\alpha y}}$ 的函数构成该偏微分方程的一个解.

以下考虑变系数偏微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\alpha}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\alpha\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial z}{\partial x}\right],\quad x>0,\alpha>0 \tag{5.9}$$

且注意相互关系

$$L[z']=\frac{\partial z'}{\partial y'}-\left[\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}+\frac{2}{x'}\frac{\partial z'}{\partial x'}\right]=\epsilon^{\delta-\gamma}L[z],$$

只要

$$\delta-\gamma=\delta-2\beta,$$

这要求 $\gamma=\alpha\beta$ 且 δ 为任意的; 变换参数 β,γ,δ 遵从这些规定, 该偏微分方程的不变性就得以实现.

选取这一组三个数

$$\beta=1,\quad \gamma=2,\quad \delta\text{ 任意},$$

从而对应的变换

$$x'=\epsilon x,\quad y'=\epsilon^2 y,\quad z'=\epsilon^\delta z$$

有不同的不变量

$$\frac{x}{\sqrt{\alpha y}},\quad zy^{-\delta/2}.$$

可以假设最后两个量之间是有联系的, 即

$$zy^{-\delta/2}=f\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha y}}\right)\quad\text{或}\quad z=y^{\delta/2}f\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha y}}\right). \tag{5.10}$$

且当 f 满足常微分方程

$$\frac{d^2f}{d\xi^2}+\left[\frac{2}{\xi}+\frac{\xi}{2}\right]\frac{df}{d\xi}-\frac{\delta}{2}f=0,\quad \xi=\frac{x}{\sqrt{\alpha y}} \tag{5.11}$$

时, (5.10) 就有资格成为 (5.9) 的一个解 $z(x,y)$. 在 $\delta=-3$ 的特殊情形, (5.11) 的一个可证实的解

$$f(\xi)=e^{-\xi^2/4}$$

通过 (5.10) 导出偏微分方程 (5.9) 的一个解, 即

$$z(x,y)=\frac{1}{(\alpha y)^{3/2}}\exp\left[-\frac{x^2}{4\alpha y}\right],\quad x,y>0, \tag{5.12}$$

且对 y 的任何值有性质

$$\int_0^\infty x^2 z(x,y)dx=\frac{1}{(\alpha y)^{3/2}}\int_0^\infty \sigma^2 e^{-\sigma^2}d\sigma=2\sqrt{\pi}. \tag{5.13}$$

显式 (5.12) 和性质 (5.13) 揭示了对不同的 y 值作为 $x(0<x<\infty)$ 的函数 $z(x,y)$ 的轮廓线中的相似性; 当 y 小时, 在 $x=0$ 的邻域存在狭窄的轮廓线, 且当 y 增大时轮廓线逐渐变宽, 在 $x=0$ 处达到的极大值有一个下降. 这样的特征正是所谓的偏微分方程相似解的一般特征, 而不变量 $x/\sqrt{\alpha y}$ 称为相似变量.

与量纲、对称性、变换和不变性的密切关系构成寻求非线性偏微分方程相似性解的基础. 以下给出一个例子, 考虑一阶方程

$$\frac{\partial z}{\partial y}+z\frac{\partial z}{\partial x}=0 \tag{5.14}$$

和单参数变换

$$x'=e^{2\epsilon}(x+1)-1,\ y'=e^{\epsilon}(y+1)-1,\ z'=e^{\epsilon}z, \tag{5.15}$$

它由两个不变量

$$\begin{aligned}\xi&=\frac{(y'+1)^2}{x'+1}=\frac{(y+1)^2}{x+1},\\ \psi&=\frac{z'}{y'+1}=\frac{z}{y+1}\end{aligned}$$

刻画.

令

$$\psi=f(\xi) \tag{5.16}$$

或

$$z(x,y)=(y+1)f\left[\frac{(y+1)^2}{x+1}\right]$$

且将后面的式子代入偏微分方程 (5.14) 中, 得到 f 的一个非线性常微分方程, 即

$$f+2\xi\frac{df}{d\xi}-\xi^2f\frac{df}{d\xi}=0. \tag{5.17}$$

引入另一变量, 即

$$\eta=\ln(y+1),$$

且三元组

$$\xi=\xi(y,x),\quad \eta=\eta(y),\quad \psi=\psi(z,y)$$

关于由 (5.15) 定义的变换 $(x,y,z)\to(x',y',z')$ 有特殊地位; 这样

$$\xi'=\xi,\eta'=\eta+\epsilon,\psi'=\psi$$

且只有变量 η 按相加形式改变. 容易得到用变量 $(\xi,\eta,\psi(\xi,\eta))$ 来表示该偏微分方程的对应形式; 由于

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}&=\psi+(y+1)\left[\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right]\\ &=\psi+(y+1)\left[2\frac{y+1}{x+1}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{1}{y+1}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right]=\psi+2\xi\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\end{aligned}$$

和

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(y+1)\left[\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right]=-\frac{(y+1)^3}{(x+1)^2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi},$$

由此得出

$$\frac{\partial z}{\partial y}+z\frac{\partial z}{\partial x}=\psi+2\xi\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}-\xi^2\psi\frac{\partial\psi}{\partial\xi}.$$

所以该偏微分方程受欢迎的变形是

$$2\xi\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}-\xi^2\psi\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\psi=0, \tag{5.18}$$

而且由于 η 不明显地出现, 所以仅依赖于 ξ 的解的存在性变得显然; 记 $\psi=f(\xi)$, 由 (5.18) 导出的 f 的常微分方程与前面给出的 (5.17) 相同.

方程组 (5.15) 定义一个单参数 (ϵ) *变换群*, 其无穷小 ($\epsilon\to 0$) 表示式

$$\begin{aligned}x'&=x+2\epsilon(x+1)+o(\epsilon^2),\\y'&=y+\epsilon(y+1)+o(\epsilon^2),\\z'&=z+\epsilon z+o(\epsilon^2)\end{aligned} \tag{5.19}$$

包含对*恒等变换*的小的校正. 按群论语言, 坐标 ξ,η,ψ 只不过是描述群作用的典范坐标, 即现在情形中的一个平移. 基于给定群的无穷小表示, 为决定典范坐标从而推动构造相似解的明确定义的程序是可用的.

在流体流过平板的经典分析中, 就会产生相似解: 设 z 轴位于平板的前沿而半直线 $x>0, y=0$ 等同于在 (x,y) 平面上平板的迹①. 现在要详细说明具有匀速 U 和在垂直于前沿方向上 (或平行于迹的方向, 见图 13) 出现的定常流如何由于平板的存在而受到影响. 如果流体黏性和平板厚度两者忽略不计, 则在到达流上无效应; 然而, 只要有 (即使稍许的) 黏性就会导致切向流速在固定平板处必须为零 (假定的平板的不可入性, 从而在所有情形都迫使法向速度为零), 因而平板使均匀流动模式发生畸变. 特别地, 流的接近平板的那些部分由前沿通过后经历速度的立即减小, 而这种在所谓的*边界层*内的减速当与前沿的法向距离增加时继续扩展到远离平板的地方. 如图 13 所示, 平行于平板的速度分量的轮廓线, 在任一对下流位置处, 除了沿横截 (或纵轴) 方向相对伸长外是相似的.

如果 u,v 分别表示 x,y 方向的速度分量, 且 ν 是黏性参数, 在现在情况下不可压缩流体的定常态方程组包括

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{5.20}$$

①平板是垂直于 $x-y$ 平面穿过正 x 轴放置的. —— 校注

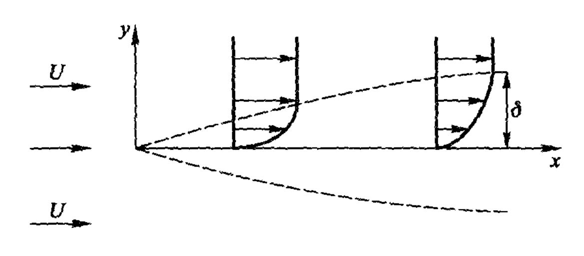


图 13

和

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{5.21}$$

其中第二个方程称为连续性方程, 反映了在非均匀流中局部质量守恒. 考虑到绕过平板时流动模式的明显对称性, 只需考虑 $y>0$ 的区域, 还有对 (5.20),(5.21) 的合适边界条件

$$\begin{aligned} u=v=0,\quad y\to 0+,\quad x>0,\\ u\to U,\quad y\to\infty \end{aligned} \tag{5.22}$$

就足够了.

u 的相似性表达式是

$$\frac{u}{U}=f(\xi),$$

这里

$$\xi=\frac{y}{\delta},$$

且长度 δ 作为 x 的函数是衡量边界层厚度的尺度; 因此这里只需引用一个估计就足够了,

$$\delta\sim\left(\frac{\nu x}{U}\right)^{1/2},$$

然后写出

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

观察到连续性方程 (5.21) 可以满足.

因此

$$\psi=\int_0^y udy=\int_0^\xi Uf(\xi)\delta d\xi=\sqrt{U\nu x}F(\xi),$$

其中

$$f(\xi)=\frac{dF}{d\xi},$$

而

$$\xi=\sqrt{\frac{U}{\nu x}}y.$$

直接微分得出

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{dF}{d\xi}\right)=-\frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{\nu}}\left(\frac{U}{x}\right)^{3}\frac{d^2F}{d\xi^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{dF}{d\xi}\right)=U\sqrt{\frac{U}{\nu x}}\frac{d^2F}{d\xi^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{U^2}{\nu x}\frac{d^3F}{d\xi^3},$$

且

$$v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{U\nu}{x}}F(\xi)+\frac{Uy}{2x}\frac{dF}{d\xi};$$

将最后的表示式代入 (5.20) 后, 获得对 $F(\xi)$ 的常微分方程, 即

$$F\frac{d^2F}{d\xi^2}+2\frac{d^3F}{d\xi^3}=0, \tag{5.23}$$

且由 (5.22) 推出合适的边界条件是

$$F=\frac{dF}{d\xi}=0,\quad \xi=0,$$
$$\frac{dF}{d\xi}=1,\quad \xi\to\infty.$$

F 的这些方程首先由 Blasius 于 1908 年建立, 他接着成功地估计了解的级数形式

$$F(\xi)=c_0\xi^2+c_1\xi^5+\cdots$$

中的系数 c_0; 现在, 数值分析能很轻易地提供很高的精确度.

习 题 5

1. 讨论偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

的变换, 它由自变量变换 $(x,y)\to(\xi,\eta)$,

$$\xi=\frac{x}{y},\quad \eta=\ln y,\quad y>0$$

得出; 且求用相似变量 $\xi=x/y$ 表示的解.

2. 证明偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{i}$$

有形如

$$u(x,y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$$

的解, 且断定这可以用变量 (r,ϑ) 改写 (i) 后简单地找到, 其中 (r,ϑ) 由

$$x=r\cos\vartheta,\quad y=r\sin\vartheta$$

确定. 验证 (i) 有形如

$$u(x,y)=x^{\gamma}f\left(\frac{x}{y}\right)$$

的解, 如果 f 满足常微分方程

$$\xi^2(1+\xi^2)\frac{d^2 f}{d\xi^2}+2\xi(\xi^2+\gamma)\frac{df}{d\xi}+\gamma(\gamma-1)f=0,\quad \xi=\frac{x}{y},$$

在 $\gamma=1$ 的情形, f 和 u 的显式是什么?

3. 考虑变系数偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}\right],\quad t>0,\nu>0 \tag{i}$$

和所有变量的伸缩变换, 即

$$r'=\epsilon^{\alpha}r,\quad t'=\epsilon^{\beta}t,\quad u'=\epsilon^{\gamma}u;$$

证明: 如果

$$\beta=2\alpha,\quad \gamma\ \text{任意},$$

则

$$L[u']=\frac{\partial u'}{\partial t'}-\nu\left[\frac{\partial^2 u'}{\partial r'^2}+\frac{1}{r'}\frac{\partial u'}{\partial r'}-\frac{u'}{r'^2}\right]=\epsilon^{\gamma-\beta}L[u].$$

证明: 指定无量纲量

$$\xi=\frac{r}{\sqrt{\nu t}}$$

作为相似变量是正确的, 且记

$$u=f(\xi),$$

当 f 满足常微分方程

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2}+\left[\frac{1}{\xi}+\frac{1}{2}\xi\right]\frac{df}{d\xi}-\xi^2 f=0 \tag{ii}$$

时, $L[u]=0$.

如果采纳表达式

$$u=\frac{1}{r}F(\xi)$$

作为 (i) 的一个解, 推导出 F 必须满足的常微分方程为

$$\frac{d^2F}{d\xi^2}+\left(\frac{1}{2}\xi-\frac{1}{\xi}\right)\frac{dF}{d\xi}=0, \tag{iii}$$

且注意 (与 (ii) 对照) (iii) 中不包含 F 本身的项. 证明

$$F(\xi)=c_1\exp[-\xi^2/4]+c_2$$

和

$$u(r,t)=\frac{c}{r}\left[1-\exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)\right], \tag{iv}$$

(i) 的解 (iv) 在 $r=0$ 保持有限.

检验

$$\omega=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)$$

满足偏微分方程

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right) \tag{v}$$

且

$$\Omega=\omega t=\Omega(\xi)$$

与 (v) 相容, 只要 Ω 满足常微分方程

$$\frac{d^2\Omega}{d\xi^2}+\left(\frac{1}{\xi}+\frac{\xi}{2}\right)\frac{d\Omega}{d\xi}+\Omega=0. \tag{vi}$$

给定 (vi) 的一个特解

$$\Omega=\exp[-\xi^2/4],$$

说明给定的

$$\omega=\frac{c}{t}\exp\left[-\frac{r^2}{4\nu t}\right]$$

与前面 (iv) 中的 u 是相容的.

按照 (iv), 当 $t\to 0, ru\to c$ (例如说, c 是固定的) 由此 $\dfrac{u\sqrt{\nu t}}{c}$ 是一个无量纲量, 且可以假设

$$\frac{u\sqrt{\nu t}}{c}=\widehat{f}\left(\frac{r}{\sqrt{\nu t}}\right)$$

或

$$u = \frac{c}{\sqrt{\nu t}} \widehat{f}\left(\frac{r}{\sqrt{\nu t}}\right);$$

如果 u 表示偏微分方程 (i) 的一个解, 那么 $\widehat{f}$ 满足什么方程?

4. 证明非线性偏微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial y} + z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \tag{i}$$

有隐式通解

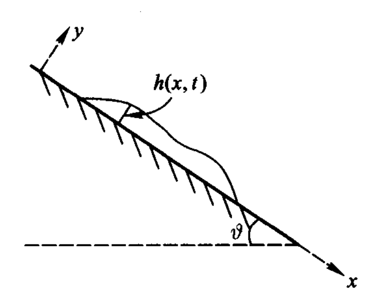
$$z = f(x - zy), \tag{ii}$$

其中 $f(\xi)$ 是单变量 ξ 的任意可微函数. 关于量纲的考虑提示它有一个相似解

$$z = F\left(\frac{x}{y}\right). \tag{iii}$$

显式地描述后者, 且断定当 $f(\xi) = \xi$ 且 $y \gg 1$ 时与从 (ii) 得到的那个解是一致的.

5. 为了分析重力作用下黏性流体薄膜在一斜面下降的运动, 可推导出一个一阶偏微分方程. 设 x 轴沿着一均匀倾斜的方向, y 轴方向为其法向 (如草图所



示), 且当选取二维描述时用 $h(x,t)$ 表示薄膜的厚度. 在薄膜的近似表示中, 使 $\frac{\partial h}{\partial x} \ll 1$, 有关的偏微分方程成为

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{g\sin\vartheta}{\nu}h^2\frac{\partial h}{\partial x} = 0, \tag{i}$$

其中重力常数 g、流体黏性 ν 和斜面倾斜角 ϑ 作为参数. 证明非线性偏微分方程 (i) 有形为

$$h = f\left(x - \frac{g\sin\vartheta}{\nu}h^2 t\right) \tag{ii}$$

的通解. 求满足初始条件

$$h(x,0) = \alpha x, \quad 0 < x < L, \ \alpha > 0 \tag{iii}$$

的特解，且由此导出渐近轮廓曲线，

$$h(x,t) \simeq \left[\frac{\nu}{g\sin\vartheta}\right]^{1/2}\left(\frac{x}{t}\right)^{1/2}, \quad t \to \infty, \tag{iv}$$

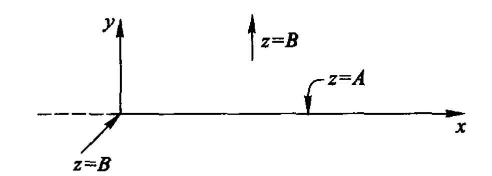
它有相似性形式. 通过直接研究典型相似解

$$h(x,t) = cx^{\beta}t^{\gamma} \tag{v}$$

来证实上面的 (iv) 式.

6. 给定偏微分方程

$$y\frac{\partial z}{\partial x} = \alpha\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \alpha > 0 \tag{i}$$



以及规定条件

$$\begin{aligned} &z = A, \quad y = 0, x > 0, \\ &z = B, \quad y \to \infty, \\ &z = B, \quad x = 0, \end{aligned} \tag{ii}$$

定义函数

$$f = f(\xi) = \frac{z-B}{A-B}, \tag{iii}$$

这里

$$\xi = y\left(\frac{1}{9\alpha x}\right)^{1/3}, \tag{iv}$$

然后证明当 f 满足常微分方程

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + 3\xi^2\frac{df}{d\xi} = 0$$

时 z 满足 (i). 验证表示式

$$f(\xi) = C_1 + C_2\int_0^{\xi}\exp[-\sigma^3]d\sigma$$

且确定 C_1, C_2 的值使得能推出 (i)–(iv) 要求的

$$f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0.$$

7. 考虑偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad x>0,t>0 \tag{i}$$

且在端点 $x=0$ 具有指定的性状，即

$$u(0,t)=U_0[1+\alpha t^\beta],\quad t>0; \tag{ii}$$

验证形如

$$u=U_0[1+\alpha t^\beta f(\xi)] \tag{iii}$$

的相似解满足 (i),(ii)，其中

$$\xi=\frac{x}{2\sqrt{kt}}, \tag{iv}$$

且 f 由常微分方程

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2}+2\xi\frac{df}{d\xi}-4\beta f=0,\quad \xi>0 \tag{v}$$

得到，并假设取规定值

$$f(0)=1.$$

验证在 $\beta=0$ 情形下 (v) 的通解表示是

$$f(\xi)=C_1\text{erf}\xi+C_2,$$

且给出满足要求

$$u(0,t)=U_0(1+\alpha),\quad t>0,$$
$$u(x,t\downarrow 0)=U_0,\quad x>0$$

的特解. 在 $\beta=-1/2$ 和 (v) 的通解表成

$$f(\xi)=C_1e^{-\xi^2}+C_2e^{-\xi^2}\int_0^\xi e^{\lambda^2}d\lambda$$

的情况下对应的 u 的细节是什么?

8. 偏微分方程

$$\frac{\partial W}{\partial t}=k\frac{\partial}{\partial x}\left(W^n\frac{\partial W}{\partial x}\right),\quad t>0,-\infty<x<\infty \tag{i}$$

与分析 (一维，具有单个位置坐标 x 情况下的) 热传导 (假设有一个非线性热流量) 和渗流 (有关气流通过多孔介质) 的某些模型有关. 考虑 (i) 的当 $t=0$ 时除了原点 $x=0$ 的紧接邻域外都为零且服从积分关系式

$$\int_{-\infty}^{\infty}Wdx=Q\quad (Q\text{ 为常数}) \tag{ii}$$

的解. 参照 (i) 可以确认自变量、因变量和一参数的无量纲组合, 即

$$\frac{kt}{x^2}W^n \quad \text{和} \quad \frac{\sqrt{kt}}{x}W^{n/2}; \tag{iii}$$

其次援引 (ii), 证明

$$W\left(\frac{kt}{Q^2}\right)^{\frac{1}{n+2}} \tag{iv}$$

和

$$\xi = x(Q^n kt)^{-\frac{1}{n+2}} \tag{v}$$

是无量纲量. 由 (iii),(iv) 提示, 证明 (i) 有一个形为

$$W = \left(\frac{Q^2}{kt}\right)^{\frac{1}{n+2}} f(\xi), \tag{vi}$$

的解, 其中 f 满足常微分方程

$$(n+2)\frac{d}{d\xi}\left[f^n \frac{df}{d\xi}\right] + \xi\frac{df}{d\xi} + f = 0. \tag{vii}$$

(vii) 的合适解是一个偶函数

$$f(\xi) = f(-\xi),$$

且 $|\xi| \to \infty$ 时其极限值为零; 进一步证明在利用 (v),(vi) 后就可以从 (ii) 得到规范化积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)d\xi = 1. \tag{viii}$$

对 $n = +1, -1$, 检验特解

$$f(\xi) = \begin{cases} (c^2 - \xi^2)/6, & |\xi| < c, \\ 0, & |\xi| > c, \end{cases}$$

$$f(\xi) = \frac{2}{c^2 + \xi^2}, \quad -\infty < \xi < \infty$$

的正确性, 其中 c 表示一个积分常数; 且应用 (viii) 确定 c 的对应值. 值得注意的是: 第一个解 $(n = 1)$ 在无量纲变量 ξ 的一个限定范围内异于零, 同时位置变量 x 的相伴范围当时间变量 t 增加时稳定地加宽, 由 (v) 导出给定的联系

$$x = \text{常数} \cdot t^{1/3}.$$

分别对 $n=\pm 1$ 情况, 导出显式解

$$W(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{Q^2}{kt}\right)^{1/3}\left[\left(\dfrac{9}{2}\right)^{2/3}-x^2(Qkt)^{-2/3}\right], & |x|<(9Qkt/2)^{1/3}\\ 0, & |x|>(9Qkt/2)^{1/3}\end{cases}$$

$$W(x,t)=2Q^2\frac{kt}{(2\pi kt)^2+(Qx)^2},\quad -\infty<x<\infty.$$

注意当 $t\to 0$, 函数 $W(x,t)$ 的剖面曲线相对于 $x=0$ 的位置变得较狭窄, 这正好符合假设的要求; 证实不论 $t(>0)$ 的值如何有积分性质

$$\int_{-\infty}^{\infty}W dx=Q.$$

设 α,β 表示一对常数 $(\beta>0)$, 再证明命题: 如果 $W(x,t)$ 表示偏微分方程 (i) 的一个解, 则

$$(\beta\alpha^{-2})^{-1/n}W(\alpha x,\beta t)$$

也是一个解.

第六章

适定问题

偏微分方程解中任意函数的出现必然产生解的各种差异, 考虑到几乎不知道这些解的详情, 在大多数问题中惯常的目标是找满足合适的和确定的条件 (例如在空间的边界处和某固定时刻) 的那些解. 要求这些条件可以确定唯一的解是自然的要求; 而且还有更进一步的考虑, 即这些条件的大小或量的微小改变在解本身也带来相应地小的改变. 法国数学家 Hadamard (阿达马, 1850—1945) 强调后一方面, 当解不连续地依赖于原始数据变化时, 称此问题是不适定的或提得不正确的.

不适定问题的经典例子涉及两个变量的 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \quad -\infty<x<\infty, y>0, \tag{6.1}$$

沿 x 轴或半平面 $y>0$ 的边界处满足一对边界条件, 即

$$z(x,0)=0, \quad \frac{\partial z(x,0)}{\partial y}=\frac{1}{n}\cos nx, \quad -\infty<x<\infty. \tag{6.2}$$

这里切题的解

$$z(x,y)=\frac{1}{n^2}\sinh ny\cos nx, \tag{6.3}$$

当参数 n 趋于无穷大时其数据, 在 $y=0$ 处 z 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 的指定值趋于零, 而解 $z(x,y)$ 的值却在无限增大的范围内振荡. 该偏微分方程的零解或平凡解确实与

x 轴上 z 与其法向 (或 y 方向) 导数处处取零值一致; 这样一来, (6.3) 的非平凡解对原数据的连续依赖性的要求就不满足了, 因此由 (6.1),(6.2) 规定的问题就是一个提得不正确的问题. 沿 x 轴给一个单独的边界条件且当 $y \to \infty$ 的极限下另加一个条件足以恢复连续依赖性的要求; 如果认为函数 z 表示定常热分布, 上面的论述表明在半平面的边界上温度 (z) 和热流量 $\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ 不能同时指定. 在适定问题中, 已知这两个量之一就可确定另一个.

第二个不适定问题与方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\partial z}{\partial y}, \quad -\infty < x < \infty, y > 0 \tag{6.4}$$

和

$$z(x,0) = 1, \quad -\infty < x < \infty \tag{6.5}$$

有关, 它有非平凡解

$$z(x,y) = 1;$$

满足规定条件

$$z(x,0) = 1 + \frac{1}{n^2}\cos nx, \quad -\infty < x < \infty, \tag{6.6}$$

尽管当 n 取很大时 (6.6) 与 (6.5) 相差微小, 这个解, 即

$$z(x,y) = 1 + \frac{1}{n^2}\cos nx e^{n^2 y}, \tag{6.7}$$

在 $n \to \infty (y > 0)$ 的极限情形下包含一无界因子 $e^{n^2 y}$, 因而不显示对原数据的连续依赖性.

如果偏微分方程 (6.4) 换成一个右边系数有不同符号的方程, 即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}, \tag{6.8}$$

满足前面条件 (6.6) 的解

$$z(x,y) = 1 + \frac{1}{n^2}\cos nx e^{-n^2 y}, \tag{6.9}$$

在 $n \to \infty$ 的极限情形, 对所有 $y > 0$, 一致地趋于值 1, 因而 (6.8),(6.6) 定义了一个适定问题. 以上两问题之间的不同在热传导或热扩散情况下来理解就很清楚, 其中 z 作为温度的度量而 y 作为时间变量; 这两个问题都假定沿 x 轴有个初始的 $(y = 0)$ 温度分布, 而它们的不同之处在于一个 (基于 (6.8)) 能令人满意地预报随后 $(y > 0)$ 的温度, 而另一个 (基于 (6.4)) 与以前的 $(y < 0)$ 温度有关, 这在物理上是不确切的和难以描述的.

解对原始数据的小改变缺乏正则性可能反映用偏微分方程建立模型的实际现象的不稳定性, 因而提示用另一偏微分方程来进一步阐明其潜在原因. 当把解是否有连续依赖性与边值条件式子中的数据、偏微分方程的系数和参数及问题本身的几何方面联系起来时, 会存在与不同学科 (数学、物理学、工程、生物学) 有关的所有各种各样不适定问题就变得很容易理解了. 非线性偏微分方程解的混沌或非正则性态近年来已有丰富的文献记述, 它们突出地展示了与这种方程有关的问题的奥妙之处.

习 题 6

1. 下述问题

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\quad -\infty<x<\infty, y>0,$$

$$z(x,0)=0, \frac{\partial z(x,0)}{\partial y}=\frac{1}{n}\cos nx,\quad -\infty<x<\infty$$

是否适定?

2. 求偏微分方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$

在半无限带形区域

$$0<x<\infty,\quad 0<y<h$$

内满足条件

$$w(0,y)=0,\quad \frac{\partial}{\partial x}w(0,y)=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi y}{h},\quad n=1,2,\cdots,0<y<h$$

和

$$\frac{\partial}{\partial y}w(x,0)=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}w(x,h)=0,\quad x>0$$

的解相对于数据或施加的边界条件解如何变化?

3. 在圆 $r=R$ 的外部区域解偏微分方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}=0,\quad r>R,\ 0\leqslant\vartheta<2\pi,$$

在该圆上给定两个要求

$$\phi(R,\vartheta)=0,\quad 0\leqslant\vartheta<2\pi,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\phi(R,\vartheta)=\frac{1}{n}\cos n\vartheta,\quad n=1,2,\cdots$$

且决定该解是否显示对原数据的连续依赖性. 讨论类似的内部问题, 这里

$$0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \vartheta < 2\pi,$$

边界条件分别是

$$\phi(R, \vartheta) = 0$$

和

$$\frac{\partial}{\partial r}\phi(R, \vartheta) = \frac{1}{n}, \quad 0 \leqslant \vartheta < 2\pi.$$

第七章

一阶线性偏微分方程的一些预备知识

依赖于常微分方程且在两个自变量情形有容易的几何描述的一阶偏微分方程的分析, 是全面和精确的. 而且, 为处理各种线性、拟线性和非线性典型问题, 这种分析提供了清晰的榜样.

在介绍系统的方法之前, 值得指出的是用一阶常微分方程改写线性偏微分方程

$$a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}+c(x,y)z=g(x,y) \tag{7.1}$$

的一种形式方法, 这种方法一定会增加求解的希望; 这样做的方法涉及把一个自变量, 例如说 y 表为另一自变量 x 的函数的一个函数 $z(x,y(x))$ 的导数的表示式

$$\frac{d}{dx}z(x,y(x))=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{dy}{dx}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

关于 (7.1), 如果 y 是由另一个常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b(x,y)}{a(x,y)} \tag{7.2}$$

给出的 x 的函数, 则由 (7.1) 推导出

$$a(x,y)\frac{dz}{dx}+c(x,y)z=g(x,y). \tag{7.3}$$

这样, 偏微分方程 (7.1) 实际上就是沿着从 (7.2) 求得的平面曲线族的一个常微分方程, (7.3) 是确定特征迹线的方程 (回顾 (2.12)), 而特征迹线在证明 (7.1) 的

解的存在性中起决定作用, 援引 (7.2) 和关系式

$$\frac{d}{dx}=\frac{ds}{dx}\frac{d}{ds},$$

这里

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} \quad 和 \quad \frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

使得用沿一条迹线的弧长 s 可将 (7.1) 重写成

$$\sqrt{a^2+b^2}\frac{dz}{ds}+cz=g. \tag{7.4}$$

如果在一条迹线的非奇异点 ($a\neq 0$) 处 z 的值被指定, 则常微分方程 (7.3) 在该迹线的其他处唯一确定了 z; 因此, 设有一条曲线 γ, 过 γ 的每一点有单独一条迹线通过, 沿曲线 γ 指定了 z 的值, 则由那些与 γ 相交的迹线所覆盖的 x,y 平面的整个区域上都可以确定 z (见图 14).

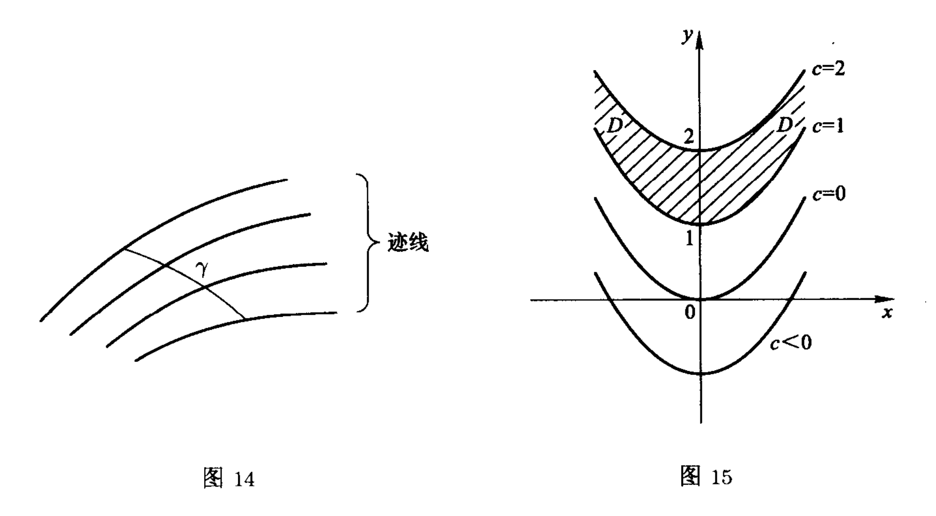


图 14　　图 15

作为例子, 考虑偏微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}+2x\frac{\partial z}{\partial y}=y, \tag{7.5}$$

且带有条件

$$z(0,y)=1+y^2, \quad 1<y<2, \tag{7.6}$$

当迹线已知时, 就在 x,y 平面的一个区域中精确地确定一个解. 迹线方程 (7.2) 有表达式

$$dy/dx=2x,$$

且描出了一族抛物线 (见图 15)

$$y = x^2 + c, \quad -\infty < c < \infty; \tag{7.7}$$

因此在每一条抛物线上 (7.5) 简化成常微分方程

$$dz/dx = y = x^2 + c,$$

且合适的解是

$$z = \frac{1}{3}x^3 + cx + f(c), \tag{7.8}$$

这里 f 表示一个任意函数, 它随不同的迹线而不同.

加条件 (7.6) 以确定 f, 即

$$z(0, y) = f(y) = 1 + y^2, \quad 1 < y < 2,$$

因此该解 (在阴影区域 D 中) 在两抛物线

$$y = x^2 + 1 \quad 和 \quad y = x^2 + 2$$

之间. 参数 c 现在可从关系式 (7.7),(7.8) 消去, 用了刚才找到的 f 的特殊形式后, 满足所有上述要求的特解化成

$$\begin{aligned} z(x, y) &= \frac{1}{3}x^3 + (y - x^2)x + 1 + (y - x^2)^2 \\ &= x^4 - \frac{2}{3}x^3 + xy - 2x^2y + y^2 + 1, \quad (x, y) \in D. \end{aligned} \tag{7.9}$$

如果在 y 轴上关于 z 的信息扩展到 $1 < y < 2$ 这范围之外, 则可以在 x, y 平面上更大的区域中确定该偏微分方程的解.

继续讨论偏微分方程 (7.5), 现在提出要求描述两个解 z_1, z_2 使得

$$z_1(0, y) = y^2, 0 < y < \infty, z_2(x, 0) = x^2, 0 < x < \infty;$$

这样由 (7.7),(7.8) 推出通解为

$$z(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + (y - x^2)x + f(y - x^2). \tag{7.10}$$

当 $f(y) = y^2, y > 0$ 时在 y 轴上取规定值且

$$z_1(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + (y - x^2)x + (y - x^2)^2, y > x^2, 0 < x < \infty.$$

(7.10) 的等价形式

$$z(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + (y - x^2)x + g(x^2 - y)$$

当还未明确给出的函数 g 使得

$$g(x^2) = x^2 + \frac{2}{3}x^3, \quad x > 0$$

时, 满足沿正 x 轴的边界条件, 因此

$$\begin{aligned} z_2(x,y) = &\frac{1}{3}x^3 + (y - x^2)x + (x^2 - y) \\ &+ \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2}, \quad y < x^2, 0 < x < \infty. \end{aligned}$$

(注意: 如果选取通解的原来形式 (7.10), 函数 f 在其自变量的负值上被确定, 这样找到的该偏微分方程最终的解与上述的解是完全一样的.)

z_1 和 z_2 的公共部分, 即 $\frac{1}{3}x^3 + (y - x^2)x$ 满足非齐次偏微分方程 (7.5), 而剩下部分

$$\widehat{z}_1(x,y) = y - x^2$$

和

$$\widehat{z}_2(x,y) = x^2 - y + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2}$$

是对应齐次偏微分方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\widehat{z}_1 \\ \widehat{z}_2\end{pmatrix} = 0$$

的解. z_1 和 z_2 两者在它们各自且互补的区域内, 即在第一象限中抛物线 $y = x^2$ 上面和下面, 是 x, y 的连续函数, 且沿此抛物线它们取同样的值

$$z_1(x, x^2) = \frac{1}{3}x^3 = z_2(x, x^2).$$

另一方面

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} \neq \frac{\partial z_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial y} \neq \frac{\partial z_2}{\partial y} \quad 在 \quad y = x^2,$$

就导出结论: 偏微分方程 (7.5) 的一个连续合成解的一阶偏导数沿特征曲线 $y = x^2$ 产生间断 (不连续性), 间断在其他例子中可能是显然的特征.

特征迹线在将偏微分方程用一个较简单的常微分方程来代替中起着关键作用, 这在自变量变换中也能体会到. 设变换 $(x,y) \to (\xi, \eta)$, 这里

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y);$$

则 (7.1) 中包含的 z 对 x, y 的偏导数的那些项转换成对 ξ, η 的偏导数的项, 即

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = \left(a\frac{\partial \xi}{\partial x} + b\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial \xi} + \left(a\frac{\partial \eta}{\partial x} + b\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial \eta}, \tag{7.11}$$

而且, 如果迹线方程 $dy/dx = b/a$ 的解是一族曲线 $\xi(x,y)=c$, 也就是说

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}dx + \frac{\partial \xi}{\partial y}dy = dx\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) = \frac{dx}{a}\left(a\frac{\partial \xi}{\partial x} + b\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) = 0,$$

包含 $\partial z/\partial \xi$ 的项从 (7.11) 的右端消失, 因此变换后的微分方程本质上是一个常微分方程. 特殊的变换

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = x \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \neq 0\right)$$

将 (7.1) 直接变成 (7.3) 的形式.

习　题　7

1. 依靠特征迹线族, 求偏微分方程

$$(x+2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$$

满足条件

$$z(-1,y) = \sqrt{y},\ y>0$$

的特解. 这个解在什么区域上成立?

2. 给定常系数齐次偏微分方程

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = cz, \tag{*}$$

自变量 (x,y) 用另外的变量 (ξ,η) 代换, 使得

$$\xi = x\cos\vartheta + y\sin\vartheta,$$
$$\eta = -x\sin\vartheta + y\cos\vartheta,$$

且选取参数 ϑ 使之简化所得的偏微分方程. 直接积分所得方程并论证这样从 (*) 推导出的这种解法的一般性. 证明这个解和用特征迹线法找出的解之间的等价性.

3. 讨论偏微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial x} + 2x\frac{\partial z}{\partial y} = y$$

带有不同规定条件

$$z_1(0,y) = y^2, \quad y>0 \quad 和 \quad z_2(x,0) = e^{-x}, \quad x>0$$

的解 z_1 和 z_2 之间的联系. 与本书中所讨论的一对解作对比.

4. 解偏微分方程

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

服从条件

$$z(0,y)=e^{-y},\quad y>0$$

且精确作出解成立的区域. 用由 $x=r\cos\theta$ 和 $y=r\sin\theta$ 定义的极坐标 r,θ 来表示这个解, 且计算当 $r\to 0$ 时 $z(r,\theta)$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ 两者的极限. 评述这些极限对于角变量的变化情况.

第八章

两个自变量的一阶线性偏微分方程

现在有需要来说明求解一阶线性偏微分方程的更具概括性的观点和方法并且提出处理更复杂的 (拟线性、非线性) 方程的类似方法. 开始之前, 回顾一阶常微分方程有关性质是合适的, 常微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{8.1}$$

将平面上每一个点 (x, y) 与有确定斜率的线元联系起来, 而且任一曲线上每一点处的切线与此局部线元有相同的方向, 则该曲线表示一个解.

两个自变量的线性偏微分方程

$$a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = c(x, y) \tag{8.2}$$

的解有特别简单的几何解释, 即函数 $z = z(x, y)$ 使 (8.2) 按 (x, y) 成为恒等式, 且在三维 (x, y, z) 空间描出**曲面**. 首先在任意点 $P(x, y, z)$ 定义一个**线元** PP', 它在三个坐标轴上的投影分别为 $a(x, y), b(x, y), c(x, y)$, 则包含线元 PP' 的直线 L 由方程组

$$\frac{X - x}{a(x, y)} = \frac{Y - y}{b(x, y)} = \frac{Z - z}{c(x, y)} \tag{8.3}$$

确定, 其中 X, Y, Z 是直线上的动坐标 (见图 16). 其次, 注意到给定曲面 $z = z(x, y)$ 在一点 $P(x, y, z)$ 处的**切平面**的方程为

$$Z - z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P (X - x) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P (Y - y), \tag{8.4}$$

这里 X, Y, Z 表示该切平面上的动坐标. 偏微分方程本身只是使 z 关于 x, y 的偏导数联系起来, 并不确定过 P 的一个唯一的平面; 虽然与常微分方程 (8.1) 相联系的解曲线在固定一点 (x, y) 后是唯一确定的, 单个的曲面或偏微分方程 (8.2) 的解不能由选取位于该曲面上的 (x, y, z) 空间中的一个点确定.

图 16

如果方向线元 PP' 位于 P 点的切平面上且同样的坐标出现于 (8.3),(8.4), 消去它们就精确地得到给定的偏微分方程; 或者, 由于该偏微分方程意味着方向场向量 (a, b, c) 与曲面

$$F(x, y, z) = z(x, y) - z = 0$$

的单位法向量

$$\underline{n} = \left(\frac{z_x}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}}, \frac{z_y}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}}, \frac{-1}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} \right)$$

的标量积为零, 由此得出向量 (a, b, c) 与解曲面总相切.

因此, 其切线与该偏微分方程的系数 a, b, c 所确定的向量位于同一方向的那些空间曲线与该微分方程的分析有直接的重大关系, 它们称为该偏微分方程的特征线, 而它们在 x, y 平面上的投影是前面确定和用到的特征迹线. 特征线服从方程组

$$\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{b(x, y)} = \frac{dz}{c(x, y)}, \tag{8.5}$$

或记 dt 为公共比, 即各自耦合的方程组

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y), \quad \frac{dz}{dt} = c(x, y), \tag{8.6}$$

其中 t 表示参变量. 一族特征线生成一个解曲面, 参见图 17, 反之, 每一解曲面或积分曲面由特征线构成或生成; 注意由方程组

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y)$$

在 $t = 0$ 有初始值 x_0, y_0 求解得到的函数$z = z(x(t), y(t))$, 考虑到该偏微分方程有导数

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c(x, y),$$

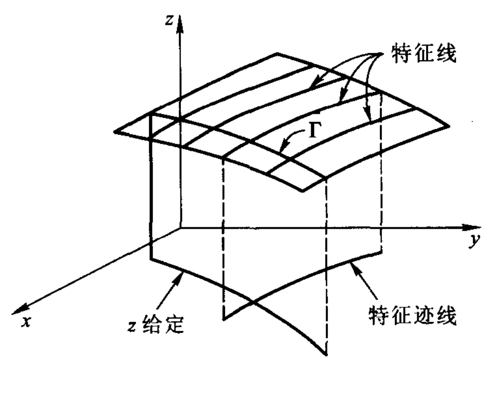


图 17

确实如方程组 (8.6) 的第三个方程所要求的那样. 该偏微分方程的积分能够通过对特征线的常微分方程组 (8.6) 的求解而得到.

现用一个特殊例子来阐明用第七章中描述的方法来得到偏微分方程的解, 这依赖于非参数化的特征迹线, 另外不同地也用包括空间中参数化的特征线来求解, 考虑方程

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=2xy, \tag{8.7}$$

连带条件: 解曲面包含圆周 $x^2+y^2=2, z=1$. 在迹曲线上重写 (8.7) 成常微分方程形式

$$y\frac{dz}{dx}=2xy \quad 或 \quad \frac{dz}{dx}=2x,$$

而迹曲线由另一常微分方程 $dy/dx=x/y$ 给出, 它们属于曲线族

$$y^2-x^2=c, \tag{8.8}$$

积分前面的关于 z 的方程得到

$$z=x^2+f(c),$$

因此

$$z=z(x,y)=x^2+f(y^2-x^2) \tag{8.9}$$

表示 (8.7) 的通解. 由加在解上的条件就可以确定任意函数 f, 即

$$1=x^2+f(2(1-x^2)), \quad 或 \quad f(2(1-x^2))=1-x^2,$$

且由此可知单自变量函数 $f(\xi)$ 是

$$f(\xi)=\frac{1}{2}\xi. \tag{8.10}$$

代入 (8.9) 中, 即得特解

$$z = x^2 + \frac{1}{2}(y^2 - x^2) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \tag{8.11}$$

且可直接验证其正确性.

其次, 对特征曲线的前两个方程即

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x \tag{8.12}$$

构造其线性组合, 发现

$$\frac{d}{dt}(x+y) = x+y, \quad \frac{d}{dt}(x-y) = -(x-y).$$

因此, 如果在 $t=0$ 时 $x = x_0, y = y_0$, 则

$$x + y = (x_0 + y_0)e^t, \quad x - y = (x_0 - y_0)e^{-t}, \tag{8.13}$$

于是特征线方程组 (8.6) 的第三个方程变成

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= 2xy = \frac{1}{2}(x+y)^2 - \frac{1}{2}(x-y)^2 \\ &= \frac{1}{2}(x_0+y_0)^2 e^{2t} - \frac{1}{2}(x_0-y_0)^2 e^{-2t},\end{aligned}$$

积分后得到表示式

$$\begin{aligned}z(t) = {} & \frac{1}{4}(x_0+y_0)^2 e^{2t} + \frac{1}{4}(x_0-y_0)^2 e^{-2t} \\ & + z_0 - \frac{1}{4}(x_0+y_0)^2 - \frac{1}{4}(x_0-y_0)^2,\end{aligned} \tag{8.14}$$

它满足初始条件: $t = 0$ 时 $z = z_0$. 最后的表示式与方程组 (8.13) 相加、减后得到

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2}(x_0+y_0)e^t + \frac{1}{2}(x_0-y_0)e^{-t}, \\ y(t) &= \frac{1}{2}(x_0+y_0)e^t - \frac{1}{2}(x_0-y_0)e^{-t},\end{aligned} \tag{8.15}$$

提供了特征曲线的单参数 (t) 表示.(8.13) 中的关系式相乘后消去 t, 这样就证明了特征迹线方程

$$y^2 - x^2 = y_0^2 - x_0^2 \tag{8.16}$$

与 (8.8) 一致.

借助于 (8.13) 从 (8.14) 消去参数 t, 得到

$$z(x,y) = \frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2 + z_0 - \frac{1}{2}(x_0^2+y_0^2) \tag{8.17}$$
$$= \frac{1}{2}(x^2+y^2) + z_0 - \frac{1}{2}(x_0^2+y_0^2),$$

且可证明这些积分曲面是绕 z 轴的旋转抛物面, 彼此不同的是沿 z 轴的一个平移. 满足 $z_0 = 1, x_0^2 + y_0^2 = 2$ 的点处的特征线位于解曲面要求通过的圆上, 按 (8.17) 此解曲面有方程

$$z(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2),$$

它和 (8.11) 一致.

关系式 (8.16) 和 (8.17) 定义了带两个参数

$$\alpha = y_0^2 - x_0^2$$

和

$$\beta = z_0 - \frac{1}{2}(x_0^2+y_0^2)$$

的特征线族, 如果假设其中一个参数是另一个参数的任意函数, 即

$$\beta = \widehat{f}(\alpha),$$

则把这些代入 (8.17) 后得到的

$$z = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \widehat{f}(y_0^2 - x_0^2) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \widehat{f}(y^2-x^2)$$
$$= x^2 + \frac{1}{2}(y^2-x^2) + \widehat{f}(y^2-x^2)$$
$$= x^2 + f(y^2-x^2)$$

就确定了该偏微分方程的**通解**.

偏微分方程 (8.2) 的基本初值问题是关于包含空间曲线 Γ:

$$x = x_0(s),\ y = y_0(s),\ z = z_0(s)$$

的一个积分曲面或解的存在样式, 这里参数表示式

$$x = x_0(s),\ y = y_0(s)$$

确定一条光滑平面曲线 γ (具有连续可微的 x, y) 且 $z(s)$ 的值即 $z_0(s)$ 也就被确定了 (见图 18). 基于不等式

$$a(x_0(s), y_0(s))\frac{dy_0}{ds} - b(x_0(s), y_0(s))\frac{dx_0}{ds} \neq 0, \tag{8.18}$$

一个确定的回答把曲线 γ 从迹线族中排除且肯定了存在定义在初始曲线的某个邻域内且和规定条件

$$z(x_0(s), y_0(s)) = z_0(s), \quad 在\ \gamma\ 上 \tag{8.19}$$

完全一致的唯一解 $z(x, y)$.

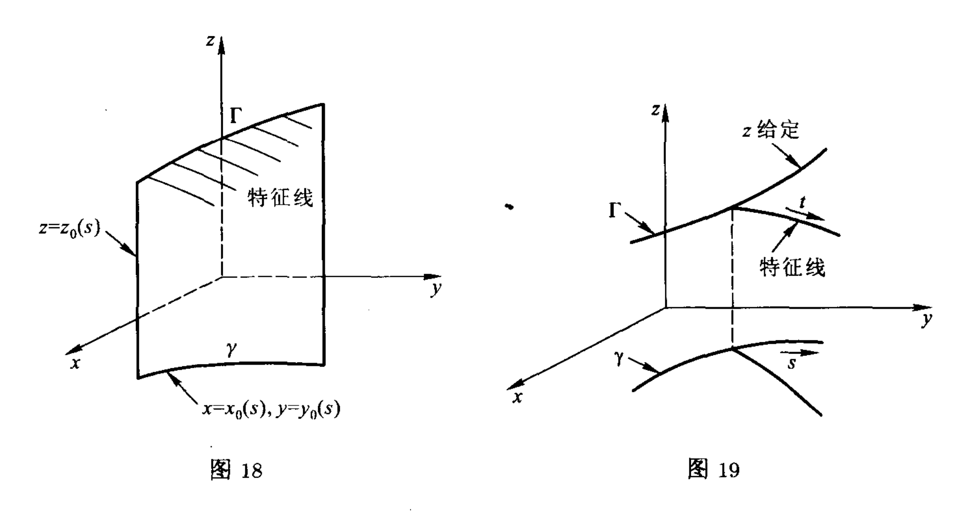


图 18　　图 19

其证明依赖于对常微分方程的一个定理, 此定理保证有唯一的一族特征线或方程组 (8.6) 的解

$$\begin{aligned} x &= x(x_0, y_0, t) = x(s, t), \\ y &= y(x_0, y_0, t) = y(s, t), \\ z &= z(x_0, y_0, t) = z(s, t), \end{aligned} \tag{8.20}$$

满足初始条件

$$x(s, 0) = x_0(s),\ y(s, 0) = y_0(s),\ z(s, 0) = z_0(s),$$

这里参数值 $t = 0$ 对应于一条特征线和包含 z 的给定值的空间曲线 Γ 之间的接触点 (见图 19).

由于 (8.18) 成立, 方程组 (8.20) 的前两个方程用 x, y (邻近前面提到的空间曲线) 来决定参变量 s, t, 而第三个方程提供了所提问题的解

$$z = z(s(x, y), t(x, y)).$$

显然上面的表示式满足在 $t = 0$ 的初始条件 (8.19); 此外, 利用特征方程组和表

示式 $s=s(x,y)$ 及 $t=t(x,y)$ 对 t 微分的结果后,

$$\begin{aligned}
a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y} &= a\left(\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}\right)+b\left(\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}\right)\\
&= \frac{\partial z}{\partial s}\left(a\frac{\partial s}{\partial x}+b\frac{\partial s}{\partial y}\right)+\frac{\partial z}{\partial t}\left(a\frac{\partial t}{\partial x}+b\frac{\partial t}{\partial y}\right)\\
&= \frac{\partial z}{\partial s}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial s}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)+\frac{\partial z}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial t}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\\
&= \frac{\partial z}{\partial s}\frac{d}{dt}s+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{d}{dt}t=\frac{dz}{dt}=c.
\end{aligned}$$

因此, 函数 $z(s(x,y),t(x,y))$ 满足该偏微分方程, 而且是与给定初始条件一致的唯一解; 后一论断的证明依赖于以下事实: 具有一个点在积分曲面上的一条特征曲线完全位于该曲面上. 因此, 与初始曲线相交于某点的第二个解 z^* 的特征曲线必定也位于第一个解 z 的积分曲面上, 也就是说函数 z 和 z^* 是同一个.

为了在特定例子中阐明参变量 s,t 的用处, 再次考虑偏微分方程 (8.7) 和在圆 $x_0^2+y_0^2=2$ 上的条件 $z_0=1$ 以确定一个解. 记

$$x_0=\sqrt{2}\cos\vartheta,\ y_0=\sqrt{2}\sin\vartheta,\ 0\leqslant\vartheta<2\pi, \tag{8.21}$$

这里角坐标 ϑ 是参变量 (以前称为 s), 且注意到由 (8.13) 知 $(x_0+y_0)=\sqrt{2}(\cos\vartheta+\sin\vartheta),(x_0-y_0)=\sqrt{2}(\cos\vartheta-\sin\vartheta)$

$$\begin{aligned}
(x+y)&=\sqrt{2}(\cos\vartheta+\sin\vartheta)e^{t}\\
(x-y)&=\sqrt{2}(\cos\vartheta-\sin\vartheta)e^{-t}
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
(x+y)^2&=2(\cos\vartheta+\sin\vartheta)^2e^{2t},\\
(x-y)^2&=2(\cos\vartheta-\sin\vartheta)^2e^{-2t},
\end{aligned} \tag{8.22}$$

代入 (8.14) 得

$$\begin{aligned}
z=&\frac{1}{4}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x-y)^2+\\
&z_0-\frac{1}{4}(\cos\vartheta+\sin\vartheta)^2-\frac{1}{4}(\cos\vartheta-\sin\vartheta)^2\\
=&\frac{x^2+y^2}{2}+z_0-\frac{2(\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta)}{2},
\end{aligned} \tag{8.23}$$

因为 $x_0^2+y_0^2=2(\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta)$ 时 $z_0=1$, 所以有

$$z=\frac{x^2+y^2}{2} \tag{8.24}$$

与前面的 (8.11) 一致.

一般一阶线性偏微分方程组 (7.1)

$$a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}+c(x,y)z=g(x,y)$$

的特征方程组

$$\frac{dx}{dt}=a(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=b(x,y),\quad \frac{dz}{dt}+c(x,y)z=g(x,y) \tag{8.25}$$

中只有第三个方程不同于以前的形式 (适用于该偏微分方程中 z 项的系数为零的情况). 初始值规定在 (x,y,z) 空间中不同于满足上述方程组的曲线的任意曲线上, 而参变量 s,t 继续起有用的作用. 有关这种情形的某些详细演算是值得做的; 例如考虑方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+z=1, \tag{8.26}$$

且首先规定

$$z_0=\sin^2 s \text{ 在直线 } x_0=s, y_0=\lambda x_0=\lambda s,\quad -\infty<s<\infty \text{ 上.} \tag{8.27}$$

方程组 (8.25) 的积分是

$$\begin{aligned}
x&=t+x_0=t+s,\\
y&=t+y_0=t+\lambda s,\\
z&=1+(z_0-1)e^{-t}=1-\cos^2 se^{-t},
\end{aligned} \tag{8.28}$$

且特征迹线是一族斜率为 1 的直线, 即

$$y-x=y_0-x_0=(\lambda-1)s.$$

接着确定

$$s=\frac{y-x}{\lambda-1} \tag{8.29}$$

和

$$t=x-\frac{y-x}{\lambda-1}=\frac{\lambda x-y}{\lambda-1},\quad \lambda\neq 1, \tag{8.30}$$

这里被排除的值 $\lambda=1$ 明显地从迹线族的成员中去掉了在其上给定数据的那条直线. 因此方程组 (8.28) 的最后一个式子和 (8.29) 一起, 推导出

$$z=1-\cos^2\left(\frac{x-y}{1-\lambda}\right)\exp\left(-\frac{y-x\lambda}{1-\lambda}\right), \tag{8.31}$$

这是 x, y 平面上问题 (8.26) 的解. 使得 (8.31) 和该偏微分方程的通解

$$z = 1 + f(x-y)e^{-x}$$

一致是容易的, 只要注意到

$$\frac{y-x\lambda}{1-\lambda} = \frac{y-x+x(1-\lambda)}{1-\lambda} = \frac{x-y}{\lambda-1} + x,$$

因而

$$\exp\left(-\frac{y-x\lambda}{1-\lambda}\right) = e^{-x}\cdot F(x-y).$$

可以找到偏微分方程 (8.26) 的另一个解, 沿单位圆 $x_0^2+y_0^2=1$ 这个解满足对 z 规定的变化, 即

$$z_0 = \sin\vartheta \quad (x_0 = \cos\vartheta, y_0 = \sin\vartheta, 0 \leqslant \vartheta < 2\pi) \tag{8.32}$$

且 ϑ 是与初始曲线有关的参变量 (见图 20).

特征方程组

$$x = t + \cos\vartheta, \quad y = t + \sin\vartheta \tag{8.33}$$

推出

$$x - y = \cos\vartheta - \sin\vartheta = 2\cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{4}\right),$$

因而

$$\vartheta = -\frac{\pi}{4} + \cos^{-1}\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right). \tag{8.34}$$

图 20

由于

$$\cos\vartheta = \frac{x-y}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\cos^{-1}\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x-y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2-(x-y)^2},$$

与 (8.34) 成对的方程取形式

$$t = \frac{x+y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2-(x-y)^2}. \tag{8.35}$$

由于

$$\sin\vartheta = -\frac{x-y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2-(x-y)^2},$$

该问题所要求的解是

$$\begin{aligned} z &= 1 - (1-\sin\vartheta)e^{-t} \\ &= 1 - \left[1 + \frac{x+y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2-(x-y)^2}\right] e^{-\frac{x+y}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2-(x-y)^2}} \end{aligned} \tag{8.36}$$

且适用于区域 $|y-x|<\sqrt{2}$ 内, 以迹线 $y-x=\mp\sqrt{2}$ 为边界. 可注意到 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 两者在点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 无界, 在这两点解的限定圆的切线与局部特征迹线是平行的. 当这两个导数相加时, 奇性正好抵消, 因而在这两点处事实上满足该偏微分方程.

对于把有关的解和其他的解流形区别开来的给定数据的空间曲线或支集作几个注解是合宜的. 设自变量 x,y 分别表示位置坐标和时间, 而因变量或函数 $z(x,y)$ 是某物理量的密度或浓度. 则空间曲线 $x=0,y=s,z=f(s)$ 显示在一固定点 $(x=0)$ 浓度随时间变化的信息. 由 $x=s,y=0,z=f(s)$ 参数地定义的另一曲线把初始的浓度分布与固定点 $x=0$ 的距离关联起来.

总而言之, 线性偏微分方程

$$a(x,y)z_x+b(x,y)z_y=c(x,y)$$

的积分问题 (其目的在于确定积分曲面) 和特征曲线方程组

$$\frac{dx}{dt}=a(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=b(x,y),\quad \frac{dz}{dt}=c(x,y) \tag{8.37}$$

的积分问题是等价的: 即特征曲线的每一个单参数族生成偏微分方程的一个积分曲面; 反之, 每一个积分曲面是由特征曲线的一个单参数族张成的. 由于常微分方程组 (8.37) 把 t 换成 $t+$ 常数后保持不变, 三个相伴的积分常数中的一个在解中的作用是不重要的 (或只是附加的). 该方程组中前两个方程可分开求解且它们决定一个单参数平面曲线族, 即特征迹线族 $\xi(x,y)=c_1$, 它们不依赖于该偏微分方程的解 z; 那些在 x,y 平面上投影成迹线的曲线构成对应的空间特征线族. 特别地, 对齐次偏微分方程

$$az_x+bz_y=0$$

空间特征曲线族是由迹线沿 z 方向平行移动得到的, 且该偏微分方程的通解由三个关系式

$$\xi(x,y)=c_1, \tag{8.38}$$

$$z=c_2$$

和

$$c_2=f(c_1)$$

组成. c_1 和 c_2 之间的联系可以是一个隐函数, 即 $f(c_1,c_2)=0$, 或用参数式表示

$$c_1=c_1(t),\quad c_2=c_2(t).$$

消去参数 c_1, c_2 后, 该通解具有形式

$$z = f(\xi(x, y))$$

或

$$F(\xi(x, y), z) = 0.$$

如果要求确定通过一给定空间曲线 $x = x_0(s), y = y_0(s), z = z_0(s)$ 的积分曲面, 关系式

$$\xi(x_0(s), y_0(s)) = c_1, \quad z_0(s) = c_2$$

用 s 来确定 c_1 和 c_2, 然后一对关系式

$$\xi(x, y) = c_1(s), \quad z = c_2(s)$$

一旦消去 s 后就产生该偏微分方程受欢迎的解

$$\Phi(x, y, z) = 0.$$

对偏微分方程

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

特殊表示式

$$\xi(x, y) = x^2 + y^2$$

是合适的, 为了找包含直线

$$x_0 = s, \ y_0 = s, \ z_0 = s$$

的解. 即绕 z 轴的旋转积分曲面, 有关的关系式是

$$2s^2 = c_1, \quad s = c_2,$$

连同

$$x^2 + y^2 = 2s^2, \quad z = s$$

一起就得到锥面形式的解

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

习 题 8

1. 求偏微分方程

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+y^2$$

的通解, 随后验证这个解.

2. 求描述锥面的偏微分方程

$$(x-\alpha)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-\beta)\frac{\partial z}{\partial y}=z-\lambda$$

的通解.

3. 求满足偏微分方程

$$(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=xz$$

且通过曲线

$$x=\alpha^{\beta},\quad y^2+z^2=\alpha^2$$

的曲面.

4. 解偏微分方程

$$(y+x)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-x)\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

5. 用偏微分方程

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=2xy$$

的通解去确定满足条件

$$z=y \text{ 在圆 } x^2+y^2=1 \text{ 上}$$

的特解, 并和包含运用参变量的本书中分析作比较.

6. 由方程

$$F(x,y,z)=0,$$

给出的曲面的法向量的分量与

$$\frac{\partial F}{\partial x},\quad \frac{\partial F}{\partial y},\quad \frac{\partial F}{\partial z}$$

成比例; 因此由方程

$$G(x,y,z)=f(x,y)-z=0$$

描述的另一曲面, 其法线方向与具有分量

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad -1$$

的向量相同, 如果

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial z}=0,$$

则正交于第一个曲面. 因此求与给定的一族曲面 $F(x,y,z)=c$ 的成员成正交形式的一族曲面中的那些曲面 $z=f(x,y)$ 的问题要求解一阶偏微分方程

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial z}=0.$$

找出通过直线 $y=x, z=a$ 且与球面 $x^2+y^2+z^2=bx$ 正交的那些曲面.

第九章

一阶非线性偏微分方程

考虑到处理两自变量一阶线性偏微分方程的包括特征 (空间和平面的) 曲线法在内的分析和几何方法的有效结合, 这就暗示了处理非线性偏微分方程的类似的方法. 回忆以往对常微分方程的经验, 非线性是通过解的奇点展示出来的, 奇点的位置受初始条件改变的影响, 奇点的存在性从方程本身看不是明显的, 非线性偏微分方程解的类似性状是可以预见到的. 仅仅数据*形式*的改变 (例如从增函数改为减函数) 就可导致由相交特征迹线或其中没有迹线出现的平面区域作为特征的非线性方程的解的很不同的性状. 现有的关于非线性偏微分方程的文献极多, 这里只试图作一个适度的概述.

为了领会与偏微分方程的非线性相联系的一些新的特点, 一个可用物理名词解释的用作模型的问题证明是有启发性的. 因此考虑沿一条道路的直线段上无超车的单向车流, 且假设取代个别车辆的离散集合, 车流可用连续分布来模拟. 设 $\rho(x,t)$ 表示在位置 x 和时刻 t 时道路上每单位长度中的车数, 且 $v(x,t)$ 表示一辆车的局部速度; 则*流量*, 即单位时间内通过一固定点的车辆数等于 $j(x,t)=\rho v$. 在时间 dt 内进入或离开 $(x,x+dx)$ 段的流量之差显然必须等于在段内车数的改变量, 即

$$j(x,t)dt-j(x+dx,t)=\frac{\partial\rho}{\partial t}dx\ dt$$

或当 $dx\to 0$ 时的极限情况

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial j}{\partial x}=0. \tag{9.1}$$

如果每个驾驶员按照附近的车流密度改变其速度, 则

$$v = v(\rho)$$

且

$$j = \rho v = J(\rho). \tag{9.2}$$

从 (9.1),(9.2) 消去 j, 所得偏微分方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + J'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad J'(\rho) = \frac{dJ}{d\rho} \tag{9.3}$$

是拟线性的. 常系数线性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

有通解

$$\rho = f(x - ct).$$

按照这个解, 当时间 t 推进时, 量 ρ 沿 x 轴正向以速度 c 传播; 而且这表示最简单的具有不变波形的单向波运动 (见图 21). 相反地, 非线性方程 (9.3), 其中 $J'(\rho)$ 起着变速作用, 容许有十分不同的传播特性.

在车流方面, 当 $v = 0$ 且车辆是停滞不动的 (具有停滞密度 ρ^*) 或者 $\rho = 0$ 时, $J = 0$; 而且在 $0 \leqslant \rho \leqslant \rho^*$ 范围内满足 $d^2J/d\rho^2 < 0$ 的函数 $J(\rho)$ 图形 (见图 22) 有适当的限定值, 尽管对小的 ρ 值它不是一个准确表示. 对 $J(\rho)$ 表明的变化遵循一个速度对密度的形如

$$v = c\left(1 - \frac{\rho}{\rho^*}\right)$$

的关系式, 其中常数 c 有速度的量纲.

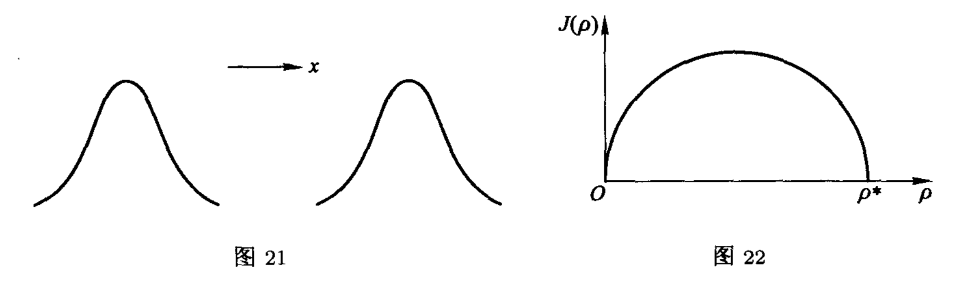


图 21　　　图 22

考虑偏微分方程 (9.3) 的一个特殊形式

$$\frac{\partial z}{\partial y} + z\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \tag{9.4}$$

这里变量 x, y 的选取意在要减少任何与车流问题的直接联系; 追随对类似线性偏微分方程所用的方法, 引入特征方程组

$$\frac{dx}{dt} = z, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{dz}{dt} = 0, \tag{9.5}$$

此外假设当

$$y_0 = 0$$

和

$$x_0 = s$$

时满足初始条件

$$z_0 = f(s), \quad -\infty < s < \infty. \tag{9.6}$$

方程组 (9.5) 的第三个方程蕴涵 z 沿特征线是常数, 连同由初始条件 (9.6) 得到的加在后者上的各个规定, 即

$$z(t, s) = f(s); \tag{9.7}$$

且 (9.5) 的其他方程蕴含

$$x(t, s) = tf(s) + x_0 = tf(s) + s, \tag{9.8}$$
$$y(t, s) = t.$$

从特征迹线方程组消去参数后, 其结果

$$x = yf(s) + s \tag{9.9}$$

或

$$y = \frac{x - s}{f(s)}$$

描述一族变斜率直线; 因此, 这族迹线不是像线性偏微分方程那样, 仅仅由偏微分方程中的系数函数决定, 迹线的图式是受选取特解的初始条件直接影响的. 按照 (9.9), 斜率与 $f(s)$ 成反比, 且如果 $f(s)$ 是 s 的减函数, 斜率随 s 而增加, 这标志着相交迹线的出现; 由于 z 在不同的迹线上取不同值, 这个特点破坏了单值解的假设前提, 即 z 不定义在整个范围 $y > 0$ 中.

例如, 选取连续分布 (见图 23)

$$f(s) = \begin{cases} 1, & s \leqslant 0, \\ 1 - s, & 0 \leqslant s \leqslant 1, \\ 0, & s \geqslant 1. \end{cases} \tag{9.10}$$

它的曲线图形有不变的和线性变化的部分; 这里表示式

$$x(t,s)=\begin{cases}t+s,\\(1-s)t+s,\\s,\end{cases}\qquad z(s)=\begin{cases}1, & s\leqslant 0,\\1-s, & 0\leqslant s\leqslant 1,\\0, & s\geqslant 1\end{cases}\tag{9.11}$$

覆盖了各区间. 从负 x 轴上的点引出的特征迹线都有斜率 1, 从 $x>1$ 上的点发出的迹线有无穷的斜率, 而那些在区间 $0<x<1$ 上开始的迹线有斜率 $1/(1-s)$, 在值 $1(s=0)$ 和 $\infty(s=1)$ 之间变化 (见图 24). 变斜率迹线的方程

$$x=(1-s)y+s,\quad 0\leqslant s\leqslant 1\tag{9.12}$$

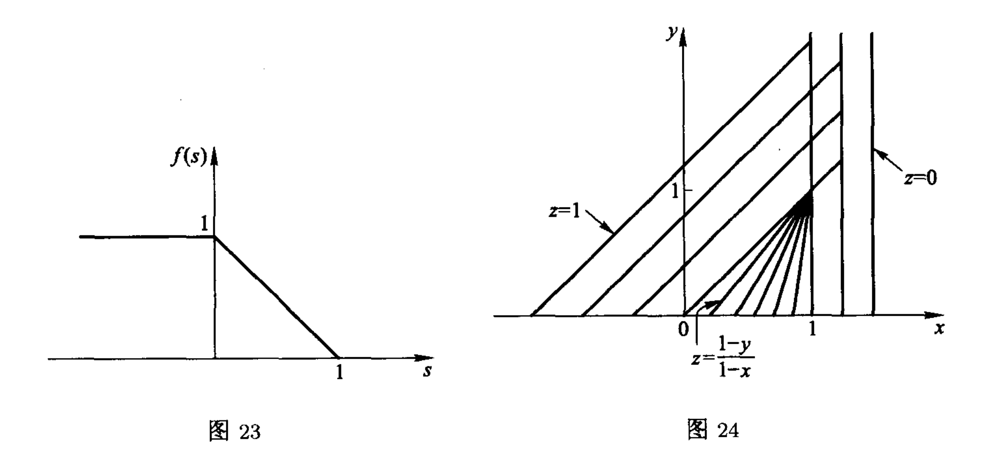


图 23　　图 24

清楚地表明所有迹线有一个公共点, 即 $x=y=1$; 且当由 (9.12) 推演出的表达式

$$s=\frac{x-y}{1-y}\tag{9.13}$$

代入 (9.11) 中时, 得到

$$z(x,y)=\frac{1-x}{1-y},\quad 0<x<1.\tag{9.14}$$

上面确定的 z 的显式表示, 容易验证 z 在区域 $0<x,y<1$ 内满足偏微分方程 (9.4); 然而在 $y=1$ 存在奇点这一事实表明这个解在 $y>0$ 范围内的成立是受到限制的. 此外, 由于从点 $x=s<0$ 出发的迹线与那些出自 $s>1$ 出发的迹线相交, 在区域 $x\geqslant 1, y\geqslant 1$ 上没有单值函数 z. 因此解 (9.14) 适用于三角形区域 $y<x, x>0, y<1$.

在 $y>0$ 内该偏微分方程的解对其沿直线 $y=0$ 的指定方式的敏感依赖性通过用另一个 $f(s)$ 而变得明显, 即用

$$f(s)=\begin{cases}1, & s\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{1+s}, & s\geqslant 0\end{cases} \tag{9.15}$$

替代 (9.10) 中的函数, 这个函数显示出当变量 s 增加时的单调递增性状, 因而推断出跟它有紧密联系的迹线族有递减斜率. 表达式

$$s=\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}\sqrt{(1+x)^2-4y}$$

和

$$z=\frac{1}{1+s},\quad s>0$$

一起定义一个解

$$z(x,y)=\frac{1}{2y}\left\{1+x-\sqrt{(1+x)^2-4y}\right\},\quad x>0,y>0, \tag{9.16}$$

它在

$$y>\frac{1}{4}(x+1)^2 \tag{9.17}$$

时由于其中根式取虚数值显然失去意义. 对一个其他方面正常且可核实的解的正确性的这种破坏从性质上讲不同于 (9.14) 中的解, 于是需要一种解释. 这样, 如果迹线方程 (9.9) 改写成形式

$$\Phi(x,y,s)=x-yf(s)-s=0,$$

求该迹线族的包络的条件, 即

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s}=-(yf'(s)+1)=0$$

蕴含着

$$y=-\frac{1}{f'(s)}, \tag{9.18}$$

且当 $y>0$ 时有不等式 $f'(s)<0$. 由 (9.15) 知 $s>0$ 时 f 的导数等于 $-1/(1+s)^2$, 在代入 (9.18) 后即得到 $(1+s)^2=y$ 或

$$s=-1+\sqrt{y},\quad y>1.$$

用后者的关系式从方程 (9.9) 消去 s, 给出

$$y=(x+1-\sqrt{y})\sqrt{y}$$

或

$$2\sqrt{y} = x + 1,$$

即

$$y = \frac{1}{4}(x+1)^2,$$

回顾 (9.17), 它把解 (9.16) 限制到 x, y 平面的第一象限中位于迹线的抛物包络线以下的区域.

另一方面, 如果 $f(s)$ 是 s 的连续增函数, 例如

$$f(s) = \begin{cases} 0, & s \leqslant 0, \\ s, & s \geqslant 0, \end{cases}$$

则对应的迹线 (见图 25) 在 $y > 0$ 内无交点, 且在半平面 $y > 0$ 上得到一个一致有效的解, 即

$$z(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{x}{1+y}, & x > 0. \end{cases}$$

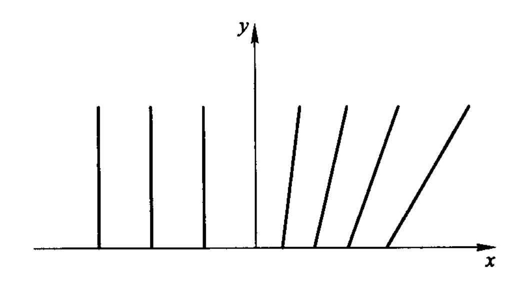


图 25

最后, 假设在初始条件中出现一个不连续地变化的函数, 如

$$f(s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ 1, & s > 0, \end{cases}$$

通常称为 Heaviside 单位阶跃函数 $H(s)$. 现在对 $x < 0$, 迹线是垂直线, 其上 $z = 0$; 而对 $x > y > 0$, 迹线是斜率为 1 的直线, 其上 $z = 1$; 剩下一个角扇形 $x/y < 1, x, y > 0$ 上无迹线 (见图 26). 事实上, 在该扇形内有可能把 z 解析地表示出来从而在整个半平面 $y > 0$ 得到一个连续解. 因为函数

$$z = \frac{x}{y}$$

在过原点的扇形直线族中的每一条直线上保持为常数

$$\frac{x}{y} = \lambda, \quad 0 < \lambda < 1$$

并满足该偏微分方程, 且分别地在迹线 $x = 0$ 和 $x = y$ 上取值 0,1, 这样与 $x < 0, x > 0$ 内其他地方的解光滑地连接起来.

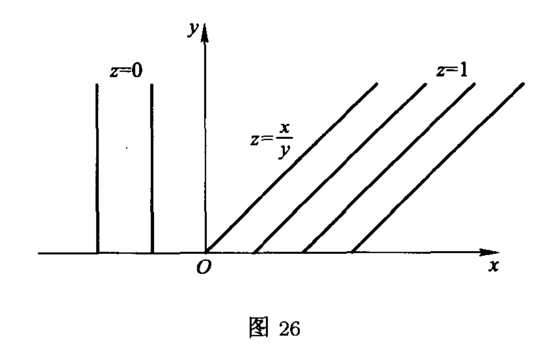


图 26

类似的分析适用于拟线性偏微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial y} + g(z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \tag{9.19}$$

它的变系数函数推广了在 (9.4) 中出现的线性系数函数 z. 如果前面的初始条件 (9.6) 仍保持, 特征方程组

$$\frac{dx}{dt} = g(z), \ \frac{dy}{dt} = 1, \ \frac{dz}{dt} = 0 \tag{9.20}$$

导出表示式

$$z(t,s) = f(s), \quad y(t,s) = t \tag{9.21}$$

和

$$\begin{aligned} x &= g(f(s))t + x_0 \\ &= h(s)t + s, \end{aligned}$$

这里

$$h(s) = g(f(s)) \tag{9.22}$$

是一个复合函数. 因此该问题的解用一对方程表成参数形式

$$\begin{aligned} x &= yh(s) + s, \\ z &= f(s); \end{aligned} \tag{9.23}$$

为了鉴别这些是与该偏微分方程相容的, 注意分别对 x 和 y 微分的结果

$$1 = [1 + yh'(s)]\frac{\partial s}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = f'(s)\frac{\partial s}{\partial x}$$

和

$$0 = h(s) + [1 + yh'(s)]\frac{\partial s}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(s)\frac{\partial s}{\partial y},$$

由此得到表示式

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f'(s)}{1 + yh'(s)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{h(s)f'(s)}{1 + yh'(s)},$$

结合 $z = f(s)$ 和定义 (9.22), 上面两个表示式确实与该偏微分方程相容. 因此, 只要分母

$$1 + yh'(s) = 1 + th'(s) \neq 0,$$

解就存在, 这要求与迹线包络条件 (9.18) 相比较. 上面的不等式可另解释如下: 原自变量和参变量之间的变换 $(x, y) \to (s, t)$ 的 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s} = 1 + th'(s)$$

当

$$1 + th'(s) = 0$$

时为零, 因此不再能得到局部单值性条件.

偏微分方程 (9.19) 和以前的与车流有关的方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + J'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad t > 0$$

有共同的形式, 因此有同样性质; 由于系数函数 $J'(\rho)$ 在整个密度的范围 $0 < \rho < \rho^*$ 内单调递减, 可能从初始的光滑密度曲线经过一段时间后发展出一种不连续性. 当自由运动的车流突然到达道路的停滞或阻塞的一段时, 车密度和速度的突然改变是常见事件. 拟线性偏微分方程解的非均匀性态曾促进了弱解的研究 (弱解满足的是积分关系而不是微分关系) 以及从试图得到解的满意的整体描述的观点出发对 (发生不连续变化处的) 激波特征的详尽阐述. (就像 Lax 的评述: “在连续解不存在的地方会发生什么呢? 毕竟世界还没有走到末日. 为求得答案, 我们转向不可压缩流体的实验; 这些实验清楚地表明了解中不连续性的出现”.)

为简单起见, 考虑拟线性偏微分方程

$$a(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = c(x, y, z), \tag{9.24}$$

且假设通过给定的空间曲线

$$x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad z = z_0(s)$$

的积分曲面 $z = z(x, y)$. 沿这条曲线, 关系式

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx_0}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy_0}{ds} \tag{9.25}$$

成立; 从联系 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 两者的两个线性关系式 (9.24),(9.25) 可唯一确定这两者, 只要

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \frac{dx_0}{ds} & \frac{dy_0}{ds} \end{vmatrix} \neq 0.$$

如果在某些点

$$\frac{dx}{a(x,y,z)} = \frac{dy}{b(x,y,z)} = ds,$$

$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 的对应值不能唯一确定, 而扩充了的方程组

$$\frac{dx}{a(x,y,z)} = \frac{dy}{b(x,y,z)} = \frac{dz}{c(x,y,z)} = ds \tag{9.26}$$

组成了偏微分方程 (9.24) 的特征曲线的方程组.

对应的线性偏微分方程的主要特点, 即变换

$$x, y, z \to x, y, z + \Delta z$$

将一条特征线的一个点变成另一特征线上的一点, 与此相对照, 拟线性方程的特征线之间没有任何简单的内在关系, 且一般地, 特征迹线不属于一个平面曲线的单参数族. 尽管细节上失去了简单性, 方程组 (9.26) 在拟线性偏微分方程的分析中仍有重要作用. 人们试图借助于乘子法来积分该方程, 即一组 (最初是) 任意函数 $\mu(x,y,z), \nu(x,y,z), \sigma(x,y,z)$ 的集合, 特别是, 就包含微分的方程

$$\mu dx + \nu dy + \sigma dz = (\mu a + \nu b + \sigma c)ds \tag{9.27}$$

而言, 目的就在于选取 μ, ν, σ 使 $\mu a + \nu b + \sigma c$ 为零, 因此可以将 $\mu dx + \nu dy + \sigma dz$ 写成一个全微分; 或将 $\mu dx + \nu dy + \sigma dz$ 表示为 (除一个常数乘子外) $\mu a + \nu b + \sigma c$ 的微分. 当然这种策略一般不一定会成功.

作为例子, 考虑偏微分方程

$$(y - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial z}{\partial y} = x - y, \tag{9.28}$$

其特征方程组是

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y} = ds;$$

取 $\mu=\nu=\sigma=1$ 且 (9.27) 变成

$$dx+dy+dz=(y-z+z-x+x-y)ds=0.$$

所以这方程组的第一个积分是

$$x+y+z=\alpha.$$

其次选取 $\mu=x,\nu=y,\sigma=z$ 且

$$xdx+ydy+zdz=\{x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)\}ds=0,$$

所以第二个积分有形式

$$x^2+y^2+z^2=\beta.$$

一般地, 描述特征曲线族的方程组的完全解决给出一对包含两个常数 α,β 的关系式, 例如说

$$F(x,y,z,\alpha)=0,\quad G(x,y,z,\beta)=0,$$

且原偏微分方程的一族积分曲面是通过它们之间的一个关系式, 例如说

$$H(\alpha,\beta)=0,$$

然后从所有三个式子中消去 α,β 而确定. 因此偏微分方程 (9.28) 的通解具有带有两个自变量的任意函数 $H(\xi,\eta)$ 的隐式表示

$$H(x+y+z,x^2+y^2+z^2)=0,\tag{9.29}$$

或另一种形式

$$z+x+y=f(x^2+y^2+z^2),\tag{9.30}$$

这里 $f(\xi)$ 表示一个单变量的任意函数; (9.30) 是解的直接证明如下: 将 (9.30) 分别对 x 和 y 微分, 得到一对方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}+1=2f'\cdot\left(x+z\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}+1=2f'\cdot\left(y+z\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

从这一对方程中消去 f', 其结果即是偏微分方程 (9.28).

满足偏微分方程 (9.24) 的积分曲面的每一点处的切平面包含有分量为 (a,b,c) 的局部特征向量. 如果这个曲面表为关于变量 x,y,z 对称的函数, 即

$$\phi(x,y,z)=0$$

而不是以前采用的形式 $z=f(x,y)$, 则上述的几何性质要求 ϕ 满足带有三个自变量的齐次偏微分方程

$$a\frac{\partial\phi}{\partial x}+b\frac{\partial\phi}{\partial y}+c\frac{\partial\phi}{\partial z}=0. \tag{9.31}$$

后一方程的特征线用方程组

$$\frac{dx}{a(x,y,z)}=\frac{dy}{b(x,y,z)}=\frac{dz}{c(x,y,z)}=dt$$

描述, 它与原偏微分方程的特征线完全一样; 实际上, 该方程组的积分是其值沿特征线不变的函数 $\phi(x,y,z)$, 这就是说

$$d\phi=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial z}dz\right)=\left(a\frac{\partial\phi}{\partial x}+b\frac{\partial\phi}{\partial y}+c\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)dt=0,$$

重现了 ϕ 的方程 (9.31). 因此, 如果 $\phi(x,y,z)$ 满足 (9.31), 则关系式

$$\phi(x,y,z)=C,\quad C\ \text{是一个任意常数}$$

用隐式定义了 (9.24) 的一个解, 设

$$\phi_1(x,y,z)=\alpha,\quad \phi_2(x,y,z)=\beta$$

表示 (9.31) 的一对无关解. 则

$$H(\phi_1,\phi_2)=0$$

表示 (9.24) 的通解.

(线性) 偏微分方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+y^2 \tag{9.32}$$

提供了一个简单例子, 其特征方程组

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{x^2+y^2}=dt \tag{9.33}$$

有首次从只与 x,y 有关的方程得到的积分

$$\phi_1(x,y)=\frac{y}{x}=\alpha \tag{9.34}$$

有关首个积分的知识 (这里和其他例子中一样) 可使方程组降阶, 特别是蕴涵着

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{x^2(1+\alpha^2)},$$

因此, 由 (9.34)

$$z=(1+\alpha^2)\frac{x^2}{2}+\beta=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\beta \tag{9.35}$$

表示该方程组的第二个积分. 如果 (9.33) 的积分是用乘子法达到的. 明显的选择是 $\mu=-x,\nu=-y,\sigma=1$ 且这些选取保证了关系式 $\mu x+\nu y+\sigma(x^2+y^2)=0$, 导致

$$-xdx-ydy+dz=d\left(z-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)=0,$$

或上面的积分 (9.35). 其次从 (9.33) 得出

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{2z-\beta},$$

所以

$$\frac{1}{x}\sqrt{2z-\beta}=\frac{1}{x}\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+\alpha^2},$$

因而

$$\frac{y}{x}=\alpha,$$

重新产生前面的积分 (9.34) 的形式.

相应地, (9.32) 的通解由

$$H\left(\frac{y}{x},z-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)=0$$

或

$$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+f\left(\frac{y}{x}\right)$$

给出.

习　题　9

1. 求偏微分方程

$$xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}=x$$

的通解, 然后直接验证它.

2. 求偏微分方程

$$(y-\beta z)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-\alpha z)\frac{\partial z}{\partial y}=x-y$$

的通解.

3. 确定满足偏微分方程

$$z\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial z}{\partial y}=y-x$$

且通过曲线

$$x=1,\quad z=y^2$$

的曲面.

4. 求偏微分方程

$$z(x+z)\frac{\partial z}{\partial x}-y(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

且满足

$$z=\sqrt{y},\quad \text{当 } x=1$$

的解.

5. 解偏微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=z^2,$$

满足初始条件

$$z(x,0)=f(x).$$

6. 解偏微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xz\frac{\partial z}{\partial x},$$

满足初始条件

$$z(x,0)=x.$$

7. 设 $z_1(x,y)$ 和 $z_2(x,y)$ 表示偏微分方程

$$a(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=c(x,y,z) \tag{*}$$

的两个积分曲面. 证明

$$\frac{a}{\dfrac{\partial z_1}{\partial y}-\dfrac{\partial z_2}{\partial y}}=\frac{b}{\dfrac{\partial z_2}{\partial x}-\dfrac{\partial z_1}{\partial x}}=\frac{c}{\dfrac{\partial z_2}{\partial x}\dfrac{\partial z_1}{\partial y}-\dfrac{\partial z_1}{\partial x}\dfrac{\partial z_2}{\partial y}},$$

且对两个曲面的相交曲线建立关系式

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{c},$$

因而它是偏微分方程 (*) 的特征线.

8. 给定偏微分方程

$$(y+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(x+z)\frac{\partial z}{\partial y}=x+y \tag{*}$$

和方程组

$$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{x+z}=\frac{dz}{x+y}$$

或线性偏微分方程

$$(y+z)\frac{\partial \phi}{\partial x}+(x+z)\frac{\partial \phi}{\partial y}+(x+y)\frac{\partial \phi}{\partial z}=0$$

的首次积分, 即

$$\phi_1(x,y,z)=\frac{y-x}{z-x}=\alpha.$$

确定二次积分和偏微分方程 (*) 的一个通解.

9. 分析由偏微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial y}+z\frac{\partial z}{\partial x}=1$$

连同初始条件: 在直线 $y=0$ 上 $x_0(s)=s, y_0(s)=0, z_0(s)=\cos s$ 所提出的问题. 变换 $(x,y)\to(s,t)$ 的 Jacobi 行列式蕴涵对解的什么样的限制? 这里 s,t 分别是初始数据和特征线的参变量.

10. 考虑线性偏微分方程

$$a(x,y,z)\frac{\partial \phi}{\partial x}+b(x,y,z)\frac{\partial \phi}{\partial y}+c(x,y,z)\frac{\partial \phi}{\partial z}=0$$

和由

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{c}=dt \tag{*}$$

所确定的积分曲线; 假设在相关区域内 $c\neq 0$, 且把方程组 (*) 换成一对常微分方程

$$\frac{dx}{dz}=\frac{a}{c},\quad \frac{dy}{dz}=\frac{b}{c}, \tag{**}$$

这里 z 作为自变量的角色出现. 对 $z=z_0$, 令 $x=x_0$ (任意) 和 $y=y_0$ (任意), 且将 (**) 的解表成形式 $x=x(z,x_0,y_0), y=y(z,x_0,y_0)$. 假设从最后这两个关系式可解出 x_0,y_0, 即

$$x_0=f(x,y,z),\quad y_0=g(x,y,z),$$

这里 f,g 是函数无关的. 用几何语言解释上面所述的情况, 此外, 证明另一函数无关的积分, 如

$$z_0=h(x,y,z)$$

的存在性可被排除, 也就是说, 方程组 (*) 的所有其他积分均可表成形式 $h = H(f, g)$. 注意并验证下述总结性的结论: 如果 x, y, z 是从 (*) 解得的, 则函数 $f(x, y, z)$ 和 $g(x, y, z)$ 沿此方程组的任一积分曲线保持为常数. 偏微分方程的解恒等于 (*) 的积分. 如果 f, g 是 (*) 的独立积分, 则 $\phi = F(f, g)$ 是该线性偏微分方程最一般的解.

11. $\mu(x, y)$ 为常微分方程

$$a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0 \tag{*}$$

的积分因子的充分必要条件体现于偏微分方程

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu a) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu b)$$

或

$$b\frac{\partial \mu}{\partial x} - a\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) \tag{**}$$

中; 只要知道 (**) 的一个积分而不是其通解就能求解 (*). 给出特殊的具体函数

$$a(x, y) = 3xy + 2y^2, \quad b(x, y) = 3xy + 2x^2,$$

证明 (**) 有一积分

$$\phi_1(x, y, \mu) = \mu\sqrt{x + y} = \alpha,$$

且用此积分解常微分方程 (*), 求得 (*) 的通解.

12. 考虑拟线性偏微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial y} + z\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < \infty, y > 0$$

和沿 x 轴的初始条件

$$z_0(s) = \text{sech } s, \quad -\infty < s < \infty.$$

验证只要

$$y < y^*$$

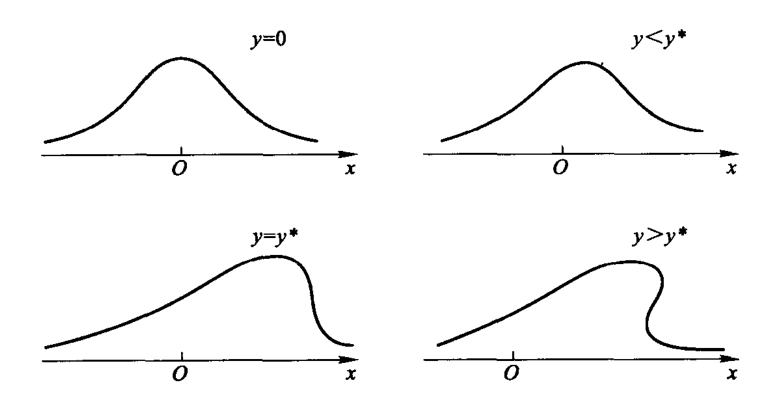
就存在正则 (可微的) 解, 其中 y^* 是函数

$$\frac{\cosh^2 s}{\sinh\ s}$$

在 $y > 0$ 范围内的最小值. 注意观察, 在所附草图中, 当变量 y 增加和通过临界值 y^* 时 $z(x, y)$ 作为 x 的函数形状的变化情况; 这样, 一个初始正

则 (且无穷次可微形式的) 曲线变得陡峭, 在 y^* 处开始出现一个无穷斜率 $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}=\infty\right)$, 然后变成 x 的多值函数.

将该偏微分方程右边的 0 替换成 1, 然后用与上面同样的初始条件解这一方程.



第十章

某些技术问题和有关的偏微分方程

前一章描述的单向车流的连续统模型, 在开始时, 利用了一个包含一阶导数的关系式 (9.1), 它使车辆密度的瞬时变化和车流量的逐点变化平衡, 这样当车辆分布沿这条道路改变时车辆总数不变. 假设速度单独地对密度有一个直接的函数依赖关系, 守恒方程就变成一个对密度的一阶拟线性偏微分方程. 如果速度对该处的局部密度及其在邻近的变化两者有依赖关系, 例如说

$$v = \frac{1}{\rho}J(\rho) - \kappa\frac{\partial}{\partial x}\ln\rho, \quad \kappa > 0$$

(按 (9.2) 的记号), 则对应流量有复合式

$$j = J(\rho) - \kappa\frac{\partial\rho}{\partial x},$$

且一阶偏微分方程 (9.3) 替换成一个二阶偏微分方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + J'(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} = \kappa\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2},$$

这里最后的 (线性) 项起着加宽或分散一个初始密度分布 $\rho(x,0)$ 的作用, 因此抵消了拟线性项使密度曲线变陡峭和扭曲的趋势.

守恒或所谓连续性关系是分析不同模型或系统的中心点, 并且有些实例是值得详述的. 行进波的运动提供了一个相关框架, 这里特别地可假设包含关于 x 和 t 缓慢变化的波长 λ 和 (角) 频率 ω 的波的一个*波串* (train) 沿 x 方向行进;

则对**波峰值**适用守恒关系, 它是这样达到的: 使在一固定的和狭小的一段内波数 (或波峰值) 的时间变化率与每单位时间内通过该段两端点处的波峰数之差相平衡. 使波峰数密度 n 与波长 λ 的倒数相等, 且它们的流量测度 j 与周期 T 的倒数相等, 相关的关系式

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial j}{\partial x}=0$$

取形式

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial \omega}{\partial x}=0, \tag{10.1}$$

其中**波数**

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{10.2}$$

表示被容纳进入长度为 2π 的一个区间的波的数目, 而**角频率**

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \tag{10.3}$$

等于 2π 乘弧度 (角) 频率 ν. 定义**波速**

$$c=\frac{\omega}{k}, \tag{10.4}$$

且 (10.1) 变成

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(ck)=0. \tag{10.5}$$

如果有速度和波长或频率之间的一个直接关系式可用, 即

$$c=c(\lambda),\quad \text{或}\quad c=c(\omega),$$

其结果

$$\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{dc}{d\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x}$$

代入到 (10.5) 中, 由此得出 (利用 (10.2))

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t}+c_g(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial x}=0, \tag{10.6}$$

这里

$$c_g(\lambda)=c-\lambda\frac{dc}{d\lambda}. \tag{10.7}$$

类似地, 如果用 (10.4) 从 (10.1) 中消去 k, 得出

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\omega}{c}\right)+\frac{\partial \omega}{\partial x}=0$$

或

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+c_g(\omega)\frac{\partial \omega}{\partial x}=0, \tag{10.8}$$

这里

$$c_g(\omega) = \frac{c^2}{c - \omega \dfrac{dc}{d\omega}}. \tag{10.9}$$

$c_g(\lambda)$ 和 $c_g(\omega)$ 的表达式在下面的意义下是等价的: 根据 (10.4) 作自变量变换, 其中一个可从另一个得出; 此外, 一个紧凑的和基本的表达式

$$c_g = \frac{d\omega}{dk}, \tag{10.10}$$

清晰地描述了, 当 ω 与 k (或 λ) 之间的关系是有非线性特征时, c_g 如何变化.

偏微分方程 (10.6),(10.8) 制约了波长和频率曲线的演化, 且有通解, 虽然是隐式的通解,

$$\lambda = f(x - c_g(\lambda)t), \quad \omega = g(x - c_g(\omega)t), \tag{10.11}$$

它蕴涵这样的结论: 相对于一个记录者或观测者以特征速度 c_g 运动时, 这些描述量保持固定值, c_g 称为**群速度**. 当 c_g 是 ω 的函数时, 两表示式

$$\frac{\partial c_g}{\partial t} = \frac{dc_g}{d\omega}\frac{\partial \omega}{\partial t}, \quad \frac{\partial c_g}{\partial x} = \frac{dc_g}{d\omega}\frac{\partial \omega}{\partial x}$$

结合 (10.9) 就给出偏微分方程

$$\frac{\partial c_g}{\partial t} + c_g \frac{\partial c_g}{\partial x} = 0, \tag{10.12}$$

它有通积分

$$c_g = f(x - c_g t). \tag{10.13}$$

c_g 对 ω 或 λ 的显式依赖关系有待于特定的波激发的涉及动力学行为的详细系统地阐明; 因为连续性关系本身只有运动学的意义.

波运动包含能量的转移, 而且如果认为群速度在这方面也起作用的话, 那么就会提出一个将乘积 $c_g E$ 与能量流量联系起来的连续型方程

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(c_g E) = 0, \tag{10.14}$$

这里 E 代表能量密度, 即每单位长度 (或与平面波传播方向垂直的每单位面积) 的能量. 方程 (10.12),(10.14) 构成一个独立自足的方程组, 指定它们的初始值后能够决定 c_g 和 E; 这样, 在 (10.13) 中函数 $f(\xi)$ 简单地等同于 c_g 在 $t = 0$ 的形式, 例如说记为 $c_g^{(0)}(x)$. 为得到对 E 的相应表示, 首先注意从 (10.14) 得到的推断

$$E = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad c_g E = -\frac{\partial \phi}{\partial t},$$

这里函数 ϕ 满足偏微分方程

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+c_g\frac{\partial\phi}{\partial x}=0,$$

因此由

$$\phi=\phi^{(0)}(x-c_gt),\quad \phi^{(0)}(x)=\phi(x,0)$$

表出. 相应地

$$E(x,t)=\left(1-t\frac{\partial c_g}{\partial x}\right)\phi'(x-c_gt)$$

和

$$E(x,0)=E^{(0)}(x)=\phi'(x),$$

它导致表示式

$$E(x,t)=\left(1-t\frac{\partial c_g}{\partial x}\right)E^{(0)}(x-c_gt). \tag{10.15}$$

将

$$c_g(x,t)=c_g^{(0)}(x-c_gt)$$

对 x 微分, 将所得结果, 即

$$\frac{\partial c_g}{\partial x}=\frac{c_g^{(0)'}(x-c_gt)}{1+tc_g^{(0)'}(x-c_gt)}$$

代入 (10.15) 中, 得出

$$E(x,t)=\frac{E^{(0)}(x-c_gt)}{1+tc_g^{(0)'}(x-c_gt)}. \tag{10.16}$$

当

$$1+tc_g^{(0)'}(x-c_gt)=0$$

时最后这个表示式显然失效. 因此提示对特定波过程必须作更仔细的研究; 此外, 值得注意的是联系 ω 和 k 的函数关系或*耗散关系*也可包含变量 x,t, 且在此环境中一个观察者以群速度移动能注意到变化的频率.

交通流和江河中的洪水运动是所谓的*运动波*的例子, 这名词是由具有一阶偏导数的连续型基本方程引起的; 另一例子在化学领域中找到, 涉及溶质的吸附作用或离子在流体系统中的交换. 一个色谱吸附分析法的实验装置在图 27 中用图式表述, 包括三个组成部分: 一个装有待分析溶液的贮液器 (I), 溶液被迫通过的过滤器 (Ⅱ), 收集溶液的小槽 (Ⅲ), 溶

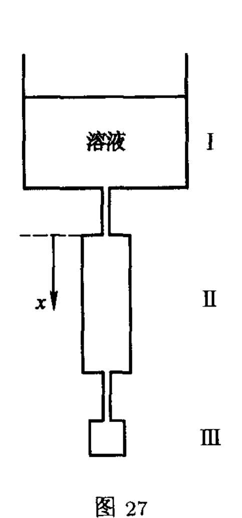


图 27

液在这里改变了浓度水平被测出. 过滤器是一个圆柱形的容器, 包含某种类型的物质 (固体的、碳状的、树脂状的或矿物的), 与流过它的溶液交换离子或原子; 分析的目的是决定被吸附溶质沿该圆柱的分布.

设 ρ_s 表示溶液中浓度的适当水平而 ρ_a 表示相应的被吸附 (或沉淀) 物质的水平, 这两个量一般地随沿圆柱的距离 x 和时间 t 而变化. 由于 $\rho_s V$ 确定物质以速度 V 穿过一截面的流量, 总的守恒性要求

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_s+\rho_a)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho_s V)=0, \tag{10.17}$$

其中第二项与流的圆柱体上相邻截面间的流量差相关联, 而第一项与这些截面间总浓度的相应改变量相关联; 如果有不同溶质出现, 一个类似方程可应用于每种不同的溶质.

为继续进行理论探讨, 需要描述交换过程的两个量 ρ_a, ρ_s 之间明确的关系; 假设

$$\rho_a=f(\rho_s), \tag{10.18}$$

它表明了溶质和吸附物质之间的瞬时平衡 (因没有时间导数的介入), 守恒关系 (10.17) 变成

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_s+c(\rho_s)\frac{\partial}{\partial x}\rho_s=0, \tag{10.19}$$

如果流速 V 是常数, 那么

$$c(\rho_s)=\frac{V}{1+f'(\rho_s)}. \tag{10.20}$$

显然偏微分方程 (10.19) 属于第九章中所讨论的拟线性偏微分方程.

在达到平衡态和吸附物质饱和之前, 存在一种由交换过程的动态模型来描述的状态以及一直采用的一个特殊的速率定律

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t}=F(\rho_a,\rho_s), \tag{10.21}$$

其特点是有确定的表示式

$$F(\rho_a,\rho_s)=k_1\rho_s(\rho_a^*-\rho_a)-k_2\rho_a(\rho_s^{(0)}-\rho_s), \tag{10.22}$$

其中带有一对按相反意义进行的反应 (在流体和吸附剂之间) 的速率常数 k_1, k_2 以及初始浓度水平 $\rho_s^{(0)}$ 和饱和水平 ρ_a^*.

上述诸方程的有用变换在以后各步中可能会生效; 第一个变换是用新自变量

$$\tau=t-\frac{x}{V},\quad \zeta=\frac{x}{V} \tag{10.23}$$

得到的, 用这些新自变量, (10.17),(10.21)—(10.22) 取形式

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial \zeta}+\frac{\partial \rho_a}{\partial \tau}=0 \tag{10.24}$$

和

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial \tau}=A\rho_s-B\rho_a-C\rho_a\rho_s, \tag{10.25}$$

这里 A,B,C 是常数. 其次, 记

$$\rho_s=\frac{\partial \Phi}{\partial \tau},\quad \rho_a=-\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \tag{10.26}$$

它就满足 (10.24), 随后由 (10.25) 推导出 Φ 的非线性方程

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta \partial \tau}+A\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}+B\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}+C\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}=0. \tag{10.27}$$

最后, 也是决定性的一步, 包括引入新因变量使得

$$\Phi=\frac{1}{C}\ln \Psi, \tag{10.28}$$

这导致 Ψ 的线性偏微分方程, 即

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta \partial \tau}+A\frac{\partial \Psi}{\partial \tau}+B\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}=0. \tag{10.29}$$

当然, 它是一种使线性化可行的例外情形.

习　题　10

1. 在重液体表面上的重力波, 也受表面张力影响, 当其振幅小时, 可以简单地描述. 一种代表性类型, 其特点是沿一固定的 (x) 方向在有有限深度 H 的不可压缩非黏滞性液体上传播, 可通过方程组

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=0,\quad -\infty<x<\infty, 0<y<H, \tag{i}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}=0,\quad y=H \tag{ii}$$

和

$$\frac{T}{\rho}\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y}=\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial \phi}{\partial y},\quad y=0 \tag{iii}$$

来说明, 这里方程 (ii) 适用于一个刚性底 (在其法线上液体速度的分量 $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ 为零) 且方程 (iii) 在液体平衡 (或无扰动的) 自由表面上实施, 它与重力加

速度 g, 液体密度 ρ 和表面张力 T 有关. 表面张力引起紧挨着自由表面上面和下面的邻近点之间的压力差 Δp, 即 $\Delta p = T/R$, 其中 R 表示局部曲率半径. 称为液体运动的速度势的 ϕ 满足 Laplace 方程 (i) 这一事实是不可压缩性假设的推论, 而线性化的表面条件 (iii) 反映了自由表面与水平面保持小偏离情形下曲率半径的近似形式.

借助于分离变量式

$$\phi(x,y)e^{-i\omega t} = e^{i(\pm kx-\omega t)}Y(y,k), \tag{iv}$$

它揭示对坐标 x 和时间 t 两者的周期依赖性且包含了一个至今未定的坐标 y 的函数. 联合表示

$$\Phi(x,y,t) = Re\left\{e^{i(\pm kx-\omega t)}Y(y,k)\right\} \tag{v}$$

刻画了 (与 x,y 平面垂直的) 直峰波的特征, 它沿 x 方向以相速度

$$c = \frac{\omega}{k} \tag{vi}$$

前进. 由 (i),(ii),(iii) 推导出决定 $Y(y,k)$ 的方程组是

$$\frac{d^2y}{dy^2} - k^2Y = 0, \quad 0 < y < H, \tag{vii}$$

$$\frac{dY}{dy} = 0, \quad y = H \tag{viii}$$

和

$$\left(g + k^2\frac{T}{\rho}\right)\frac{dY}{dy} - \omega^2Y = 0, \quad y = 0. \tag{ix}$$

按照 (vii),(viii) 且忽略一个当前无关的标量因子, 出现

$$Y(y,k) = \cosh k(H-y), \tag{x}$$

且利用 (ix) 提供一个 ω 和 k 之间的联系, 即

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 = \left(\frac{g}{k} + \frac{Tk}{\rho}\right)\tanh kH. \tag{xi}$$

后者确定相速度作为波长 $2\pi/k$ 的函数, 从而构成相关的弥散关系.

决定对应的群速度 c_g, 且当 $kH \ll 1$ 和 $k^2T \ll g$ 时验证近似表示式

$$c_g = (gH)^{1/2}\left(1 - \frac{1}{2}k^2H^2 + \frac{3}{2}\frac{k^2T}{g}\right).$$

找出当 $kH \gg 1$ 和 $k^2T \gg g$ 时成立的 c_g 的近似表示式; 且证明在深液体范围内 $\frac{1}{2}c < c_g < \frac{3}{2}c$.

2. 不定常 (随时间变化的) 且单向 (例如沿 x 轴) 的流体运动的一对联立的非线性偏微分方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)=0 \tag{i}$$

和

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{ii}$$

分别表示质量的局部守恒和内压力 p 的动力学效应; 这里 $\rho(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 表示质量密度和速度 (速率). 假设因变量与自变量的角色交换, 即 x,t 看成 ρ,v 的函数. 假设变换 $(\rho,v)\leftrightarrow(x,t)$ 的 Jacobi 行列式 (或称函数行列式)

$$D=\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial \rho}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x}$$

恒不为零, 建立对不同自变量组的一阶偏导数之间的关系

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial x}&=D\frac{\partial t}{\partial v},\quad \frac{\partial \rho}{\partial t}=-D\frac{\partial x}{\partial v},\\ \frac{\partial v}{\partial x}&=-D\frac{\partial t}{\partial \rho},\quad \frac{\partial v}{\partial t}=D\frac{\partial x}{\partial \rho}.\end{aligned}$$

据此变换 (i),(ii), 且证明其结果

$$-\frac{\partial x}{\partial v}+v\frac{\partial t}{\partial x}-\rho\frac{\partial t}{\partial \rho}=0, \tag{iii}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \rho}-v\frac{\partial t}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial t}{\partial v}=0 \tag{iv}$$

是以 x,t 作为 ρ 和 v 的函数的一对线性齐次方程; 后面的一个方程包含一个系数函数 $dp/d\rho$, 它的性状由液体的状态方程 $p=p(\rho)$ 导出.

3. 如果前面问题中提到的 Jacobi 行列式恒为零, 那么 v 是 ρ 的一个函数, 由成对依赖关系

$$\rho=g(p) \tag{i}$$

和

$$v=f(p) \tag{ii}$$

来表示. 建立 (i) 和 (ii) 的对应变化形式

$$g'(p)\frac{\partial p}{\partial t}+(g'f+gf')\frac{\partial p}{\partial x}=0, \tag{iii}$$

$$f'(p)\frac{\partial p}{\partial t}+\left(ff'+\frac{1}{g}\right)\frac{\partial p}{\partial x}=0 \tag{iv}$$

和作为结果的关系式

$$f'^2 = \frac{g'}{g^2}, \tag{v}$$

它保证 (iii),(iv) 非平凡地被满足 (即 $p \neq$ 常数).

然后证明可得到形为

$$\frac{\partial p}{\partial t} + F(p)\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{vi}$$

的 (以前遇到且讨论过) 偏微分方程, 并给出关于 F 的一些细节.

4. 当速率定律仍取 (10.21) 的形式但函数 F 没有明确给出时, 与适用于吸附分析的关键方程 (10.27) 相对应的方程是什么? 如果采用变换

$$\Phi = \frac{1}{c}\ln\left\{e^{-(B\tau + A\zeta)}\Psi(\zeta,\tau)\right\},$$

求与线性偏微分方程 (10.29) 相对应的方程. 求用 Ψ 表出的浓度 ρ_s, ρ_a 的表示式.

第十一章

两个自变量的一阶偏微分方程，一般理论

具有两个自变量和一个因变量函数 $z(x,y)$ 的所有一阶偏微分方程都可总括为关系式

$$f(x,y,z,p,q)=0, \tag{11.1}$$

这里

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y}; \tag{11.2}$$

且不失一般性可假设函数 f 对每一自变量有连续的二阶导数. 一个未预料到且也值得注意的结果须及时揭示, 即 (11.1) 的解可由解一个常微分方程组而得到. 所持论证, 在几何和分析两方面都与那些用于对应的线性和拟线性偏微分方程的论证形成鲜明对照; 因此在进入细节前, 可回顾一下, 一阶常微分方程 $dy/dx=f(x,y)$ 在 (x,y) 平面定义一个斜率场或线元场 (x,y,p), 这里 $p=dy/dx$. 此常微分方程的积分等同于确定具有以下性质的一族平面曲线: 在这种曲线的每个点上有沿着该曲线的切线方向的唯一一个线元. 偏微分方程 (11.1) 的解表示在三维 (x,y,z) 空间中的曲面族, 在它们各点上有一个局部*平面元* (x,y,z,p,q). 如果 (X,Y,Z) 表示动坐标, 过 (x,y,z) 的所有平面的方程表成

$$(X-x)p+(Y-y)q-(Z-z)=0,$$

且如果 x, y, z, p, q 满足 (11.1), 则平面元 (x, y, z, p, q) 称为一个**积分平面元**. 过 (x, y, z) 的所有积分平面元的一个单参数族包住一个其顶点在 (x, y, z) 的**锥**. 所以曲面 $z = z(x, y)$ 代表 (11.1) 的一个解, 如果在其每一点上该曲面的切平面包含过该点的积分平面元中的一个; 换言之, 这切平面必切于该锥或所有平面元的包络.

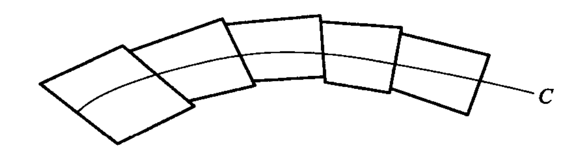


图 28

其次, 给定一条具有参数表示式 $(x(t), y(t), z(t)), t_1 < t < t_2$ 的 (光滑) 空间曲线 C, 和一对函数 $p(t), q(t)$, 使得 C 在 (x, y, z) 的切线位于平面元 (x, y, z, p, q) 上; 则所有这样的平面元的总体称为被曲线 C 支撑的一个**曲面带** $(x(t), y(t), z(t), p(t), q(t))$ (见图 28). 一个曲面带的定量表示式由两关系式

$$\frac{X - x}{dx/dt} = \frac{Y - y}{dy/dt} = \frac{Z - z}{dz/dt}$$

和

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

的相互相容性而得出, 它们分别描述切线和平面元; 因此

$$\frac{dz}{dt} = p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)\frac{dy}{dt} \tag{11.3}$$

体现了对曲面带的条件. 特别地, 如果

$$f(x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)) = 0,$$

则该带与偏微分方程 (11.1) 的一个积分相关联.

设 $z = z(x, y)$ 表示偏微分方程 (11.1) 的一个解, 且回顾积分锥有一母线 (线生成元), 它在该曲面在点 $O : (x, y, z)$ 处的切平面上选出一个方向. 首先沿母线进入邻近点 $O' : (x + dx, y + dy, z + dz)$, 然后以类似方式沿局部锥从 $O', O'', \cdots$, 连同一个特殊的平面元集合的一条曲线产生了, 这些平面元的总体称为**积分特征带**. 为了不直接提到积分曲面 $z = z(x, y)$ 而来定义这个特征带, 考虑任意点 (x, y, z) 和通过此点的平面族

$$P(X - x) + Q(Y - y) - (Z - z) = 0, \tag{11.4}$$

这里出现两组流动变量 (X, Y, Z) 和 (P, Q). P, Q 是与平面的法方向有关的变量, 可以对 (11.4) 微分得到 P, Q 之间的依赖关系

$$(X-x)+\frac{dQ}{dP}(Y-y)=0, \tag{11.5}$$

而且已经熟知, 关系式 (11.4),(11.5) 联合地描述了该平面族的包络面.

此外, 给出

$$f(x, y, z, P, Q)=0, \tag{11.6}$$

在其上对 P 微分所得结果

$$f_P+f_Q\frac{dQ}{dP}=0$$

导出一个关系式

$$\frac{dQ}{dP}=-f_P/f_Q,$$

这使得 (11.5) 可用

$$f_Q(X-x)-f_P(Y-y)=0 \tag{11.7}$$

代替. 这样一对关系式 (11.4),(11.7) 给出了关系式

$$\frac{X-x}{f_P}=\frac{Y-y}{f_Q}=\frac{Z-z}{Pf_P+Qf_Q}, \tag{11.8}$$

它决定了在 (x, y, z) 空间通过方向数 (f_P, f_Q, Pf_P+Qf_Q) 的一个**特征方向**, 方向数除以其平方和的平方根后成为方向余弦. 这是平面 (11.4) 上一条直线和该平面族的一条母线或生成元的公共方向.

指定 P, Q 的值后, 一个特殊的平面就被挑选出来, 而选择

$$P=p, \quad Q=q$$

确定对应于原偏微分方程 (11.1) 解的切平面. 从而产生 (11.8) 的变形

$$\frac{dx}{f_p}=\frac{dy}{f_q}=\frac{dz}{pf_p+qf_q}=dt,$$

和 (11.3) 结合就给出了积分曲面上**特征曲线**的三个方程构成的方程组

$$\frac{dx}{dt}=f_p, \quad \frac{dy}{dt}=f_q, \quad \frac{dz}{dt}=pf_p+qf_q. \tag{11.9}$$

为了弄清楚 p 和 q 如何沿特征曲线变化, 需要两个附加的方程, 且分别包含 x, y, z, p, q 对 t 的导数的五个方程的完全组的解定义一个积分特征带. 首先注意到利用 (11.9) 得到 $dp/dt, dq/dt$ 的表示式

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt}&=p_x\frac{dx}{dt}+p_y\frac{dy}{dt}=p_xf_p+p_yf_q,\\ \frac{dq}{dt}&=q_x\frac{dx}{dt}+q_y\frac{dy}{dt}=q_xf_p+q_yf_q;\end{aligned} \tag{11.10}$$

再微分 (11.1) 得出

$$f_x + f_z p + f_p p_x + f_q q_x = 0 \tag{11.11}$$

和

$$f_y + f_z q + f_p p_y + f_q q_y = 0,$$

所以利用结果

$$\frac{\partial p}{\partial y} = p_y = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = q_x,$$

从 (11.10),(11.11) 推演出受欢迎的表示式

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -f_x - f_z p, \\ \frac{dq}{dt} &= -f_y - f_z q. \end{aligned} \tag{11.12}$$

这样决定积分曲面的方法变得明确, 即使特征带方程组 (11.9),(11.12) 再连同一个对该偏微分方程本身的可能的补充条件所要求的解可以证明是复杂的. 有一个与法国数学家 Cauchy 的名字相联系的典型的或标准的问题, 其目标是求通过一条事先选取的曲线 $\Gamma : x = x(s), y = y(s), z = z(s)(s_1 < s < s_2)$ 的特殊积分曲面. 朝向这个目的的第一步要求通过方程组

$$f(x(s), y(s), z(s), p(s), q(s)) = 0 \tag{11.13}$$

和

$$\frac{dz}{ds} - p(s)\frac{dx}{ds} - q(s)\frac{dy}{ds} = 0. \tag{11.14}$$

连同不等式

$$f_q \frac{dx}{ds} - f_p \frac{dy}{ds} \neq 0$$

详细描述由 Γ 支撑的积分曲面带, 上面的不等式保证 Γ 不同于属于积分特征线族的任一曲线且它在 (x, y) 平面上的投影有连续转动的切线 $((dx/ds)^2 + (dy/ds)^2 > 0)$. 然后解出积分特征带方程组 (11.9),(11.12), 在 Γ 上满足给定的初始条件 $x = x(s), y = y(s), z = z(s), p = p(s), q = q(s)$, 产生形如

$$x = x(s,t), y = y(s,t), z = z(s,t), p = p(s,t), q = q(s,t)$$

的双参数表示式, 且所要求的解曲面由其中关于 x, y, z 的表示式所实现. 可以证明这程序符合所有必要的要求 (例如沿特征线 $f = 0$), 虽然这里省略了细节.

举一个例子来阐明参数解方法, 考虑偏微分方程

$$f(z, p, q) = pq - z = 0, \tag{11.15}$$

带有 Cauchy 数据

$$z = s^2 \text{ 当 } x = 0, y = s^2; \tag{11.16}$$

这里曲线 Γ 是平面曲线, 且积分曲面带关系式 (11.13),(11.14) 具有形式

$$p(s)q(s) - s^2 = 0$$

和

$$2s - 2sq(s) = 0,$$

由此推导出

$$\begin{aligned} q(s) &= 1, \\ p(s) &= s^2. \end{aligned} \tag{11.17}$$

如果 $s \neq 0$, 且这也是从不等式

$$f_q \frac{dx}{ds} - f_p \frac{dy}{ds} \neq 0$$

推断出的条件. 对两个自变量 (s,t) 的函数 x, y, z, p, q, 特征带方程组 (11.9), (11.12) 是

$$\frac{dx}{dt} = q, \frac{dy}{dt} = p, \frac{dz}{dt} = 2pq, \frac{dp}{dt} = p, \frac{dq}{dt} = q, \tag{11.18}$$

且在 $t = 0$ 给定初始条件 (11.17), 由此导出

$$p(t,s) = s^2 e^t, \quad q(t) = e^t. \tag{11.19}$$

考虑到最后两个表示式, 对 x, y, z 的常微分方程组 (11.18) 有满足 (11.16) 要求的唯一解

$$x = e^t - 1, y = s^2 e^t, z = s^2 e^{2t}, \tag{11.20}$$

为了得到问题的显式解, 尚需从 (11.20) 中消去 t 和 s; 因此

$$z = ye^t = y(x+1), \tag{11.21}$$

且这个解显然正确.

习 题 11

1. 确定包含曲线 $x = 0, z = (1+y)^2$ 且满足偏微分方程

$$p^2 - q^2 = 2z$$

的曲面.

2. 求由偏微分方程

$$p^2 + q^2 = 2z$$

所确定且要求曲线 $x = 0, z = y$ 位于其上的曲面的表示式.

3. 求通过抛物线

$$x = 0, \quad z^2 = 2ay\sqrt{2}$$

且满足偏微分方程

$$z^2(p^2 + q^2) = 3b^2$$

的曲面.

4. 证明 $f(x, y, z, p, q)$ 沿一特征带保持常数值.

5. 导出对与拟线性偏微分方程

$$f = a(x, y, z)p + b(x, y, z)q - c(x, y, z) = 0$$

相伴的特征带的常微分方程组, 且与一般非线性偏微分方程作对比.

6. 偏微分方程

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \tag{$*$}$$

的完全积分表成解的双参数形式

$$z = F(x, y, c_1, c_2)$$

且从三个方程构成的组

$$F = 0, \quad \frac{\partial}{\partial c_1}F = 0, \quad \frac{\partial}{\partial c_2}F = 0,$$

消去 c_1, c_2 后所得到的曲面族的包络面定义了一个奇解. 此外, 给定带有可微函数 φ 的关系式 $c_2 = \varphi(c_1)$, 曲面族

$$z = F(x, y, c_1, \varphi(c_1))$$

的包络表示通解.

得到 $(*)$ 的完全积分 (解) 的 Lagrange 方法依赖于 f 所满足的特征带方程组

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{f_q} = \frac{dz}{pf_p + qf_q} = \frac{dp}{-f_x - pf_z} = \frac{dq}{-f_y - qf_z} = dt \tag{$**$}$$

还依赖于这样的事实, 即任一其他的函数, 例如说, $g(x,y,z,p,q)$ 满足 (**) 当且仅当

$$f_p\frac{\partial g}{\partial x}+f_q\frac{\partial g}{\partial y}+(pf_p+qf_q)\frac{\partial g}{\partial z}-(f_x+pf_z)\frac{\partial g}{\partial p}-(f_y+qf_z)\frac{\partial g}{\partial q}=0. \quad (***)$$

如果一旦有了两个独立积分, 如性质

$$f_pg_q-f_qg_p\neq 0$$

所示, 则关系式

$$f(x,y,z,p,q)=0 \qquad (****)$$

和

$$g(x,y,z,p,q)=c_1$$

(其中 c_1 表示任意常数) 可用 x,y,z,c_1 来确定 p,q, 即

$$\begin{aligned}p&=p(x,y,z,c_1)\\ q&=q(x,y,z,c_1).\end{aligned} \qquad (*****)$$

可以验证, 利用 (****) 对 x 和 y (分别地) 微分的结果, 对 (*****) 的相容性条件

$$p_y=q_x$$

确实成立; 因此, 由此得到的包含第二个任意常数 c_2 的积分给出了 (*) 的完全积分.

求偏微分方程组

$$p^2+q^2=z^2,\quad pq=4z,\quad p-q=apq, a \text{ 为常数}$$

的完全积分.

积分偏微分方程

$$yp^2=z,$$

并描述所得结果.

7. 知道了一个完全积分

$$z=F(x,y,c_1,c_2)$$

就可得到偏微分方程

$$f(x,y,z,p,q)=0$$

按 Cauchy 规定: $z = z(s)$ 当 $x = x(s), y = y(s)$ 的一个解. 这样,

$$z(s) = F(x(s), y(s), c_1, c_2) \tag{i}$$

刻画过固定点 (x, y, z) 且与该处的积分锥相切的所有曲面, 而且包含规定的数据曲线的切线的特殊曲面由 (i) 和关系式

$$\frac{dz}{ds} = F_x \frac{dx}{ds} + F_y \frac{dy}{ds} \tag{ii}$$

的公共解确定; 这提供了表示式

$$c_1 = c_1(s), \quad c_2 = c_2(s),$$

因此, 从以下这对方程

$$\begin{aligned} z(s) &= F(x(s), y(s), c_1(s), c_2(s)), \\ 0 &= F_{c_1} \frac{dc_1}{ds} + F_{c_2} \frac{dc_2}{ds} \end{aligned} \tag{iii}$$

(它适合于曲面族 $z(s)$ 的包络面) 中消去 s 后, Cauchy 问题所要求的解 $z = z(x, y)$ 随之得出.

证明

$$z(x, y, c_1, c_2) = c_1^2 x + c_1 y + c_2$$

确实表示偏微分方程: $p = q^2$ 的一个完全积分. 给出具体规定 $x(s) = 0, y(s) = s, z(s) = s^2$, 从有关公式 (i),(ii) 得出结果

$$c_1(s) = 2s, \quad c_2(s) = -s^2.$$

援引 (iii) 且找出此问题所要求的解.

第十二章

多个自变量的一阶偏微分方程

考虑包含 n 个自变量 $x_i, i=1,2,\cdots,n$ 的线性偏微分方程, 即

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0, \tag{12.1}$$

这里 $a_i = a_i(x_j), j=1,2,\cdots,n$, 且

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0.$$

按照关系式

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n} = dt \tag{12.2}$$

引入积分曲线或特征线的 $(n-1)$ 参数族, 如果对其有关的自变量的值 $a_n \neq 0$ 且取 x_n 作为自变量, 则 (12.2) 可以替换成 $n-1$ 个常微分方程的方程组

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{a_1}{a_n}, \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{a_2}{a_n}, \cdots, \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{a_{n-1}}{a_n}. \tag{12.3}$$

给定一组任意常数 $c_i, i=1,2,\cdots,n-1$ 使得

$$x_i = c_i \text{ 当 } x_n = x_n^{(0)},$$

唯一确定的解

$$x_i = X_i(x_n, c_j), \quad i,j = 1,\cdots,n-1 \tag{12.4}$$

是求解 (12.3) 的结果. 假定表示式

$$f_i(x_1, \cdots, x_n) = c_i, \quad i = 1, \cdots, n-1$$

由 (12.4) 导出, 这里 f_i 是函数无关的, 由此确定了包含点 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的曲线的 $n-1$ 参数族; 因为如果 x_i 是 (12.3) 的解则 f_i 保持为常数, 所以可以很恰当地把它们称为 (12.2) 的积分.

此外, 容易证明这些积分事实上等同于偏微分方程 (12.1) 的解; 因此, 如果 z 满足方程 (12.1), 且 $dx_i/dt = a_i$, 则

$$\frac{d}{dt} z(x_1(t), \cdots, x_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0,$$

这表明 z 作为 (12.1) 的积分, 沿对应的积分曲线具有前述的常值性. 另一方面, 如果 $z(x_1, \cdots, x_n) = C$ 是 (12.2) 的积分, 随之而来的关系式

$$\frac{dz}{dt} = 0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial z}{\partial x_i}$$

保证 z 是 (12.1) 的解.

给出 (12.2) 的 $n-1$ 个独立积分的集合, $f_i = c_i, i = 1, \cdots, n-1$, 则

$$z = F(f_1, f_2, \cdots, f_{n-1})$$

定义了一个更一般的解. z 的这个规定确实提供 (12.1) 的一个解, 这一事实通过联合关系式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial f_j} \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

和 (由于函数 f_j 满足 (12.1))

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0$$

而变得明显. 其次, 设 z 表示 (12.1) 的任一解, 且考虑量 a_i 以线性方式进入的齐次方程组,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0, j = 1, \cdots, n-1;$$

由于假设 $\sum a_i^2 > 0$, 因此方程组成立就要求 a_i 的系数构成的行列式必须为零, 即

$$\left| \frac{\partial(z, f_1, \cdots, f_{n-1})}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} \right| = 0,$$

由此导出结论

$$z = F(f_1, \cdots, f_{n-1}).$$

偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = b, \tag{12.5}$$

这里 $a_i = a_i(x_j, z), b = b(x_j, z), i, j = 1, \cdots, n$ 与前面的方程 (12.1) 在两方面有不同; 第一, 它是非齐次的 (如果 $b \neq 0$); 第二, a_i, b 的自变量中包含 z, 因而它属于拟线性方程的范畴. 在 (12.5) 的解与对有 $n+1$ 个自变量的函数 $\Phi(x_1, \cdots, x_n, z)$ 的偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + b \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \tag{12.6}$$

的解之间存在直接的联系; 即如果 Φ 满足 (12.6), 则

$$\Phi(x_1, \cdots, x_n, z) = 0 \tag{12.7}$$

隐式地定义了 (12.5) 的一个解. 而且 (12.5) 的所有解 $z = Z(x_i)$ 都是这样刻画出来的.

为了证明关于 Φ 的这些论断, 考虑 (12.7) 对 x_i 微分的结果, 即

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x_1, \cdots, x_n, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0,$$

由此推导出

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{12.8}$$

其次, 改写 (12.6) 成形式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \Big/ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + b = 0$$

且用 (12.8) 以得到对 z 的偏微分方程 (12.5). 所以就证明了 (12.7) 提供决定 (12.5) 的解的一个隐式表示.

现在设 $z = Z(x_i)$ 是 (12.5) 的一个解, 且定义函数

$$\Phi(x_i, z) = Z(x_i) - z, \tag{12.9}$$

这样就使得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + b \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial z}{\partial x_i} - b = 0;$$

因而 Φ 满足 (12.6), 且关系式 $\Phi = 0$ 确定 (12.5) 的形为 $z = Z(x_i)$ 的一个解.

现在求解非齐次偏微分方程 (12.5) 的步骤可说明如下: 引入辅助常微分方程组

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{dz}{b}, \tag{12.10}$$

它是齐次偏微分方程 (12.6) 的特征方程, 且设

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, z) = c_i, i = 1, \cdots, n$$

表示 n 个不同的积分, 则 (12.5) 的通积分由关系式

$$F(f_1, f_2, \cdots, f_n) = 0 \tag{12.11}$$

隐式地定义, 这里 F 是一个任意 (可微) 函数. 可以存在不包括在上面的关系式中的一个奇解, 它使得 (12.5) 中所有的系数 a_i, b 化为零, 从而不用任何积分即可找到.

一个简单的例子由线性 (或 Euler) 方程提供, 即

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = \lambda z, \tag{12.12}$$

它的特征方程组 (12.10) 有形式

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \cdots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{dz}{\lambda z} = dt,$$

且不同的积分

$$x_2/x_1 = c_1, \cdots, x_n/x_1 = c_n, \quad z/x_1^\lambda = c_\lambda$$

带有任意常数 $c_1, \cdots, c_n, c_\lambda$. 所以, 由 (12.11),

$$F\left(\frac{x_2}{x_1}, \cdots, \frac{x_n}{x_1}, \frac{z}{x_1^\lambda}\right) = 0 \tag{12.13}$$

表示 (12.12) 的解. 容易从 (12.13) 推断出一个显式

$$z = x_1^\lambda G\left(\frac{x_2}{x_1}, \cdots, \frac{x_n}{x_1}\right),$$

且 $z(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n) = \alpha^\lambda z(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 这一事实确认 z 是一个λ 次齐次函数.

习　题　12

1. 讨论偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = e^z$$

且与前面解过的 Euler 方程对比.

2. 求下列各偏微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial z}{\partial x_3} = x_1 x_2 x_3,$$

$$x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial z}{\partial x_3} = x_1^2 + 2z,$$

和

$$(x_2 - bz)\frac{\partial z}{\partial x_1} - (x_1 - az)\frac{\partial z}{\partial x_2} = bx_1 - ax_2.$$

的通解.

3. 设 $\Psi(x, y, z) = 0$ 表示一曲面的方程且注意到该曲面的切平面方程为

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial \Psi}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial \Psi}{\partial z}(Z - z) = 0.$$

求其母线过坐标原点的锥面的偏微分方程. 直接解此偏微分方程且证实这个解.

4. 导出描述其母线平行于分量为 (a, b, c) 的固定向量的柱面的偏微分方程. 这个方程的解是什么?

5. 考虑导入新自变量 $\{y_i(x_j)\}$ 以代替原自变量 $\{x_i\}, i, j = 1, \cdots, n$, 同时规定函数行列式

$$\left|\frac{\partial(y_1, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}\right|$$

不为零以保证有唯一的逆表示 $\{x_j(y_i)\}$. 证明齐次偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_j) \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0 \tag{*}$$

经过变换后具有形式

$$\sum_{j=1}^{n} A_j(x_i) \frac{\partial z}{\partial y_j} = 0$$

这里系数函数

$$A_j(y_1, \cdots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_j) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$

在消去变量 x_i 后用 y_i 来表示. 如果偏微分方程 (*) 的已知独立解的个数少于最大数 $n-1$, 即已知独立解

$$y_1, y_2, \cdots, y_k, \quad k < n-1$$

且选取 $n-k$ 个补充变量 $y_{k+1}, \cdots, y_n$, 则整个组 $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 是一个无关组, 证明结论: 当这组 $y_1, \cdots, y_k$ 看成任意参数时, 从 (*) 产生的形式本质上是具有 $n-k$ 个自变量的偏微分方程. 是否可能选取

$$y_{k+1} = x_{k+1}, \cdots, y_n = x_n,$$

如果可能的话, 为了完全解出原偏微分方程, 什么样的常微分方程组成为可利用的呢?

第十三章

边值问题的 Fourier 方法来源详述

在解一阶偏微分方程中常微分方程有完全的和构造的作用，当涉及高阶偏微分方程时这种作用就不再有效. 然而, 在 Fourier (于 19 世纪早期) 提出处理二阶偏微分方程的一种开拓性的且异常成功的方法中, 常微分方程仍然继续起关键作用; 他的注意力专注在**边值问题**上, 其目的是找到在相关区域的边界上合适地给定条件的偏微分方程的唯一解. 由于区域形状和边界的变化可以很大, 而且在各边界不同部分可适用的条件也可以不同, 因而没有单独一种方法能包罗万象地奏效.

对 Fourier 的天才 (不限于技术范围) 的欣赏可从他的专著《热的解析理论》(1822) 的某些内容的译文中得到, 这些内容紧随着支配连续介质中依赖或不依赖于时间的热传导现象的偏微分方程而展开.

* * * * * * *

Fourier 论平板中的热流, 选自 Théorie Analytique de la Chaleur, 1822.[①]

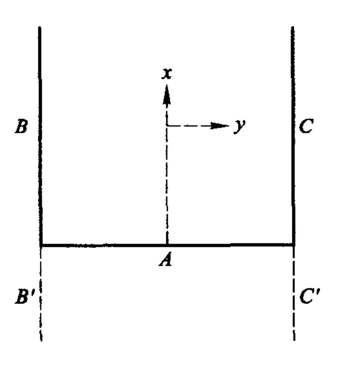
"由上面的讨论, 在固体内部关于定常或不定常流问题化归为纯分析学问题; 所以, 物理学在这个分支的进展依赖于分析学作出的进步. 我们已导出的偏微分方程包含了该理论的主要结果; 它们以最一般和简明方式表示了对很广泛的一

① 中译本:《热的解析理论》, [法] 约瑟夫 · 傅里叶著, 桂质亮译, "科学名著文库" 之一, 武汉出版社, 1993 年 10 月第 1 版. —— 校注

类现象的数值分析的必要关系式; 而且它们将自然哲学的最重要分支之一永远地和数学科学联系起来.

现在尚待发现这些方程的合适的处理方法以求得它们的全部解且使之有可能灵活地应用. 以下的问题提供了导致这样的解的分析的**第一个例子**; 据我们看, 它是用来阐明我们的方法的最合适的一个例子.

设一均匀固体物质被两个竖立的平行的无限平面 B,C 所界定, 且被垂直于 B,C 的平面 A 分成两部分; 我们考虑被这三个无限平面 A,B,C 所界定的物质 BAC. 无限固体的另一部分 $B'AC'$ 假定是一个恒定的热源, 即它的所有点都保持常温 1. 两侧固体分别由 C 和 A (延长的), B 和 A (延长的) 部分界定的区域中, 假设由某种外在方法维持在恒定的温度 0, 最后, 由 A,B 和 C 界定的固体的点 ("分子") 有初始温度零. 热将不断地从热源流入固体 BAC, 且将在那里纵向地向冷物质 B 和 C 传播, 它们将吸收大部分热、固体 BAC 的温度将逐渐升高, 但它永远不超过或达到一个最大的温度, 这最大温度对各质点是不同的. 要求确定这变化状态所趋向的温度的**最终的** (**平衡**) **状态**.



如果这最终状态是已知的, 并且后来也达到了, 那么它将保持下去. 这是区别于所有其他状态 (或温度分布) 的性质. 这样, 实际问题就是要决定无限矩形固体的持久温度, 该固体由两个冰物质 B 和 C 及一个沸水物质 A 所界定; **这种简单和初等问题的考虑是发现自然现象的定律的最可靠方法之一, 且科学史证明每种理论都是按这种方式形成的.**

为更简洁地描述同样的问题, 设有无限长的**矩形平板** BAC, 在其底边 A 上加热, 因而在底边的所有点上维持常温 1; 设垂直于底边的两个半无限边 B 和 C 上的每点上也有常温 0; 问题是决定在这平板上任一点处的稳定温度.

将该板分成两相等部分的直线 Ax 取作 x 轴, 且任意点的坐标是 x 和 y; 最后, 该平板的宽度 A 表成 $2L$, 或为简化计算用 π 表示. 如果在每一点处建立一个温度等于 $u(x,y)$ 的纵坐标, 那么在该平板上方就形成了一个直到无穷的曲面. 我们将试图确定这曲面, 它通过在 y 轴上方有单位距离 1 的一条直线, 且沿两条平行于 x 轴的无限直线切割水平的 (x,y) 平面.

对本问题中的情形应用一般的 (扩散) 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

我们略去 $\partial^2 u/\partial z^2$ 和 $\partial u/\partial t$ 两项; 这样决定所求曲面性质的方程是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{i}$$

表示固体平板 BAC 的平衡态的函数 $u(x,y)$ 必须 (a) 满足 (i), (b) 当 $y=\pm\frac{\pi}{2}$ 时不论 $x(>0)$ 是什么, 必须为零, (c) 当 $x=0$ 且 $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ 时必须等于 1. 此外当 x 很大时这函数应变得非常小, 因为所有热量来自热源 A.

我们首先寻找满足 (i) 的 x 和 y 的最简单函数; 然后我们将推广对 u 的表示式以求满足所有提出的条件. 然后我们将得到最一般的解且证明给定问题没有其他的解.

两个变量的函数常常可以简化成不那么复杂的表示式, 如果我们认为无限多值由于两变量之一或两者造成的话; 这可以在代数函数中看到, 在这一特殊情形取一个 x 的函数和一个 y 的函数的乘积的形式.

我们首先考察 u 的值是否能表成这样的一个乘积; 记 $u=F(x)f(y)$, 且代入 (i) 中后我们有

$$\frac{F''(x)}{F(x)}+\frac{f''(y)}{f(y)}=0,\quad F''(x)=\frac{d^2F}{dx^2},\quad f''(y)=\frac{d^2f}{dy^2}.$$

因此可以假设 $F''(x)/F(x)=m^2$ 和 $f''(y)/f(y)=-m^2, m$ 是任意常数, 这样假设只为求得 u 的特殊的形式. 上面的两方程揭示 $F(x)=e^{-mx}, f(y)=\cos my$. 我们不能设 m 是负的且必须排除所有包含 $e^{mx}(m>0)$ 作为因子的 u 的形式, 因为当 x 无限大时温度不能变为无限. 事实上除来自常热源 A 外无热量补充, 只有极小部分能到达离热源很远的空间区域. 其余部分愈来愈多地转向 B 和 C 的无限边缘, 且在以它们为边界的冷物质中消失.

函数 $e^{-mx}\cos my$ 中的指数 m 是未知的, 且我们可取任意正数作为这指数; 但为了在 $y=\pm\frac{\pi}{2}$ 处对所有 x,u 为零, m 必须是序列 $1,3,5,\cdots$ 中的一项; 这样第二个条件可满足.

u 的更一般的形式由类似项相加容易找到; 这样

$$u(x,y)=ae^{-x}\cos y+be^{-3x}\cos 3y+ce^{-5x}\cos 5y+\cdots \tag{ii}$$

显然函数 $u(x,y)$ 满足方程 (i) 和条件 $u\left(x,\pm\frac{\pi}{2}\right)=0$. 第三个条件尚待满足, 它表为 $u(0,y)=1$, 且非常重要的是要注意对任何 $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$, 这结果必须成立. 如果 y不是在 $-\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 之间, 对函数 $u(0,y)$ 取的值无需讨论. 因此方程 (ii) 必

须满足以下恒等式

$$1 = a\cos y + b\cos 3y + \cdots, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

无穷多个系数 $a, b, \cdots$, 由此恒等式来确定.

右边是 y 的函数, 只要 $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, 它必须等于 1. 可能会怀疑是否存在这种函数, 但这困难被下述的论证完全澄清.

为了使 (ii) 成立, (未知) 常数 $a, b, c, \cdots$ 也必须满足由相继微分所形成的方程, 所以

$$\begin{aligned} &1 = a\cos y + b\cos 3y + \cdots, \quad 0 = a\cos y + 3^2 b\cos 3y + \cdots \\ &0 = a\sin y + 3b\sin 3y + \cdots, \quad 0 = a\sin y + 3^3 b\sin 3y + \cdots \\ &\cdots \end{aligned}$$

这样的方程的个数如同未知数 $a, b, c, \cdots$ 的个数一样是无穷多的. 所涉及的问题是除了单独的一个未知数外如何消去所有其余的未知数; 结果是

$$a = 2\cdot\frac{2}{\pi}, \quad b = -2\cdot\frac{2}{3\pi}, \quad c = 2\cdot\frac{2}{5\pi}, \cdots$$

由此

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \cos y - \frac{1}{3}\cos 3y + \frac{1}{5}\cos 5y - \cdots, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.}$$

现在我们能构成所提问题的一般解,

$$\frac{\pi}{4}u(x,y) = e^{-x}\cos y - \frac{1}{3}e^{-3x}\cos 3y + \frac{1}{5}e^{-5x}\cos 5y - \cdots \tag{iii}$$

方程 (iii) 可用来决定与一边被加热的矩形中的定常运动有关的所有因素. 例如, 如果问什么是热源的消耗量, 即在一定时间内穿过底边 A 且被调换成流入冷物质 B 和 C 的那些热量, 我们注意到垂直于 y 轴的流是 $-K\frac{\partial u}{\partial x}$②. 所以, 在时间区间 dt 内流过 y 轴的一部分 dy 的热量是 $-K\frac{\partial u}{\partial x}dydt$; 且由于这温度是依赖于时间, 每单位时间的热流是 $-K\frac{\partial u}{\partial x}dy$. 为了确定流过底边的全热量, 这表示式必须在上下限 $y = -\frac{\pi}{2}$ 与 $y = \frac{\pi}{2}$ 之间积分, 或者同样地, 必须从 $y = 0$ 到 $y = \frac{\pi}{2}$ 积分再将结果加倍.

因此热源消耗量的表示式是

$$2\int_0^{\pi/2}\left(-K\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}\right)dy.$$

②因子 K 被 Fourier 用来表示平板物质的一个热学参数, 即导热率.

类似地每单位时间内穿过一个与原点距离为 x 的横截边的总热流是

$$2\int_0^{\pi/2}\left(-K\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)dy.$$

为了确定每单位时间穿过画在平板上平行于边 B 和 C 的一条直线的总热量, 我们用表示式 $-K\dfrac{\partial u}{\partial y}$, 且乘以所画直线的线元 dx, 在该直线给定边界之间对 x 积分; 这样积分

$$\int\left(-K\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx$$

表示多少热流过此直线的整个长度; 令 $y=\dfrac{\pi}{2}$ 且从 $x=0$ 到 $x=\infty$ 积分, 我们也得到每单位时间内从平板无限边缘 C 逃逸的热量. 以下我们可以将最后这个量与热源的消耗量相比较; 因为热源必须不断地补充流入物质 B 和 C 的热量. 如果在每个时刻这种补偿不存在, 温度系统会随时间而变.

方程 (iii) 给出

$$-K\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{4K}{\pi}(e^{-x}\cos y-e^{-3x}\cos 3y+\cdots);$$

乘以 dy 且从 $y=0$ 积分, 我们有

$$\frac{4K}{\pi}\left(e^{-x}\sin y-\frac{1}{3}e^{-3x}\sin 3y+\cdots\right).$$

如果 $y=\dfrac{\pi}{2}$ 且两倍该积分, 我们得到

$$\frac{8K}{\pi}\left(e^{-x}+\frac{1}{3}e^{-3x}+\frac{1}{5}e^{-5x}+\cdots\right) \tag{iv}$$

作为每单位时间内穿过平行于底边与底边相距 x 的一条直线的热量.

从 (iii) 也推导出

$$-K\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{4K}{\pi}\left(e^{-x}\sin y-e^{-3x}\sin 3y+\cdots\right),$$

所以从 $x=0$ 取的积分

$$\int\left(-K\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx$$

给出

$$\frac{4K}{\pi}\left[(1-e^{-x})\sin y-\frac{1}{3}(1-e^{-3x})\sin 3y+\cdots\right].$$

从适合于 $x=\infty$ 的值减去上面的值, 就有

$$\frac{4K}{\pi}\left(e^{-x}\sin y-\frac{1}{3}e^{-3x}\sin 3y+\cdots\right),$$

且置 $y=\frac{\pi}{2}$, 则穿过 C 上从相距 x (相对于边缘) 的点到无穷远点的那一段的热量为

$$\frac{4K}{\pi}\left(e^{-x}+\frac{1}{3}e^{-3x}+\frac{1}{5}e^{-5x}+\cdots\right);$$

可以看出它恰好是沿平行于底边与底边相距 x 的一条横截线进入平板的总量的一半.

在 (iv) 中引入 $x=0$, 结果是无限值; 其原因是有一热量的 "急流" 向外穿过 B 和 C 的邻近底边的部分; 因为接近底边的点有温度近似地等于 1, 而接近直线 B,C 的点与冷物质互相接触, 由此引起大的流."

* * * * * * *

上述 Fourier 的论证的样例显示了一种超常的技巧: 显然, 他所承诺的完全澄清在分析的核心部分建立三角级数的困难并没有实现, 而且值得注意的是他为通过进入和离开平板的热流量之间的必要平衡来验证所提出的不依赖时间的解的正确性而给出的重要的细节. Langer (兰格) 在他全面的综述文章 "Fourier 级数, 一个理论的形成和发展" (1947) 中有恰当的评注, 特别是 "Fourier 的工作对纯数学概念的发展和数学应用于科学和技术范围的扩展两者都有最深刻的影响. 然而, 这些功劳基本上来自 Fourier 的解释而不是来自他的操作. 无疑地, 这部分是因为他很不理会严格性 (与 Fourier 本人意识到的较好的标准相违背的). 对于严格性他有能力采取一些连那些天生更爱挑剔的人也根本不可能采取的概念的步骤."

如果沿前述平板问题的有限的边上的温度是可变的, 而且例如说具有对称性质, 即 $f(y)=f(-y), -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$, 现在概述的方法要求一个展开式

$$f(y)=a\cos y+b\cos 3y+\cdots,\quad -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2},$$

关于此式 Fourier 给出了系数表示式

$$a=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f(y)\cos ydy=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}f(y)\cos ydy,$$
$$b=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f(y)\cos 3ydy=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}f(y)\cos 3ydy,$$
$$\cdots$$

这里积分的第二个变形依赖于两个被积因子的偶对称性. 事实上, Euler 早于别人, 仅对某类函数作出这样的表示; Fourier 向前迈进且断言这些适用于对各自的积分有有限值的任何函数 $f(y)$ (包括不连续的!). 这样的断言在当时引起怀疑, 再次引用 Langer 所述, "即使有大量为他所证实的证明, 在很多情形, 也只是得到勉强的和不情愿的接受. 在新的推断后面蕴涵的内容是太革命性的, 以致不易被吸收. 它们要求的正是对许多不折不扣的传统概念、某些处于数学分析真正基础的概念进行根本的修改. 虽然 Fourier 对很多特定情形作了计算. 但是他并没有给出他的关于任意函数可用三角函数表示的最终断言的一般证明. 确实不能给出这样的证明, 因为忽略了加在函数上的所有先决条件, 这断言太广以致难以成立. 在严格性方面令人满意且足够一般的第一个证明是 Dirichlet (1805—1859) 于 1829 年给出的."

习　题　13

1. 用 Fourier 方法分析一个平板问题, 假设温度在边 A, C 上分别等于 1 和 0, 而温度的法向 (或 y 方向) 导数在边 B 上为零.

2. 当温度的指定值在 B, C 上等于 1 而在 A 上等于 0 时, 试研究对应的边值问题.

3. 在所考虑的个别例子中, 在平板的角点处边界数据表现出不连续性; 如果数据的指定全部是连续的, 那么温度和流量分布上会随之出现何种性质上的差异?

第十四章

本征函数与本征值

用 Fourier 方法去找二阶齐次线性偏微分方程在自变量的规定值处满足适当条件的 (唯一) 解, 要利用表成两单变量函数之积的特解; 后者要满足各自的齐次线性常微分方程, 其中包含一个参数或分离常数. 适用齐次两点边值条件的常微分方程首先受到注意, 且称为固有函数或本征函数的非平凡解的存在性是随着迄今未定的参数限制到一组固有值或本征值而定的 (例如前面概述的平板问题中, 具有特殊自变量的余弦函数). 偏微分方程的对应特解的线性组合或叠加定义一个更一般的解, 此外它必须表示在给定问题的叙述中出现的一个任意指定函数. 这种分析的交织在一起的两股线索, 分别涉及本征函数, 本征值本身和它们在描述不同性质的函数中的作用, 提出了进一步研究的课题, 可以理解这些课题已受到很大注意. 一开始讨论本征函数和本征值是一种自然的选择, 为简单起见, 考虑一种理想化情况, 即沿一固定方向, 例如说沿横截面很小且一致的同质杆的轴的热的传递. 对不定常和非均匀温度 $u(x,t)$ 的有关偏微分方程, 即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{14.1}$$

有两个自变量, 轴坐标 x 和时间 t; 这时常数 k 与不同的物质参数有关, 即

$$k = \frac{\kappa}{\rho c}, \tag{14.2}$$

这里 κ, ρ, c 分别表示热传导率, 密度 (每单位长度的质量) 和比热. 第一个参数

进入沿正 x 方向热传递的时间速率或局部热流量的表示式

$$j(x,t) = -\kappa\frac{\partial u}{\partial x} \tag{14.3}$$

而另外两个出现于此杆的每单位长度的热容量的表示式 ρcu 中. 实质上, 偏微分方程 (14.1) 直接将无穷小区间内热容量的瞬时变化与其两端点的同步流量差联系起来. 在形成所谓扩散方程 (14.1) 的定解问题时, 一个在 $t=0$ 的初始条件 (I.C.) 和在杆的两端点 $x=0,L$ 的一对边界条件 (B.C.) 需要规定.

设

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L \tag{14.4}$$

表示初始条件, 这里 $f(x)$ 是有可积性质的一个广泛函数类中的一个代表, 且又特别地假定一对齐次边界条件, 即

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t > 0. \tag{14.5}$$

现在假设: 当沿 x 轴的线段 $0 < x < L$ 和线段 $x=0, L, 0 < t < t_P$, 数据或 u 的值融入到 (14.1) 的解中时, 在点 $P(x_P, t_P > 0)$ (见图 29) u 的唯一的和可决定的值即作为结果得出. 取 (14.1) 的解的一种形式, 它有单变量因子, 即

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{14.6}$$

图 29

然后, 代入 (14.1) 和重排后, 出现

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{kT}\frac{dT}{dt} = -\lambda; \tag{14.7}$$

由于这关系式的前面两部分描述自变量 (x,t) 的函数, 它们的公共值 $-\lambda$ 必须是一个纯数量. 援引边值条件 (14.5), 就提供了参数地依赖于分离常数 λ 的函数 $X(x,\lambda)$ 的齐次方程组

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda\right)X(x,\lambda) = 0, \quad 0 < x < L, \tag{14.8}$$
$$X(0,\lambda) = 0, \quad X(L,\lambda) = 0,$$

对 λ 的任意值它有平凡解 $X(x,\lambda) \equiv 0$, 且偏微分方程 (14.1) 的对应解 $u=0$ 显然没有意义. 为了得到方程组 (14.8) 的非平凡和有意义的解, 首先注意到以 $X(x,\lambda)$ 的微分方程的全部解可表成形式 (不管 λ 的值如何)

$$X(x,\lambda) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}, \tag{14.9}$$

这里第二项中包括一个数值因子 $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$ 保证

$$X(x,0) = A + Bx, \tag{14.10}$$

也表示 $\lambda = 0$ 时的通解; 如果这因子从 (14.9) 中略去, 所得结果

$$X(x,0) = A$$

显然没有 (14.10) 那么一般.

和规定的边界条件 $X(0,\lambda) = 0$ 一起, 从 (14.9) 直接演绎出的结果是 $A = 0$, 且因此保证满足另一边界条件 $X(L,\lambda) = 0$ 的要求取形式

$$B\frac{\sin\sqrt{\lambda}L}{\sqrt{\lambda}} = 0. \tag{14.11}$$

B 不能取零值, 因为当 $A = B = 0$ 时, $X = 0$; λ 也不能取零值, 因为

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\sin\sqrt{\lambda}L}{\sqrt{\lambda}} = L$$

与 (14.11) 矛盾. 所以 (14.11) 的合适的变形是

$$\sin\sqrt{\lambda}L = 0, \quad \lambda \neq 0, \tag{14.12}$$

且这式子用以确定 λ 的可容许值; 显然

$$\sqrt{\lambda_n}L = n\pi, \quad n = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

或

$$\lambda_n = (n\pi/L)^2, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{14.13}$$

齐次方程组 (14.8) 的对应解, 除了一个事先不能固定的标量因子外, 是

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{14.14}$$

总之, 方程组 (14.8) 的仅有的非平凡解称为固有函数或本征函数, 有形式 (14.14) 且每一函数对应集合 (14.13) 中的一个个别的固有值或本征值; 此外, 该方程组只有平凡解 $X \equiv 0$, 除非 $\lambda = \lambda_n$. 有一个涉及不同本征函数的重要关系式, 即

$$\int_0^L X_m(x)X_n(x)dx = 0, \quad m \neq n. \tag{14.15}$$

容易验证如下, 由于

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx \\
&=\frac{1}{2}\int_0^L\left\{\cos\frac{(m-n)\pi x}{L}-\cos\frac{(m+n)\pi x}{L}\right\}dx \\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{(m-n)\pi x}{L}}{(m-n)\frac{\pi}{L}}-\frac{\sin\frac{(m+n)\pi x}{L}}{(m+n)\frac{\pi}{L}}\right]_{x=0}^{x=L}=0, m\neq n;
\end{aligned}
$$

此外, 如 $m=n$,

$$\int_0^L X_n^2(x)dx=\int_0^L \sin^2\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{L}{2}. \tag{14.16}$$

从 (14.7) 导出的对有关函数 $T_n(t)$ 的齐次常微分方程

$$dT_n/dt+k\lambda_n T_n=0,\quad n=1,2,\cdots$$

被

$$T_n(t)=e^{-k\lambda_n t}=e^{-k(n\pi/L)^2t}$$

所满足, 这样函数

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-k(n\pi/L)^2t},\quad n=1,2,\cdots \tag{14.17}$$

表示该偏微分方程依从边界条件 (14.5) 的特解. 在构成带有可任意处理的系数 c_n 的 u_n 的线性组合后就可得到更一般的解, 即

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-k(n\pi/L)^2t}, \tag{14.18}$$

且这把 (任意) 给定的初始温度 $f(x)$ 与一个 Fourier 正弦级数联系起来, 因为

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi x}{L},\quad 0<x<L. \tag{14.19}$$

用 $X_m(x)=\sin\frac{m\pi x}{L}$ 乘 (14.19), 随后在区间 $0<x<L$ 上逐项积分, 由于 (14.15),(14.16), 就得出各系数的表示式

$$c_m\frac{L}{2}=\int_0^L f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx,\quad m=1,2,\cdots \tag{14.20}$$

关系式 (14.18),(14.20) 联合提供了所述扩散方程边/初值问题的一个显式解.

当 $t \to \infty$ 时展开式 (14.18) 中的每项的量趋向零, 因此其总和也趋于零, 所以

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0, \quad 0 < x < L,$$

这简单地表明开始时出现于杆中的所有热

$$Q = \int_0^L \rho c f(x) dx$$

最终在两端点处 $(x = 0, x = L)$ 逃逸, 该处温度保持为零.

为了得到对所提出的解的自相容性的某些保证, 首先注意 (14.18),(14.19) 结合在一起的形式,

$$u(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-k(n\pi/L)^2 t}\int_0^L f(x')\sin\frac{n\pi x'}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx',$$

其次, 在端点 $x = 0, L$ 的瞬时外向流量的表示式分别是

$$\kappa\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 2\frac{\kappa}{L}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-k(n\pi/L)^2 t}\frac{n\pi}{L}\int_0^L f(x')\sin\frac{n\pi x'}{L}dx'$$

和

$$-\kappa\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 2\frac{\kappa}{L}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-k(n\pi/L)^2 t}\frac{n\pi}{L}(-1)^{n+1}\int_0^L f(x')\sin\frac{n\pi x'}{L}dx'.$$

最后两式对时间积分决定从两端点的热的总流出, 即

$$Q_0 = \int_0^{\infty}\kappa\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}dt = 2\frac{\kappa}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\int_0^L f(x')\sin\frac{n\pi x'}{L}dx'$$

和

$$Q_L = \int_0^{\infty}-\kappa\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L}dt = 2\frac{\kappa}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\int_0^L f(x')\sin\frac{n\pi x'}{L}dx'.$$

因此

$$\begin{aligned}Q_0 + Q_L &= 2\frac{\kappa}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}(1+(-1)^{n+1})\int_0^L f(x')\sin\frac{n\pi x'}{L}dx' \\ &= 4\frac{\kappa}{k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)\pi}\int_0^L f(x')\sin\frac{(2m+1)\pi x'}{L}dx',\end{aligned}$$

再利用从表示式 (14.19),(14.20) 对特殊选择的 $f = 1$ 所得的结果为

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)\frac{\pi x}{L}}{2m+1}, \quad 0 < x < L,$$

最后证明是

$$Q_0 + Q_L = \frac{\kappa}{k}\int_0^L f(x')dx' = \int_0^L \rho c f(x)dx = Q,$$

这正是所要求的.

如果边界条件 (14.5) 换成另一对齐次条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x = 0, L, \tag{14.21}$$

这表示在杆的两 (绝热的) 端点热流为零, 沿此杆的温度的对应方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, t > 0, \tag{14.22}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x = 0, L$$

和

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

能以前面方式来分析. 从分离变量式 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 开始, 发现坐标因子 $X(x,\lambda)$ 必须服从关系式

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda\right) X(x,\lambda) = 0, \quad 0 < x < L \tag{14.23}$$

和

$$\frac{dX}{dx} = 0, \quad x = 0, L.$$

微分 $X(x,\lambda)$ 的一般式 (14.9) 后, 结果为

$$\frac{dX}{dx} = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + B\cos\sqrt{\lambda}x,$$

为了保证在 $x = 0$ 的条件 $dX/dx = 0$, 由此导出 B 的值为零. 剩下的在 $x = L$ 的边界条件 $dX/dx = 0$ 要求

$$A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}L = 0$$

或简单地

$$\sin\sqrt{\lambda}L = 0, \tag{14.24}$$

因为联合指定 $A = B = 0$ 得出的只有平凡解 $X \equiv 0$. 本征值方程 (14.24) 有显式解, 即

$$\lambda_n = (n\pi/L)^2, \quad n = 0, 1, \cdots \tag{14.25}$$

且有相关的非平凡解或方程组 (14.23) 的本征函数

$$X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, \cdots \tag{14.26}$$

借助于本征函数的展开式,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t} \tag{14.27}$$

所包含的各项满足扩散型齐次偏微分方程和特殊的边界条件 (14.21); 当加上初始条件 $u(x,0) = f(x)$ 时, 对函数 $f(x)$ 的 Fourier 余弦级数表示式出现, 即

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad 0 < x < L. \tag{14.28}$$

利用本征函数的积分性质, 即

$$\int_0^L \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n = 0, \\ \dfrac{L}{2}, & m = n \neq 0, \end{cases} \tag{14.29}$$

(14.28) 中的系数 c_n 可以分别地决定; 这样

$$c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx,\ c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\ n = 1, 2, \cdots \tag{14.30}$$

且 (14.27),(14.30) 联合地刻画所考虑问题的解.

从 (14.27) 推断出的渐近性质

$$u(x,t) \sim c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \quad 当\ t \to \infty$$

对应于沿整个杆的最终为均匀的温度分布, 由于在绝缘的两端点, 没有热能够逃逸, 且非均匀的分布将趋向其平均值, 这是一个显然可预见到的结果.

在刚才讨论的两个例子中, 分别带零温度或零流量的边界条件, 所有的本征值是非负的, $\lambda_n \geqslant 0$, 且时间因子

$$T_n(t) = e^{-k\lambda_n t}$$

出现在扩散方程的特解中,

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t),$$

导致在 $t \to \infty$ 的极限下 u_n 为零或有界的性态. 显然, 如果杆的温度显示随时间不断增长, 则热量必须通过该杆的端点补充, 且这样的一个性质要求至少存在一个负本征值.

为证明后一种可能性, 考虑特定的一组方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, t > 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + hu = 0, \quad x = 0; u = 0, x = L, t > 0 \tag{14.31}$$

和

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L;$$

这里在 $x = 0$ 的 (新) 边界条件改写成形式

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = hu,$$

如果 $h > 0$, 则导致正流量进入杆中. 用通常假设的解的乘积形式

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{14.32}$$

偏微分方程的变量分离法提供了显式表示式

$$T(t) = e^{-k\lambda t}$$

和函数 $X(x,\lambda)$ 的隐式组

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda\right)X(x,\lambda) = 0, \quad 0 < x < L, \tag{14.33}$$

$$\frac{dX}{dx} + hX = 0, x = 0; \quad X = 0, x = L,$$

这里 λ 起参数作用. 为得到齐次组 (14.33) 的非平凡解即本征函数, 将把 $X(x,\lambda)$ 的一般表示式 (14.9)

$$X(x,\lambda) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}, \quad 0 < x < L$$

用到现在的边界条件上, 这产生一对关于 A, B 的齐次线性方程

$$h \cdot A + B = 0, \tag{14.34}$$

$$\cos\sqrt{\lambda}L \cdot A + \frac{\sin\sqrt{\lambda}L}{\sqrt{\lambda}} \cdot B = 0.$$

这方程组的平凡解 $A=B=0$ 导致 $X=0$. 它有非平凡解当且仅当

$$\begin{vmatrix} h & 1 \\ \cos\sqrt{\lambda}L & \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}L}{\sqrt{\lambda}} \end{vmatrix} = 0$$

或

$$h\frac{\sin\sqrt{\lambda}L}{\sqrt{\lambda}} - \cos\sqrt{\lambda}L = 0, \tag{14.35}$$

它是 λ 的本征值方程. 如果如下面所假设的,

$$\alpha = hL \neq 1, \tag{14.36}$$

则值 $\lambda = 0$ 与 (14.35) 不相容.

当 (14.35) 成立时, 方程组 (14.34) 只是决定比值

$$\frac{B}{A} = -h = -\sqrt{\lambda}\cot\sqrt{\lambda}L.$$

且该方程组的非平凡解在先略去任意标量因子 A 再略去因子 $\csc\sqrt{\lambda}L$ 后, 有形式

$$X(x,\lambda) = \sin\sqrt{\lambda}(L-x). \tag{14.37}$$

现在要求对本征值方程 (14.35) 作某些考察, 将所讨论的方程 (14.35) 换成

$$\tan\xi = \frac{\xi}{\alpha} \tag{14.38}$$

是方便的, 这里包含了无量纲量

$$\xi = \sqrt{\lambda}L. \tag{14.39}$$

由于 ξ 的正切函数和线性函数 (两者都有奇对称性), 有无穷多个公共值 (见图 30), 可得出结论 (不管 α 的正负号): 超越方程 (14.38) 有无穷多个根, 即

$$\pm\xi_1, \pm\xi_2, \cdots$$

它们对应于正本征值的集合

$$\lambda_n = (\xi_n/L)^2, n = 1, 2, \cdots, \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$$

此外, 每一本征值与一个本征函数相联系

$$X_n(x,\xi_n) = \sin\xi_n\left(1-\frac{x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \cdots \tag{14.40}$$

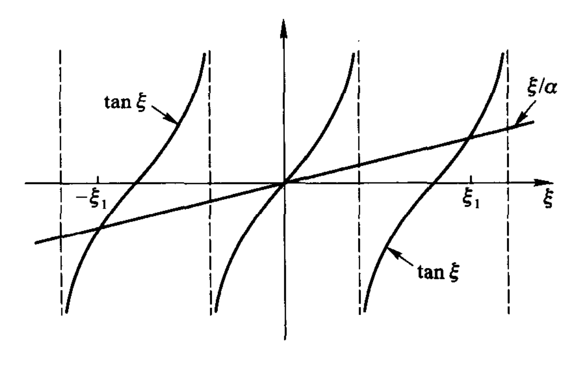


图 30

且该偏微分方程的满足 (14.31) 中假设的两边界条件的所有有关的解

$$u_n(x,t) = X_n(x)e^{-k(\xi_n/L)^2 t} \tag{14.41}$$

当时间变量 t 变得任意大时都趋向于零.

由于所考虑的偏微分方程的分离变量解中的特征指数因子 $T(t) = \exp(-k(\xi/L)^2 t)$ 当 $\xi^2 < 0$ 时将随时间递增, 记

$$\xi = i\tau, \quad \tau\text{为实数} \tag{14.42}$$

来开始寻找负本征值, 且考察由 (14.38) 所得到的式子, 即

$$\tanh\tau = \frac{\tau}{\alpha}, \tag{14.43}$$

这里包含 (非周期的) 双曲正切函数. 图形的展示 (见图 31) 揭示以下事实: (i) 当 $\alpha < 1$ 或 $\alpha < 0$ 时超越方程 (14.43) 没有根 (除了 $\tau = \xi = 0$, 伴随着方程组 (14.33) 的平凡解 $X \equiv 0$) 和 (ii) 当 $\alpha > 1$ 时有一对根 $\pm\tau^*$, 它对应于同一负本征值

图 31

$$\lambda^* = -(\tau^*/L)^2.$$

相关联的本征函数

$$X^*(x,\tau^*) = \sinh\tau^*\left(1 - \frac{x}{L}\right) \tag{14.44}$$

与前面的类型 (14.40) 有很大不同. 以双曲函数取代前面的三角函数, 有 (14.41) 的对应部分

$$u^*(x,t) = X^*(x,\tau^*)e^{k(\tau^*/L)^2 t}$$

描述该偏微分方程的一个特解, 其大小随时间稳步递增. 所以后者最终在特解的总和

$$u(x,t) = c^* X^*(x,\tau^*)e^{k(\tau^*/L)^2 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n(x,\xi_n)e^{-k(\xi_n/L)^2 t} \tag{14.45}$$

中占主导地位, 这些特解聚集在一起目的在于满足一个初始条件, 即

$$u(x,0) = f(x) = c^* X^*(x,\tau^*) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n(x,\xi_n), \quad 0 < x < L. \tag{14.46}$$

这样, 一旦系数 $c^*, c_n, n = 1, 2, \cdots$ 从这个新的 Fourier 展开式中推演出来的话, (14.45) 就决定了该问题的受欢迎的解. 以前, 有关的展开系数一个一个地得以刻画出来借助了一个本征函数性质, 即两个不同本征函数之积的积分为零.

为了证明对现在的函数 (14.40),(14.46) 同样的性质成立, 而无须依赖于它们的实际形式, 分别以 X_n, X_m 乘方程

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda_m\right) X_m = 0, \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda_n\right) X_n = 0, \quad 0 < x < L,$$

两式相减且注意由此所得结果, 即

$$\begin{aligned}(\lambda_m - \lambda_n)X_m(x)X_n(x) &= X_n \frac{d^2}{dx^2} X_m - X_m \frac{d^2}{dx^2} X_n \\ &= \frac{d}{dx}\left[X_n \frac{d}{dx} X_m - X_m \frac{d}{dx} X_n\right].\end{aligned}$$

其次, 在 $x = 0, x = L$ 之间积分且利用边界条件

$$X_m(L) = X_n(L) = 0,$$
$$\left(\frac{d}{dx} X_m\right)_{x=0} = -hX_m(0), \quad \left(\frac{d}{dx} X_n\right)_{x=0} = -hX_n(0)$$

推导出

$$\begin{aligned}(\lambda_m - \lambda_n)\int_0^L X_m(x)X_n(x)dx &= X_n \frac{d}{dx} X_m - X_m \frac{d}{dx} X_n\Big|_{x=0}^{x=L} \\ &= X_m(0)\left(\frac{d}{dx} X_n\right)_{x=0} - X_n(0)\left(\frac{d}{dx} X_m\right)_{x=0} \\ &= X_m(0)(-hX_n(0)) - X_n(0)(-hX_m(0)) = 0,\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^L X_m(x)X_n(x)dx = 0, \quad m \neq n. \tag{14.47}$$

显然, 同理可证

$$\int_0^L X^*(x)X_n(x)dx = 0, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{14.48}$$

因为 X^*, X^n 的本征值都是不同的.

这样, 为了决定系数 c^*, c_n, 在 (14.46) 中乘以各本征函数, 逐项积分且应用 (14.47),(14.48) 得出表示式

$$c^* \int_0^L X^{*2}(x)dx = \int_0^L f(x)X^*(x)dx \tag{14.49}$$

和

$$c_n \cdot \int_0^L X_n^2(x)dx = \int_0^L f(x)X_n(x)dx, \quad n = 1, 2, \cdots$$

而且由此完成了对解 (14.45) 的确定. 直接计算包含本征函数平方的积分的值, 证明

$$\int_0^L X^{*2}(x, \tau^*)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sinh 2\tau^*}{2\tau^*} - 1\right) \tag{14.50}$$

和

$$\int_0^L X_n^2(x, \xi_n)dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sin 2\xi_n}{2\xi_n}\right),$$

这些结果确实是非负的.

应当指出: 分别在 $x = 0$ 和 $x = L$ 处进入和离去该杆的瞬时热流量之间的比值, 按照从 (14.45) 演绎出的温度的渐近性状, 即

$$u(x,t) \sim c^* X^*(x, \tau^*) e^{k(\tau^*/L)^2 t}, \quad 当\ t \to \infty,$$

最终是一个大于 1 的量, 即

$$\frac{(\partial u/\partial x)_{x=0}}{(\partial u/\partial x)_{x=L}} = \cosh \tau^*,$$

这是要求整个杆上温度上升所必需的.

(14.45) 的级数解对中等大小到大的 t 值迅速收敛, 所以只取前面的少数几项就能得到精确的估计. 对所有本征值的简单解析表示式是不可行的, 虽然数值结果可用; 附表包含关于超越方程 $\xi \cot \xi = 0$ 的前六个根, 即 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6$

的有关信息:

α	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6
1.0	0	4.4934	7.7253	10.9041	14.0662	17.2208
0.95	0.3854	4.5045	7.7317	10.9087	14.0697	17.2237
0.90	0.5423	4.5157	7.7382	10.9133	14.0733	17.2266
0.80	0.7593	4.5379	7.7511	10.9225	14.0804	17.2324
0.70	0.9208	4.5601	7.7641	10.9316	14.0875	17.2382
0.60	1.0528	4.5822	7.7770	10.9408	14.0946	17.2440
0.50	1.1656	4.6042	7.7899	10.9499	14.1017	17.2498
0.40	1.2644	4.6261	7.8028	10.9591	14.1088	17.2556
0.30	1.3525	4.6479	7.8156	10.9682	14.1159	17.2614
0.20	1.4320	4.6696	7.8284	10.9774	14.1230	17.2672
0.10	1.5044	4.6911	7.8412	10.9865	14.1301	17.2730
0	1.5708	4.7124	7.8540	10.9956	14.1372	17.2788
−0.1	1.6320	4.7335	7.8667	11.0047	14.1443	17.2845
−0.5	1.8366	4.8158	7.9171	11.0409	14.1724	17.3076
−1.0	2.0288	4.9132	7.9787	11.0856	14.2075	17.3364
−5.0	2.6537	5.4544	8.3914	11.4086	14.4699	17.5562

****

习 题 14

1. 在特殊情形

$$\text{i) } h = 0, \quad \text{或} \quad \text{ii) } hL = 1$$

下研究由方程组 (14.31) 定义的问题, 且检查解的相容性.

2. 考虑带有以下规定的扩散方程的边/初值问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, t > 0,$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right|_{x=0} - hu(0,t) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right|_{x=L} + hu(L,t) = 0, \quad t > 0$$

和

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L,$$

其中包含一个 (公共系数) $h>0$. 如果 $u(x,t)=X(x,\lambda)T(t,\lambda)$ 且

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda\right)X(x,\lambda)=0,\quad 0<x<L,$$

证明边值条件蕴涵对 λ 的本征值方程有形式

$$\tan\sqrt{\lambda}L=\frac{2h\sqrt{\lambda}}{\lambda-h^2}. \tag{*}$$

令 $\sqrt{\lambda}L=2\xi$ 且将 (*) 转换成

$$\frac{\tan\xi}{1-\tan^2\xi}=\frac{2\alpha\xi}{4\xi^2-\alpha^2}, \tag{**}$$

这里 $\alpha=hL$, 其次证明 (**) 被满足当且仅当以下关系式之一成立

$$\xi\tan\xi=\frac{1}{2}\alpha,\quad \xi\cot\xi=-\frac{1}{2}\alpha.$$

讨论相关的本征函数并利用这些本征函数来得到满足初始条件的解的形式.

3. 考察带参数的齐次组

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda\right)X=0,\quad 0<x<L,$$

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=0}-hX(0)=0,\quad \left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=L}+HX(L)=0$$

是否容许本征值 $\lambda=0$, 如果容许, 对应的本征函数是什么? 描述与非零本征值相联系的本征函数且验证以下命题: i) 所有本征值是正的当且仅当 $h+H>0, h+H+hH>0$; ii) 如果 $h+H+hH<0$, 则存在单个的负本征值; iii) 如果 $h+H<0, h+H+hH>0$, 则有两个负本征值.

4. 当一个负本征值出现时, 在 $t\to\infty$ 的极限下, 热传导方程就会有一个无界解. 什么条件可用来消除这样无界的性状? 给出与方程组 (14.31) 相关的一个显式的例子.

5. 一对函数 $X_m(x), X_n(x)$ 满足具有不同参数 λ_m, λ_n 的同样的常微分方程, 即

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda_m\right)X_m=0$$

和

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda_n\right)X_n=0,\quad 0<x<L.$$

与 $X_m(x), X_n(x)$ 有关的方程, 即

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_0^L X_m(x) X_n(x) dx = \left[X_n \frac{dX_m}{dx} - X_m \frac{dX_n}{dx} \right] \Bigg|_{x=0}^{x=L} \qquad (*)$$

可以用来计算积分值

$$\int_0^L X_n^2(x) dx,$$

通过将 m 作为连续变量考虑 $m \to n$ 的极限情形. 为此, 写出

$$X_m(x, \lambda_m) = X_n(x, \lambda_n) + (\lambda_m - \lambda_n) \left. \frac{\partial}{\partial \lambda_m} X_m(x, \lambda_m) \right|_{m=n} + \cdots$$

和

$$\frac{\partial}{\partial x} X_m(x, \lambda_m) = \frac{\partial}{\partial x} X_n(x, \lambda_n) + (\lambda_m - \lambda_n) \frac{\partial}{\partial x} \left. \frac{\partial}{\partial \lambda_m} X_m(x, \lambda_m) \right|_{m=n} + \cdots$$

这里要省略的项是 $(\lambda_m - \lambda_n)$ 的高次幂, 且验证 $(*)$ 蕴涵

$$\int_0^L X_n^2(x) dx = X_n(x, \lambda_n) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \lambda_m} X_m(x, \lambda_m)_{m=n} - \left. \frac{\partial}{\partial \lambda_m} X_m(x, \lambda_m)_{m=n} \frac{\partial}{\partial x} X_n(x, \lambda_n) \right|_{x=0}^{x=L}.$$

用上面的等式去证实结果 (14.50).

第十五章

本征函数与本征值 (续)

本征函数和本征值迄今是以一对一方式成对出现的, 虽然不必总是这种情形; 特别地, 当包含范围的两个端点而不是分开的边界条件起作用时, 与同一个本征值相联系的线性无关的本征函数出现了. 为了详细说明一个特定的例子, 想像长度为 $2L$ 的直杆变形成封闭的圆环且将圆周坐标 x 的原点放在 O 点处; 则该环互补的一半上的点分别按不等式

$$0 < x < L, \quad -L < x < 0$$

聚集在一起 (见图 32). 如果该环有一初始温度分布 $f(x), -L < x < L$, 决定以后圆环上各点温度的方程组包括

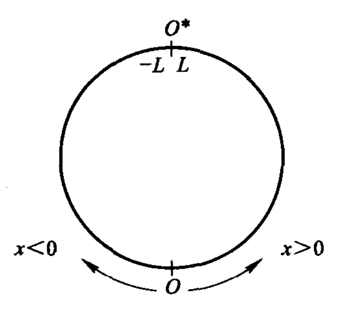


图 32

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -L < x < L, t > 0, \tag{15.1}$$

$$u(-L,t) = u(L,t), \quad \left.\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right|_{x=-L} = \left.\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right|_{x=L}, \quad t > 0$$

和

$$u(x,0) = f(x), \quad -L < x < L;$$

这里具有周期性质的边界条件, 只不过是表示了温度和热流量两者在 (单个的) 点 O^* 处的连续性, O^* 位于从 O 引出的直径对面的端点上.

该偏微分方程的解

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

按照周期边界条件和齐次方程组

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda\right) X = 0, \quad -L < x < L, \tag{15.2}$$

$$X(-L) = X(L), \quad \left.\frac{d}{dx}X(x)\right|_{x=-L} = \left.\frac{d}{dx}X(x)\right|_{x=L}$$

的解相联系. 再一次援引对 X 的常微分方程的通解, 即

$$X(x,\lambda) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}, \quad \frac{d}{dx}X = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + B\cos\sqrt{\lambda}x$$

且注意到 $\cos\sqrt{\lambda}x, \sin\sqrt{\lambda}x$ 关于 $x = 0$ 的偶、奇对称性, 边界条件要求

$$\begin{cases} 0 \cdot A + 2B\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}L}{\sqrt{\lambda}} = 0, \\ 2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}L \cdot A + 0 \cdot B = 0. \end{cases} \tag{15.3}$$

排除 $A = B = 0$ 和相应得到的方程组 (15.2) 的平凡解的可能性, 条件

$$\begin{vmatrix} 0 & 2\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}L}{\sqrt{\lambda}} \\ 2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}L & 0 \end{vmatrix} = -4\sin^2\sqrt{\lambda}L = 0$$

必须成立, 由此给出了一组非负本征值

$$\lambda_n = (n\pi/L)^2, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

(15.3) 中第一个和第二个方程不限制 A 和 B; 因此, 如果 $\lambda_n \neq 0, n = 1, 2, \cdots$, 两个无关的本征函数出现了, 即

$$X_n^{(c)}(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad X_n^{(s)}(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{15.4}$$

如果 $\lambda = 0$, (15.3) 的第一个方程推导出 $B = 0$ 且对应的本征函数为一个常量, 例如

$$X_0 = 1, \tag{15.5}$$

且这是明显地包含在 (15.4) 的集合 $\{X_n^{(c)}\}$ 中, 只要允许 n 取从 0 到 ∞ 的所有整数值.

该偏微分方程满足周期边界条件的特解, 即

$$1, \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \quad \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}, n = 1, 2, \cdots$$

构成更一般的解

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) e^{-k(n\pi/L)^2 t} \tag{15.6}$$

的基, 当 a_n, b_n 是对 $f(x)$ 的 Fourier 级数表示系数时, 即

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad -L < x < L, \tag{15.7}$$

(15.6) 与初始条件一致. a_0, a_m, b_m 的确定, 即

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) dx, \\ a_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx, \\ b_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx, \quad m = 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{15.8}$$

是通过 (15.7) 式依次用 1, $\cos \frac{m\pi x}{L}, \sin \frac{m\pi x}{L}$ 相乘, 在 $x = -L$ 和 $x = L$ 之间逐项积分, 且考虑到通过积分表示的本征函数的性质

$$\int_{-L}^{L} 1 \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{m\pi x}{L} \\ \sin \frac{m\pi x}{L} \end{pmatrix} dx = 0, \quad m \neq 0;$$

$$\int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad \text{所有 } m, n;$$

$$\int_{-L}^{L} \begin{pmatrix} \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \\ \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \end{pmatrix} dx = 0, \quad m \neq n$$

而得到的.

圆环上的温度就这样经由 (15.7),(15.8) 形式地决定了, 而其渐近性状

$$u(x,t) \sim a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) dx, \quad \text{当 } t \to \infty$$

证实了预期的所有点的温度和热变成相等的趋势. 最后也许已经注意到, 如果初始温度有关于点 $x = 0$ 的对称分布, 则所有系数 b_n 为零.

修正的扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - lu, \quad k, l > 0 \tag{15.9}$$

对 (通过第三项到周围环境的) 局部热损耗以及 (通过其他项) 的杆内温度的重新分布作出了解释. 设需要和条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} + hu = 0,\ x = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ x = L \tag{15.10}$$

及

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L.$$

一起求解 (15.9). 照例假设

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{15.11}$$

且分离变量的结果是用参数 λ 表示的方程

$$\frac{d^2x}{dx^2} + \lambda X = 0, \quad 0 < x < L$$

和

$$\frac{dT}{dt} + (l + k\lambda)T = 0, \quad t > 0.$$

因此

$$T(t) = e^{-lt}e^{-k\lambda t}, \tag{15.12}$$

其中 λ 的容许值要保证以下齐次方程组存在非平凡解:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda X = 0, \quad 0 < x < L; \\ &\left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=0} + hX(0) = 0, \quad \left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=L} = 0. \end{aligned} \tag{15.13}$$

有关的解或本征函数有形式

$$X(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}(L - x)$$

且描述本征值 λ 的方程是

$$\tan\xi = -\frac{\alpha}{\xi}, \tag{15.14}$$

这里

$$\xi = \sqrt{\lambda}L \tag{15.15}$$

和

$$\alpha = hL(\gtrless 0).$$

可用图解法推断出 (15.14) 存在无穷多个实根, 且符号相反的这些成对根 (归因于 (15.14) 两边的函数的奇对称性)

$$\pm\xi_1, \pm\xi_2, \cdots$$

确定了一组非负本征值,

$$\lambda_n = (\xi_n/L)^2, \quad n = 1, 2, \cdots$$

特别地, 对 $\alpha < 0$,

$$0 < \xi_1 < \frac{1}{2}\pi,$$

$$n\pi < \xi_n < n\pi + \frac{1}{2}\pi, \quad n \neq 1.$$

为了探索虚根的可能性, 记 $\xi = i\tau$ 且注意由此得到的 (15.14) 的变形

$$\tanh\tau = \frac{\alpha}{\tau}; \qquad (15.16)$$

显而易见 (见图 33) 当 $\alpha > 0$ 时有两个根 $\pm\tau^*$, 而当 $\alpha < 0$ 时无根.

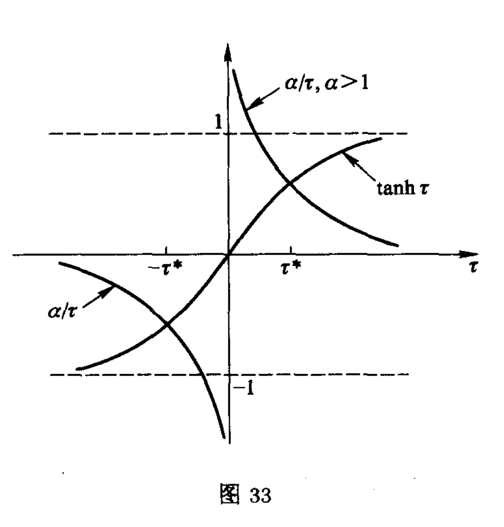


图 33

与负本征值

$$\lambda^* = -(\tau^*/L)^2$$



相伴的时间因子, 即

$$T^*(t, \tau^*) = e^{-lt}e^{k(\tau^*/L)^2 t}$$

保持为常数如果 $(\tau^*/L)^2 = l/k$ 或

$$\tau^* = L\sqrt{l/k}, \qquad (15.17)$$

且方程组 (15.13) 的对应解是

$$X(x) = \cosh\sqrt{\frac{l}{k}}(L - x);$$

上面的函数表示偏微分方程 (15.9) 符合边界条件 (15.10) 的定常 (与时间无关) 解. 由于 (15.16) 定义 τ^* 作为 α 的单值函数, 特殊的规定 (15.17) 决定一个值, 例如说 $\overline{\alpha}$; 而且通过观察 $\frac{\alpha}{\tau}$ 曲线的样子是如何随参数 α 的变化而改变的情况就指

出了对应关系

$$\alpha < \overline{\alpha}, \quad \tau^* < L\sqrt{\frac{l}{k}},$$
$$\alpha > \overline{\alpha}, \quad \tau^* > L\sqrt{\frac{l}{k}}.$$

总之, 当 $h>0$ 时, 存在负本征值 λ 且在 $x=0$ 处热进入该杆; 如果 $\alpha<\overline{\alpha}$, 当 $t\to\infty$ 时函数 $T^*(t)$ 趋于零, 且杆的整体温度随时间减小, 反映了与沿 $0<x<L$ 热的全部流出相比, 在 $x=0$ 热的流入较小. 另一方面, 如果 $\alpha>\overline{\alpha}, T^*(t)$ 的大小随时间而增大反映了在一端点引入的热超过其他处损失的热.

习 题 15

1. 当圆环内部温度 $u(x,t)$ 满足偏微分方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - lu, \quad -L<x<L, t>0$$

时分析圆环上的温度分布. 注意如果

$$u(x,t) = v(x,t)e^{-lt},$$

则如此定义的辅助函数 $v(x,t)$ 满足比较简单的扩散方程

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad -L<x<L, t>0.$$

求满足特殊初始值

$$u(x,0) = \begin{cases} U_0, & 0<x<L \\ 0, & -L<x<0 \end{cases}$$

的解, 且决定 $t=0$ 和 $t=\infty$ 之间 $2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}$ 的积分, 它与该环的初始较暖与较冷的两半之间热交换纯总量成比例.

2. 通过详细说明如何考虑初始条件来完成对方程组 (15.9),(15.10) 的分析.

3. 如果临界条件 (15.17) 成立而且不论初始条件如何最终都得到定常态, 证明对应的温度 $u(x)$ 满足关系式

$$khu(0) = \int_0^L lu(x)dx$$

并且解释这一事实.

4. 考虑一个扩散问题, 其具体规定包括

$$\frac{\partial n}{\partial t}=D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}+v\frac{\partial n}{\partial x},\quad 0<x<L,t>0,$$

$$D\frac{\partial n}{\partial x}+vn=0,\quad x=0,L$$

和

$$n(x,0)=f(x),\quad 0<x<L;$$

这里 $n(x,t)$ 可解释成在具有完全反射边界平面的溶液中重粒子的一维浓度, 其重新分布受外力即重力的影响. 设

$$n(x,t)=u(x,t)e^{-vx/2D}e^{-v^2t/4D}$$

且验证 $u(x,t)$ 满足方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<L,t>0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{v}{2D}u=0,\quad x=0,L$$

和

$$u(x,0)=f(x)e^{vx/2D},\quad 0<x<L.$$

引入分离变量表示式

$$u(x,t)=X(x)T(t),$$

且证明一族本征函数

$$X_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{L}-\frac{vL}{2\pi nD}\sin\frac{n\pi x}{L},\quad n=1,2,\cdots$$

和另外一个具有不同函数形式的本征函数

$$X_0(x)=e^{-vx/2D}$$

的存在性.

证明在 $0<x<L$ 上任意两个不同本征函数的乘积的积分等于零, 且用此性质去描述怎样满足初始条件; 在

$$n(x,0)=f(x)=C\ (\text{常数})$$

的情形下计算出详细结果且验证渐近性状

$$n(x,t)\sim Ae^{-vx/D},\quad t\to\infty,$$

这里

$$A = \frac{vCL}{1 - e^{-vL/D}}.$$

验证关系式

$$\int_0^L n(x,t)dx = 常数$$

并且说明在 $t \to \infty$ 极限情况下 $n(x,t)$ 的估计与这个关系式的相容性.

第十六章

非正交本征函数

当基函数, 即一特殊齐次边值问题的本征函数属于一个正交族时, 即当任意两个不同本征函数之积在有关区间上的积分等于零时, 求确定任一指定函数 (例如扩散问题中的初始函数) 的 Fourier 级数表示式中各系数是简单的事. 在非正交本征函数的情形, 下面的有启发性 (尽管相对地简单) 的例子揭示出系数表示式是较难得到的.

给出一组方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, t > 0,$$

$$u = 0, x = 0; \quad -\frac{\partial u}{\partial x} = \sigma\frac{\partial u}{\partial t}, x = L, t > 0 \tag{16.1}$$

和

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L,$$

这里在 $x = L$ 的边界条件包含新特点, 即 x 和 t 的偏导数一起出现; 这条件建立了杆 $(0 < x < L)$ 和外部 $(x > L)$ 之间的热交换的模型. 乘积式

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{16.2}$$

满足该偏微分方程和 (16.1) 中的边界条件, 只要

$$\frac{dT}{dt} + k\lambda T = 0$$

和

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\lambda X=0,\quad 0<x<L, \tag{16.3}$$

$$X(0)=0,\quad -\left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=L}+\sigma k\lambda X(L)=0,$$

值得注意的是参数 λ 出现在 $x=L$ 的边界条件中, 其显式在找出 dT/dt 和 T 之间的比例关系后出现. 方程组 (16.2) 的本征函数有形式

$$X(x,\lambda)=\sin\sqrt{\lambda}x, \tag{16.4}$$

且本征值方程

$$\cot\sqrt{\lambda}L=\sigma k\sqrt{\lambda}, \tag{16.5}$$

或用无量纲量

$$\xi=\sqrt{\lambda}L,\quad \delta=\frac{L}{\sigma k}(>0) \tag{16.6}$$

表示的

$$\cot\xi=\frac{\xi}{\delta} \tag{16.7}$$

有无穷多实根 $\pm\xi_1,\pm\xi_2,\cdots$, 与 (16.4) 中的正数集

$$\lambda_n=(\xi_n/L)^2,\quad n=1,2,\cdots \tag{16.8}$$

相联系. 附表对参数 δ 的不同的值提供了 (16.5) 的根的某些信息.

$\xi\tan\xi=\delta$

δ	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6
0	0	3.1416	6.2832	9.4248	12.5664	15.7080
0.1	0.3111	3.1731	6.2991	9.4354	12.5743	15.7143
0.5	0.6533	3.2923	6.3616	9.4775	12.6060	15.7397
1.0	0.8603	3.4256	6.4373	9.5293	12.6453	15.7713
2.0	1.0769	3.6436	6.5783	9.6296	12.7223	15.8336
4.0	1.2646	3.9352	6.8140	9.8119	12.8678	15.9536
6.0	1.3496	4.1116	6.9924	9.9667	12.9988	16.0654
8.0	1.3978	4.2264	7.1263	10.0949	13.1141	16.1675
10.0	1.4289	4.3058	7.2281	10.2003	13.2142	16.2594
15.0	1.4729	4.4255	7.3959	10.3898	13.4078	16.4474

集成具有乘积形式 (16.2) 的特解的线性组合, 即

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nX_n(x,\lambda_n)e^{-k\lambda_nt}, \tag{16.9}$$

(16.1) 中剩下的初始条件导出一个按本征函数 X_n 的 Fourier 展开式, 即

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nX_n(x,\lambda_n),\quad 0<x<L,\tag{16.10}$$

这里系数 c_n 待定以完成该问题的形式解.

按照刻划本征函数的常微分方程 (16.3), 有

$$(\lambda_m-\lambda_n)X_mX_n+\frac{d}{dx}\left[X_n\frac{d}{dx}X_m-X_m\frac{d}{dx}X_n\right]=0,$$

因此在 $(0,L)$ 上积分且应用 X_m, X_n 的边界条件, 推导出

$$\begin{aligned}&(\lambda_m-\lambda_n)\int_0^L X_m(x)X_n(x)dx\\&=X_m(L)\left(\frac{dX_n}{dx}\right)_{x=L}-X_n(L)\left(\frac{dX_m}{dx}\right)_{x=L}\\&=\sigma k(\lambda_n-\lambda_m)X_m(L)X_n(L).\end{aligned}$$

这样

$$\int_0^L X_m(x)X_n(x)dx+\sigma kX_m(L)X_n(L)=0,\quad m\neq n\tag{16.11}$$

和

$$\int_0^L X_m(x)X_n(x)dx\neq 0,\quad m\neq n.$$

这里后一关系式否定了本征函数集 $\{X_n\}, n=1,2,\cdots$ 的直接正交性.

为了确定 (16.9) 中的展开系数 c_n, 尽管没有基函数的正交性, 用 $X_m(x,\lambda_m)$ 乘 (16.10) 再在 $(0,L)$ 上对 x 积分且用关系式 (16.11); 得出

$$\begin{aligned}\int_0^L f(x)X_m(x)dx&=c_m\int_0^L X_m^2(x)dx+\sum_{n\neq m}c_n[-\sigma kX_m(L)X_n(L)]\\&=c_m\int_0^L X_m^2(x)dx-\sigma kX_m(L)\sum_{n=1}^{\infty}c_nX_n(L)+\sigma kc_mX_m^2(L).\end{aligned}$$

假设表示式 (16.10) 在端点 $x=L$ 成立, 后一关系式中包含所有 c_n 的和式可用 $f(L)$ 代替, 且由此每个 c_m 单独被确定, 即

$$c_m=\frac{\int_0^L f(x)X_m(x)dx+\sigma kX_m(L)f(L)}{\int_0^L X_m^2(x)dx+\sigma kX_m^2(L)},\quad m=1,2,\cdots\tag{16.12}$$

习 题 16

1. 给定本征函数和本征值关系式 (16.4),(16.5), 证实结论

$$\int_0^L X_m^2(x)dx + \sigma k X_m^2(L) = \frac{L}{2} + \frac{\sigma k}{2}\frac{1}{1+\lambda_n(\sigma k)^2},$$

这有助于确定 (16.12) 的系数.

2. 分析与下列一组方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0 < x < L, t > 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\quad x = 0;\quad -\frac{\partial u}{\partial x} = \sigma\frac{\partial u}{\partial t},\quad x = L, t > 0$$

和

$$u(x,0) = f(x),\quad 0 < x < L$$

相联系的边/初值问题.

讨论当 $t \to \infty$ 时 $u(x,t)$ 的性状, 且说明总流量 $-k\int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=L} dt$ 与初始温度 $f(x)$ 的关系.

3. 假设在前面问题中在 $x = 0$ 的边界条件换成另一个边界条件, 即

$$\frac{\partial u}{\partial x} + hu = 0,\quad t > 0, h > 0,$$

它描述在该处热的流入; 保持所有其他设定, 讨论相关的本征函数、本征值和初始条件问题.

第十七章

Fourier 分析的进一步例子

假定要求解 Laplace 偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

它可能和半径 R 的圆形区域内的定常二维温度分布 $u(x,y)$ 有关, 给定 u 在边界上的值且也给定 u 在区域内处处保持有限. 利用以该区域中心为参考点的极坐标有明显好处; 利用极坐标, 有关方程成为:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0,\quad 0<r<R,0<\theta<2\pi,\\ u(R,\theta)=f(\theta),\quad 0<\theta<2\pi\end{gathered}\tag{17.1}$$

和

$$u(r,\theta)\ \text{有限},\quad 0\leqslant r<R,0<\theta<2\pi.$$

如果

$$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta),$$

则各因子分离地由带有公共参数 λ 的常微分方程决定, 即

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\lambda\Theta=0,\quad 0<\theta<2\pi\tag{17.2}$$

和

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{\lambda}{r^2}R = 0, \quad 0 < r < R, \tag{17.3}$$

这里第二个方程有变系数. 从 Θ 的方程可以找到这问题的本征值或 λ 的容许值, 而且确切地说, 由保证等式

$$\Theta(2\pi) = \Theta(0)$$

成立而找到, 该式的成立是基于具有坐标 $(r, 0)$ 和 $(r, 2\pi)$ 的点的重合性; 这样

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

而且确定了角本征函数的一对无限集

$$\Theta_n(\theta) = \begin{cases} \cos n\theta, & n = 0, 1, \cdots \\ \sin n\theta, & n = 0, 1, \cdots \end{cases}$$

紧密相关的径向函数 $R_n(r)$ 满足齐次常微分方程

$$\frac{d^2R_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2}R_n = 0, \quad 0 < r < R,$$

已知它的全部线性无关的解, 即

$$R_n(r) = \begin{cases} 1, \ln r, & n = 0, \\ r^n, r^{-n}, & n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

因此, 乘积式

$$r^n \cos n\theta, r^n \sin n\theta, \quad n = 0, 1, \cdots$$

刻划了 Laplace 偏微分方程在 $0 \leqslant r < R, 0 < \theta < 2\pi$ 范围内单值且有界的特解; 且更一般的解

$$u(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \tag{17.4}$$

可以通过在 $r = R$ 满足边界条件而得到. 后者要求特别注意 Fourier 展开式

$$u(R, \theta) = f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad 0 < \theta < 2\pi, \tag{17.5}$$

其系数通过指定函数 $f(\theta)$ 用下列关系式来表示

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta')d\theta', \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta')\cos n\theta' d\theta', \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta')\sin n\theta' d\theta', \quad n = 1, 2 \cdots \end{aligned} \tag{17.6}$$

它反映了这样的事实: 函数集 $\{\cos n\theta\}, \{\sin n\theta\}, n=0,1,\cdots$ 组成 $0<\theta<2\pi$ 上的一个正交族. 如果把表示式 (17.6) 代入 (17.4), 且施行项的重排, 其结果

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta')\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\theta-\theta')\right]d\theta' \tag{17.7}$$

使人们注意到以下形式的级数

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\zeta^n \cos n\alpha = Re\sum_{n=1}^{\infty}(\zeta e^{i\alpha})^n, \quad |\zeta|<1,$$

这里改变了的式子包括实部算子 Re, 且依赖于具有复值性质的等式

$$e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha.$$

援引几何级数求和的结果

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n=\frac{z}{1-z},$$

它对满足 $(\mathrm{Re}z)^2+(\mathrm{Im}z)^2<1$ 的复数 z 成立, 由此推导出

$$S=\frac{\zeta\cos\alpha-\zeta^2}{1-2\zeta\cos\alpha+\zeta^2},$$

因此 (17.7) 可表成紧凑形式

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta')\left[1+\frac{2\dfrac{r}{R}\cos(\theta-\theta')-2\left(\dfrac{r}{R}\right)^2}{1-2\dfrac{r}{R}\cos(\theta-\theta')+2\left(\dfrac{r}{R}\right)^2}\right]d\theta'$$

或

$$u(r,\theta)=\frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\theta')d\theta'}{r^2-2rR\cos(\theta-\theta')+R^2}. \tag{17.8}$$

经典表示式 (17.8) 明显地提供了所提类型边值问题的一个通解, 它能够独立地建立, 依赖于单复变量解析函数与 Laplace 偏微分方程的解之间的密切联系; 而且以上的证明也因此提高了对 Fourier 型分析的信心. 下面依次列出两个简明的观察结果: 第一, (17.8) 使 u 在区域中心的值等于其在外边界上给定值的平均值; 第二, 满足边界条件的意思是指

$$\lim_{r\to R^-} u(r,\theta)=f(\theta), \quad 0<\theta<2\pi.$$

说明 Fourier 方法的另一例子: 考虑联立一阶线性偏微分方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\mu^2\frac{\partial p}{\partial x}=0 \tag{17.9}$$

和

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\nu^2\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad 0<x<L,t>0;$$

这样的方程与均匀可压缩介质中的弱一维声扰动有关, 这时所作的关联是

$$u(x,t)\to \text{沿 } x\text{方向的质点速度},$$
$$p(x,t)\to \text{离平衡压力的偏差}$$

和

$$(\mu\nu)^2\to \text{声速的平方}.$$

如果 $0<x<L$ 的部分被刚性平面界定, 而在刚性平面处法向速度为零, 则

$$u=0,\quad x=0,L,\quad t>0,\tag{17.10}$$

且一对初始条件

$$u(x,0)=f(x),\quad p(x,0)=g(x),\quad 0<x<L\tag{17.11}$$

完全确定了一个定解问题.

具有公共时间因子的乘积形式解, 即

$$u(x,t)=U(x)T(t)\tag{17.12}$$

和

$$p(x,t)=P(x)T(t)$$

是可行的, 只要满足以下条件:

$$\frac{1}{T(t)}\frac{dT}{dt}=-\mu^2\frac{1}{U(x)}\frac{dP}{dx}=\lambda,$$
$$\frac{1}{T(t)}\frac{dT}{dt}=-\nu^2\frac{1}{P(x)}\frac{dU}{dx}=\lambda,$$

这里 λ 表示任意的分离常数; 且显式表示式

$$T(t)=e^{\lambda t}$$

将 (17.12) 代换成新的形式

$$\begin{aligned}u(x,t)&=U(x)e^{\lambda t},\\ p(x,t)&=P(x)e^{\lambda t},\end{aligned}\tag{17.13}$$

其中仍然未知的函数 U,P 用下面的一对常微分方程互相关联:

$$\begin{aligned}\lambda U+\mu^2\frac{dP}{dx}&=0,\\ \lambda P+\nu^2\frac{dU}{dx}&=0.\end{aligned}\tag{17.14}$$

考虑到系数是常数, 容易刻划方程组 (17.14) 的通解, 即

$$U(x) = Ae^{(\lambda/\mu\nu)x} + Be^{-(\lambda/\mu\nu)x}, \tag{17.15}$$
$$P(x) = -\frac{\nu}{\mu}Ae^{(\lambda/\mu\nu)x} + \frac{\nu}{\mu}Be^{-(\lambda/\mu\nu)x},$$

这里 A, B 表示任意常数.

用边界条件 $U(0) = U(L) = 0$, 得出一对包含 A, B 的齐次线性方程, 即:

$$A + B = 0,$$
$$Ae^{(\lambda/\mu\nu)L} + Be^{-(\lambda/\mu\nu)L} = 0,$$

且当

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda L/\mu\nu} & e^{-\lambda L/\mu\nu} \end{vmatrix} = -2\sinh\frac{\lambda L}{\mu\nu} = 0$$

时存在非平凡解, 上式是本征值 λ 的方程, 所以 λ 用双曲正弦函数的纯虚根来表示, 且由显式给出,

$$\lambda_n = i\frac{\mu\nu n\pi}{L}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{17.16}$$

选择 (容许的) $A = 1/2i$ 和关系 $B = -A$, 由 (17.15) 推导出

$$U_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{17.17}$$
$$P_n(x) = i\frac{\nu}{\mu}\cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

它们描述了与本征值 (17.16) 相伴的具有两个分量或向量本征函数.

满足边界条件 (17.10) 的偏微分方程 (17.9) 的特解为

$$u_n(x,t) = U_n(x)e^{\lambda_n t}, \quad p_n(x,t) = P_n(x)e^{\lambda_n t},$$

再组合起来以求满足所加的初始条件 (17.11), 即:

$$\begin{pmatrix} u(x,t) \\ p(x,t) \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \begin{pmatrix} u_n(x,t) \\ p_n(x,t) \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix} u(x,t) \\ p(x,t) \end{pmatrix} = c_0\begin{pmatrix} 0 \\ i\frac{\nu}{\mu} \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{c_n e^{i\frac{n\pi\mu\nu}{L}t}\begin{pmatrix} \sin\frac{n\pi x}{L} \\ i\frac{\nu}{\mu}\cos\frac{n\pi x}{L} \end{pmatrix}\right.$$
$$\left. + c_{-n}e^{-i\frac{n\pi\mu\nu}{L}t}\begin{pmatrix} -\sin\frac{n\pi x}{L} \\ i\frac{\nu}{\mu}\cos\frac{n\pi x}{L} \end{pmatrix}\right\}, \tag{17.18}$$

表明了在 $0<x<L$ 上分别表示的 Fourier 展式

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} 0 \\ i\dfrac{\nu}{\mu} \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ c_n \begin{pmatrix} \sin\dfrac{n\pi x}{L} \\ i\dfrac{\nu}{\mu}\cos\dfrac{n\pi x}{L} \end{pmatrix} + c_{-n} \begin{pmatrix} -\sin\dfrac{n\pi x}{L} \\ i\dfrac{\nu}{\mu}\cos\dfrac{n\pi x}{L} \end{pmatrix} \right\}. \tag{17.19}$$

借助于基函数 $U_n(x), P_n(x)$ 两者呈现且有以下形式 (上面加横线表示复共轭或以 $-i$ 代替 i) 的正交性关系式:

$$\int_0^L \left[\frac{1}{2\mu^2}U_m(x)U_n(x) + \frac{1}{2\nu^2}P_m(x)\overline{P_n}(x)\right]dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{L}{2\mu^2}, & m = n, \end{cases} \tag{17.20}$$

就能确定单一 (或共同) 的一组展开系数 c_n. (17.19),(17.20) 的一个推论, 即

$$\int_0^L \left[\frac{1}{2\mu^2}f(x)U_m(x) + \frac{1}{2\nu^2}g(x)\overline{P_m}(x)\right]dx = \frac{c_m L}{2\mu^2},$$

提供了受欢迎的系数表示式

$$c_m = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx - \frac{i}{L}\frac{\mu}{\nu}\int_0^L g(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{17.21}$$

将其用于 (17.18) 中, 就得到 $u(x,t)$ 和 $p(x,t)$ 的合适的实的确定表达式.

考虑到 (17.9),(17.10), 一个简单演算揭示总的声能量

$$I(t) = \int_0^L \left[\frac{1}{2\mu^2}u^2(x,t) + \frac{1}{2\nu^2}p^2(x,t)\right]dx \tag{17.22}$$

在现有环境下的守恒 (或与时间无关) 的性质; 这是由于

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \int_0^L \left(\frac{1}{\mu^2}u\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\nu^2}p\frac{\partial p}{\partial t}\right)dx \\ &= -\int_0^L \left(u\frac{\partial p}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx = -\int_0^L \frac{\partial}{\partial x}(pu)dx = 0, \end{aligned}$$

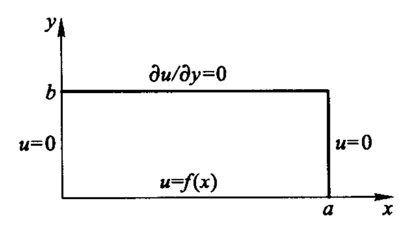
而且可以觉察对 $I(t)$ 的上述表示式与给出的正交性关系式 (17.20) 有关联.

习 题 17

1. 求出沿平面环形域内圆和外圆边界取任意规定值的 Laplace 偏微分方程的解. 考察内半径趋于零时的极限情形.

2. 描述在由两径向直线和一圆弧界定的圆扇形内满足 Laplace 偏微分方程, 给定在两条直线边上为零且沿其边界的曲线部分有指定变化的函数.

3. 确定在一平面矩形域内的 Laplace 偏微分方程的解, 如果其边界数据如下图中所示的那样.



4. 如果声激发的联立方程 (17.9) 分别为粒子速度 u 和压力 p 的单独的二阶方程所替代, 讨论二阶方程的 Fourier 方法已经得到说明. 试把对声激发的联立方程所用的方法和对单独的二阶方程所用的方法进行比较.

第十八章

非齐次问题

已讨论过的热传导问题有一个共同特点, 即基本偏微分方程和有关边界条件有齐次性质; 有广泛得多的一类问题 (例如有内部热源), 其中某些或所有对应方程是非齐次的, 因而处理这种情况的系统的方法引起人们注意. 可以回顾一下, 处于线性边值问题的 Fourier 分析中心的本征函数与本征值都是与一个常微分方程的齐次线性边值问题相联系的; 而后面要讲的内容将揭示当偏微分方程和/或边界条件是非齐次时相关的本征函数的构造性作用.

在不同于先前那些需要本征函数的问题的情形中早就在常微分方程的有关讨论中预示了本征函数的扩大了的作用; 因此, 考虑由一组方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = f(x), \quad 0 < x < \pi, \qquad (18.1)$$
$$y(0) = A, \quad y(\pi) = 0$$

所定义的问题且注意相关本征函数和本征值的显式表达式

$$y_n(x) = \sin nx,$$
$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \cdots$$

它们表示当 $f(x) = 0, A = 0$ 而 (18.1) 变成齐次方程组时仅有的非平凡解. 现在

为了解非齐次方程组 (18.1), 引入以这些函数为项的一个展开式

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin nx,\quad 0<x<\pi. \tag{18.2}$$

按照本征函数集 $\{\sin nx\}$ 在 $(0,\pi)$ 上的正交性, 系数 c_n 表示成积分形式

$$c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}y(x)\sin nxdx,\quad n=1,2,\cdots \tag{18.3}$$

由于 $y(x)$ 仍然未知, 这些表示式眼下仅有一种形式的特征. 然而可以有利方式利用它们来实施相继的分部积分并记住利用 (18.1), 由此得到关系式

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{2}{\pi}\left\{-y(x)\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{x=0}^{x=\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\frac{dy}{dx}\cos nxdx\right\}\\&=\frac{2}{\pi}\left\{\left.\left(-y(x)\frac{\cos nx}{n}+\frac{dy}{dx}\frac{\sin nx}{n^2}\right)\right|_{x=0}^{x=\pi}-\frac{1}{n^2}\int_0^{\pi}\frac{d^2y}{dx^2}\sin nxdx\right\}\\&=\frac{2A}{n\pi}-\frac{2}{\pi n^2}\int_0^{\pi}(f(x)-\lambda y(x))\sin nxdx,\end{aligned}$$

结果得到系数的显式形式, 即

$$c_n=\frac{2An}{\pi(n^2-\lambda)}-\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2-\lambda}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx,\quad n=1,2,\cdots \tag{18.4}$$

显然后者要满足一般的限制性条件

$$\lambda\neq n^2,\quad n=1,2,\cdots$$

虽然, 特别地, 如果 $A=0$ 和 $\lambda=m^2$, 当条件

$$\int_0^{\pi}f(x)\sin mxdx=0$$

成立时, 就得到特定值

$$c_m=0$$

且其他的系数 $c_n, n\neq m$ 保持前面的规定 (18.4).

所以, 看来似乎由方程组 (18.1) 所提的问题容许有形如 (18.2) 的级数解, 其系数由 (18.4) 给定. 立刻需要使所断言的在 $x=0$ 处每项为零的级数解与规定值 $y(0)=A$ 相符合, 为此, 齐次常微分方程

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda\right)y_1=0,\quad 0<x<\pi$$

满足条件

$$y_1(0) = A,\ y_1(\pi) = 0$$

的显式解

$$y_1(x) = A\frac{\sin\sqrt{\lambda}(\pi - x)}{\sin\sqrt{\lambda}\pi}, \quad 0 < x < \pi \tag{18.5}$$

证明是有用的.

设 $y_1(x)$ 以反对称方式延拓到区间 $-\pi < x < 0$ 且考虑与这样定义的奇函数相联系的 Fourier 正弦级数, 即

$$Y_1(x) = \begin{bmatrix} y_1(x), & 0 < x < \pi \\ -y_1(-x), & -\pi < x < 0 \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(1)} \sin nx; \tag{18.6}$$

由于函数集 $\{\sin nx\}$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上是正交集, 系数 $c_n^{(1)}$ 由以下表示式得到

$$\begin{aligned} c_n^{(1)} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y_1(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} y_1(x)\sin nx dx \\ &= \frac{2A}{\pi}\frac{n}{n^2 - \lambda}, \end{aligned}$$

且因此

$$Y_1(x) = \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2 - \lambda}\sin nx, \quad -\pi < x < \pi. \tag{18.7}$$

如果包含以 2π 为周期的各项的级数 (18.7) 在 $(-\pi, \pi)$ 收敛, 其和函数必须也有周期等于 2π, 此外 (见图 34) 该函数有跳跃不连续点, 即在点 $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$ 处左、右极限不相等; 此外可以注意到左、右极限值 $\pm A$ 的平均值等于零, 事实上在这样的点处该级数的和也为零.

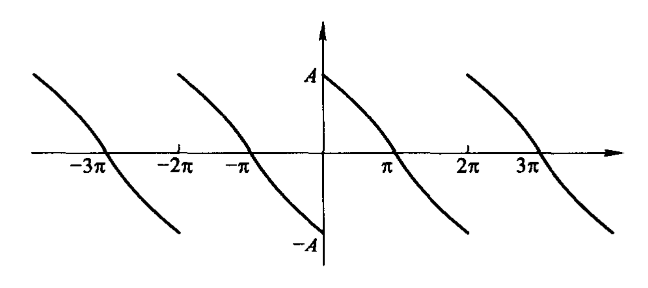


图 34

因此具有系数 $c_n = 2An/\pi(n^2 - \lambda)$ 的级数解 (18.2) 表示函数 $Y_1(x)$, 从而在 $0 < x < \pi$ 上有显式 $y_1(x)$ 且在端点取值 $y_1(0) = A, y_1(\pi) = 0$. 所以, 这级数和在 (18.1) 中的规定 $y(0) = A$ 之间有自相容性可以在

$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = A$$

的意义下得到解释，而该级数在 $x=\pi$ 取零值正好和 $y(x)$ 在该处的指定值一致.

积分

$$y_2(x)=\int_0^\pi K(x,x')f(x')dx' \tag{18.8}$$

表示 (18.1) 的解的另一部分，它是由级数 (18.2) 和系数表示式 (18.4) 的第二部分构成的，借助于对称函数

$$K(x,x')=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\sin nx'}{n^2-\lambda}=K(x',x), \tag{18.9}$$

它有显式变体

$$K(x,x')=-\frac{\sin\sqrt{\lambda}x_<\sin\sqrt{\lambda}(\pi-x_>)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi},\quad 0<x,x'<\pi, \tag{18.10}$$

这里 $x_<,x_>$ 分别表示 x,x' 中的较小者或较大者；经简单演算确定 $K(x,x')$ 的 Fourier 正弦级数表示式中的系数函数 $c_n^{(2)}(x')$，例如

$$K(x,x')=\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(2)}(x')\sin nx,\quad 0<x<\pi,$$

即

$$c_n^{(2)}(x')=\int_0^\pi K(x,x')\sin nx dx=-\frac{2}{\pi}\frac{\sin nx'}{n^2-\lambda}$$

正好具有与级数 (18.9) 一致的形式.

由 (18.8),(18.9) 给出的函数 $y_2(x)$ 满足常微分方程

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda\right)y_2(x)=f(x),\quad 0<x<\pi$$

并取边界值 $y_2(0)=y_2(\pi)=0$ 这一事实现在就容易证实了；由此，基于 (18.2), (18.4) 的联合表示式

$$y(x)=y_1(x)+y_2(x)$$

确实满足 (18.1) 的解所要求的所有规定，且本征函数在这方面的构造作用是明显的.

在论及包含非齐次偏微分方程和/或非齐次边界条件的类似方法之前，某些无需深奥方法即可处理的简单例子是值得注意的；考虑一个由以下方程确定的边/初值问题:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<L,t>0,\\&u(0,t)=A,u(L,t)=B,\quad t>0\end{aligned} \tag{18.11}$$

和

$$u(x,0)=f(x),\quad 0<x<L.$$

由于 u 的边值是常数, 不管初始温度分布 $f(x)$, 预期最终静态解具有如下的线性分布

$$u_s(x)=A+\frac{B-A}{L}x \tag{18.12}$$

是有道理的. 现设

$$u(x,t)=u_s(x)+v(x,t) \tag{18.13}$$

而决定 $v(x,t)$ 的关系式, 即

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial t}=k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\quad 0<x<L,t>0,\\&v(0,t)=0,v(L,t)=0,\quad t>0\end{aligned} \tag{18.14}$$

和

$$v(x,0)=f(x)-u_s(x),\quad 0<x<L$$

以齐次偏微分方程和齐次边界条件为其特征, 因此必然会出现本征函数和本征值. 特别地, 表示式

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-k(n\pi/L)^2t} \tag{18.15}$$

是适用的, 且从初始条件, 例如

$$f(x)-u_s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi x}{L},\quad 0<x<L$$

推导出系数, 结果为

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{2}{L}\int_0^L(f(x)-u_s(x))\sin\frac{n\pi x}{L}dx\\&=\frac{L}{n\pi}(A+(-1)^{n+1}B)+\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,n=1,2,\cdots\end{aligned} \tag{18.16}$$

这样把要求的函数 $u(x,t)$ 明智地分解成两个组成部分, 就能迅速得到该问题的解, 因为单独地确定每个组成部分要比两个组成部分合起来确定更为容易.

其次, 考虑一个问题, 其支配方程包括

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Ae^{-t/\tau},\quad 0<x<L,t>0,\\&\frac{\partial u}{\partial x}=0,x=0;\quad \frac{\partial u}{\partial x}=0,x=L,t>0\end{aligned} \tag{18.17}$$

和

$$u(x,0)=0,\quad 0<x<L;$$

这与一个绝热杆有关, 初始时无热, 由一个沿杆长均匀分布, 按关于时间递减的指数速率衰减的内部热源供热. 偏微分方程 (18.17) 容许有特解

$$u_p(t)=-A\tau e^{-t/\tau},\tag{18.18}$$

因此, 令

$$u(x,t)=u_p(t)+v(x,t),\tag{18.19}$$

此新函数 $v(x,t)$ 由以下方程组刻画:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial t}=k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\quad 0<x<L,t>0,\\&\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad x=0,L,\ t>0\end{aligned}\tag{18.20}$$

和

$$v(x,0)=-u_p(0)=A\tau,\quad 0<x<L.$$

由于对 (18.20) 中的齐次偏微分方程和边界条件的相关本征函数和本征值是

$$\cos\frac{n\pi x}{L},\quad \lambda_n=(n\pi/L)^2,\quad n=0,1,2,\cdots$$

由满足边界条件的该偏微分方程的特解构成的级数

$$v(x,t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\frac{n\pi x}{L}e^{-k(n\pi/L)^2t}\tag{18.21}$$

保证能满足初始条件, 只需

$$A\tau=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\frac{n\pi x}{L},\quad 0<x<L.\tag{18.22}$$

容易得到由正交函数集构成的 Fourier 余弦级数 (18.22) 中的系数, 即

$$c_0=A\tau$$

和

$$c_n=\frac{2}{L}A\int_0^L\cos\frac{n\pi x}{L}dx=0,\quad n=1,2,\cdots$$

所以

$$v(x,t)=A\tau$$

且

$$u(x,t) = u(t) = A\tau(1 - e^{-t/\tau}) \tag{18.23}$$

确定了该问题的解.

适用于带有现在所考虑类型的任何非齐次问题的系统方法, 一开始要求有关的本征函数且无须去描述所要求的解的分离的成分. 这样, 考虑 (18.17) 中偏微分方程的 (暂时) 齐次形式和 (永久) 齐次边界条件, 确定相关的本征函数集 $\left\{\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}, n = 0, 1, \cdots$, 然后将它们用在方程组 (18.17) 的解的展开式中,

$$u(x,t) = T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cos\frac{n\pi x}{L}, \tag{18.24}$$

这里未知的时间的函数 $T_n(t), n = 0, 1, \cdots$ 取代了 (18.2) 中系数 c_n 的地位. 本征函数的正交性引出表示式

$$T_0(t) = \frac{1}{L}\int_0^L u(x,t)dx \tag{18.25}$$

和

$$T_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{18.26}$$

它们至今还不能决定函数 $T_n(t)$. 然而这些表示式能用来对所说的函数建立非齐次常微分方程, 这样就可以精确地确定它们.

为此, 微分 (18.25) 式, 援用关于 u 的偏微分方程和边界条件后, 得出

$$\begin{aligned}\frac{dT_0}{dt} &= \frac{1}{L}\int_0^L \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dx = \frac{1}{L}\int_0^L \left\{k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Ae^{-t/\tau}\right\}dx \\ &= \frac{k}{L}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}^{x=L} + Ae^{-t/\tau} = Ae^{-t/\tau};\end{aligned} \tag{18.27}$$

遵照 (18.17) 中规定的初始条件就推导出

$$T_0(0) = \frac{1}{L}\int_0^L u(x,0)dx = 0,$$

从而常微分方程 (18.27) 的唯一解就是

$$T_0(t) = A\tau(1 - e^{-t/\tau}). \tag{18.28}$$

其次, 微分 (18.26) 式, 用该偏微分方程和分部积分, 得出以下关系式

$$\begin{aligned}\frac{dT_n}{dt} &= \frac{2}{L}\int_0^L \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\cos\frac{n\pi x}{L}dx \\ &= \frac{2}{L}\int_0^L \left(k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Ae^{-t/\tau}\right)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \\ &= \frac{2k}{L}\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos\frac{n\pi x}{L}dx \\ &= \frac{2k}{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\frac{n\pi x}{L} + \frac{n\pi}{L}u\cdot\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_{x=0}^{x=L}\right\} \\ &\quad -\frac{2k}{L}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\int_0^L u(x,t)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\end{aligned}$$

这里在最后的式子中所有已积分出的项都为零 (不管 u 的相关值未知这一事实), 因为边界条件要求在 $x=0, L, \partial u/\partial x = 0$ 且 $\sin\dfrac{n\pi x}{L} = 0$. 因此,

$$dT_n/dt = -\frac{2k}{L}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\int_0^L u(x,t)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,$$

它与

$$dT_n/dt + k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T_n = 0, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{18.29}$$

是一样的. (18.29) 的通解

$$T_n(t) = \alpha_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t},$$

仅当 $\alpha_n = 0$ 时与初始条件

$$T_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,0)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = 0$$

相容. 所以 $T_n(t) = 0, n = 1, 2, \cdots$ 和 (18.24),(18.28) 一起揭示了

$$u(x,t) = T_0(t) = A\tau(1 - e^{-t/\tau})$$

与 (18.23) 一致.

如果 (18.17) 中的边界条件换成另一对, $u(0,t) = u(L,t) = 0$, 分解式 (18.19) 将 $v(x,t)$ 与一对非齐次条件 $v(0,t) = -u_p(t), v(L,t) = -u_p(t), t > 0$ 相结合, 问题的解决没有直接进展.

一开始用相关本征函数的好处可联系以下特殊的方程组进一步详述:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, t > 0, \\ u(x,0) &= 0, \quad 0 < x < L\end{aligned} \tag{18.30}$$

和

$$u(0,t)=0,\quad u(L,t)=At,\quad t>0,$$

这里只有最后一个是非齐次的. 这个问题的相关本征函数的确定是通过在基本偏微分方程的分离变量解

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

中出现且满足齐次方程组

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda\right)X=0,\quad 0<x<L,$$
$$X(0)=0,\quad X(L)=0$$

的函数 $X(x)$ 来得到的; 这里在 $x=L$ 的条件是 (18.30) 对 $u(x,t)$ 所取的相应的齐次边界条件. 显然上面的齐次边值问题的非平凡解正是与本征值

$$\lambda_n=(n\pi/L)^2$$

相联系的正交本征函数

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{L},\quad n=1,2,\cdots$$

而且正是这些函数进入对 $u(x,t)$ 所假设的一个展开式, 即

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{18.31}$$

决定系数函数 $T_n(t)$ 可从表示式

$$T_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \tag{18.32}$$

开始, 由此, 考虑到 u 所满足的偏微分方程和实行相继的分部积分, 推导出

$$\begin{aligned}\frac{dT_n}{dt}&=\frac{2}{L}\int_0^L\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\sin\frac{n\pi x}{L}dx\\&=\frac{2k}{L}\int_0^L\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin\frac{n\pi x}{L}dx\\&=\frac{2k}{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\sin\frac{n\pi x}{L}-\frac{n\pi}{L}u\cdot\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_{x=0}^{x=L}\right\}\\&\quad-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\int_0^L u(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.\end{aligned} \tag{18.33}$$

虽然 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 在 $x=0$ 和 $x=L$ 未知, 其中的正弦因子导致上面的对应项消去;此外, 其余端点贡献部分借助于 (18.29) 中的边界条件推导出, 即

$$u(x,t)\cos\frac{n\pi x}{L}\bigg|_{x=0}^{x=L}=u(L,t)\cos n\pi-u(0,t)=(-1)^nAt.$$

因此, (18.32) 和 (18.33) 给出一个 $T_n(t)$ 的一阶非齐次常微分方程, 即

$$dT_n/dt+k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2T_n=\frac{2kn\pi}{L^2}(-1)^{n+1}At,n=1,2,\cdots \tag{18.34}$$

且给定初始条件

$$T_n(0)=\frac{2}{L}\int_0^L u(x,0)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=0$$

后可以证明这个方程的合适解是

$$T_n(t)=\frac{2(-1)^{n+1}At}{n\pi}+\frac{2AL^2(-1)^n}{k(n\pi)^3}\left(1-e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2t}\right). \tag{18.35}$$

联合 (18.31) 和 (18.35), 看来可以断言这个确定的表示式

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{2At}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}\\&+\frac{2AL^2}{k\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{L}\left(1-e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2t}\right)\end{aligned} \tag{18.36}$$

符合方程组 (18.30) 的解的所有要求. 为支持这一断言, 注意通过忽略 (18.36) 中的指数项得到蕴含的渐近式

$$u(x,t)\sim Atf_1(x)+Af_2(x),\quad 当\ t\to\infty. \tag{18.37}$$

这里

$$f_1(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{18.38}$$

$$f_2(x)=\frac{2L^2}{k\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{18.39}$$

如果把 (18.37) 式代入 $u(x,t)$ 的偏微分方程, 随之产生关系式

$$f_1(x)=k[t(d^2f_1/dx^2)+(d^2f_2/dx^2)],$$

由于 t 和 x 是自变量, 又推导出另一对关系式, 即:

$$\frac{d^2f_1}{dx^2}=0,\quad f_1(x)=k\frac{d^2f_2}{dx^2}.$$

从 (18.37) 推定的条件

$$f_1(0) = 0, \quad f_1(L) = 1,$$
$$f_2(0) = 0, \quad f_2(L) = 0$$

足以保证决定

$$f_1(x) = \frac{x}{L}, \quad f_2(x) = \frac{x}{6kL}(x^2 - L^2),$$

且由此有显式估计

$$u(x,t) \sim \frac{Axt}{L} - \frac{Ax}{6kL}(L^2 - x^2), \quad 0 < x < L, t \to \infty. \tag{18.40}$$

比较 (18.38),(19.39) 与 (18.40), 就提出了一对三角级数或 Fourier 级数表示式,即

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{L} = \frac{x}{L}, \tag{18.41}$$

$$\frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{L} = \frac{x}{6L^3}(L^2 - x^2), \quad 0 < x < L; \tag{18.42}$$

实际上, 当这两个奇函数 x/L 和 $\frac{x}{6L^3}(L^2 - x^2), -L < x < L$ 用正交函数系 $\{\sin n\pi x/L\}$ 的项表示时,其结果正是这些级数.

注意如果一开始采用分解式

$$u(x,t) = \frac{Axt}{L} + v(x,t), \quad 0 < x < L, t > 0$$

对 $v(x,t)$ 的各方程中包括一个非齐次偏微分方程

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - A\frac{x}{L}, \quad 0 < x < L, t > 0,$$

连同其余的齐次性质的方程

$$v(0,t) = 0, \quad v(L,t) = 0, \quad t > 0$$

和

$$v(x,0) = 0, \quad 0 < x < L.$$

用以前的仍然有重要意义的相关本征函数的展开式, 即

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^*(t)\sin\frac{n\pi x}{L},$$

能通过非齐次常微分方程决定函数 $T_n^*(t), n = 1, 2, \cdots$, 且由此确定原来要找的函数 $u(x,t)$.

(由 (18.32),(18.41),(18.42) 导出的) 完全表示式

$$u(x,t) = \frac{Axt}{L} - \frac{Ax}{6kL}(L^2 - x^2) + \frac{2AL^2}{k\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad 0 < x < L, t > 0 \tag{18.43}$$

中对 x 微分, 确定在 $x = L$ 处进入杆的热流量速率

$$j_L(t) = \kappa\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = \frac{At}{L} + \frac{AL}{3k} - \frac{2AL}{k\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t},$$

和在 $x = 0$ 处流出的热流量速率

$$j_0(t) = \kappa\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{At}{L} - \frac{AL}{3k} - \frac{2AL}{k\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t},$$

它们的差

$$j_L(t) - j_0(t) = \frac{2AL}{3k} - \frac{4AL}{k\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}e^{-k\left(\frac{2m+1}{L}\pi\right)^2 t},$$

在 $t \to \infty$ 的极限过程中趋向一个稳定值, 这一情况与内部温度随时间而线性上升是相适应的.

习　题　18

1. 设要求解端点为齐次边界条件的非齐次常微分方程, 即

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda\right)y = f(x), \quad 0 < x < L,\ y(0) = y(L) = 0, \tag{*}$$

且设 $Y_p(x)$ 表示该微分方程的一个特解. 按照满足 $\sin\sqrt{\lambda}L = 0$ 或 $\sin\sqrt{\lambda}L \neq 0$ 的参数 λ 的两种情形, 用通解去对比这两种情形; 证明在前一种情形, (*) 无解, 除非 $\pm Y_p(0) = Y_p(L)$, 且如这关系式成立, 则存在无穷多个解. 当 $\sin\sqrt{\lambda}L \neq 0$ 时什么结论成立?

2. 考虑一根长度为 L 的均匀细杆, 其初始温度为零, 且假设热随即以定常速率通过一端点 $(x = 0)$ 进入, 而在另一端点 $(x = L)$ 温度仍保持在固定水平.

解对应的方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, t > 0,$$

$$-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = A, \quad u(L,t) = B, \quad t > 0$$

和

$$u(x,0) = 0, \quad 0 < x < L$$

这里 A, B 是独立的正量. 确定经过很长一段时间后 $(t \to \infty)$ 解的渐近式.

3. 考虑长度为 L 的均匀杆, 其初始温度为零, 且假设在一端点 $(x = L)$ 温度继续为零, 而在有限时间 τ 内在另一端点 $(x = 0)$ 有均匀的热量流入. 给定相关的方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, t > 0,$$

$$-\kappa \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \begin{cases} Q, 0 < t < \tau, \\ 0, \ \ t > \tau, \end{cases} \quad u(L,t) = 0, t > 0$$

和

$$u(x,0) = 0, \quad 0 < x < L,$$

求对所有 t 值 $0 < x < L$ 上的内部温度 $u(x,t)$.

4. 解方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, t > 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \kappa\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = Qe^{-t/\tau}, \quad t > 0$$

和

$$u(x,0) = 0, \quad 0 < x < L,$$

它们描述具有一端绝热而另一端有一个衰减的热流的流入的杆的变化的内部温度. 决定当 $t \to \infty$ 时温度是否会达到定常的或是不依赖于时间的分布. 关系式

$$\int_0^L u(x,t)dx = k\int_0^L \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}^{x=L} dt$$

提供什么信息? 该式是由偏微分方程对 x (0 和 L 之间) 和 t (0 与 t 之间) 积分且用初始条件推导出的.

5. 设热在一杆中以与距一端点 $(x=0)$ 的距离成比例的速率 (每单位时间和体积) 生成. 求从而产生的温度分布 $u(x,t)$, 它服从偏微分方程

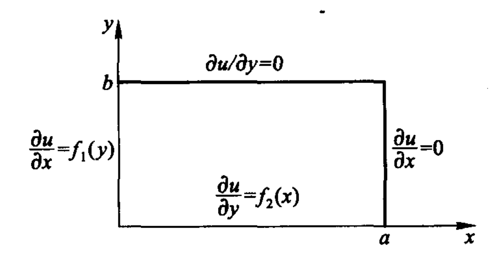
$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha x,\quad 0<x<L,t>0,\alpha>0,$$

如果初始温度处处为零而且两端温度也保持为零. $t\to\infty$ 时 $u(x,t)$ 的渐近性状是什么?

6. 应用有关的本征函数是用来解 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{i}$$

的边值问题的一个例子是恰当的. 这样, 考虑一矩形区域, $0<x<a,0<y<b$, 以及涉及每条边上 u 的法向导数的边界条件如图所示. 如函数 $u(x,y)$ 表



示一个定常温度分布, 则上面的条件表示两条边是绝热的且沿另两条边规定了热流量; 对定常温度有一明显要求, 即没有进入该区域的纯热流, 这意味着

$$\int_0^b f_1(y)dy=\int_0^a f_2(x)dx, \tag{ii}$$

由于集合 $\left\{\cos\frac{n\pi x}{a}\right\},n=0,1,\cdots$ 刻画对变量 x 的相关的本征函数, 引入级数

$$u(x,y)=Y_0(y)+\sum_{n=1}^{\infty}Y_n(y)\cos\frac{n\pi x}{a},0<x<a \tag{iii}$$

且证明系数函数

$$Y_0(y)=\frac{1}{a}\int_0^a u(x,y)dx \tag{iv}$$

$$Y_n(y)=\frac{2}{a}\int_0^a u(x,y)\cos\frac{n\pi x}{a}dx,\quad n=1,2,\cdots \tag{v}$$

分别满足常微分方程

$$\frac{d^2Y_0}{dy^2}=\frac{1}{a}f_1(y) \tag{vi}$$

和

$$\frac{d^2Y_n}{dy^2}-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2Y_n=\frac{2}{a}f_1(y). \tag{vii}$$

在现在情况下, 对 (iv) 的唯一解验证关系式

$$\frac{dY_0}{dy}=-\frac{1}{a}\int_y^b f_1(y')dy', \tag{viii}$$

且积分 (viii), 先设

$$F(y)=\int_y^b f_1(y')dy',$$

然后注意

$$\begin{aligned}Y_0(y)&=-\frac{1}{a}\int_0^y F(y')dy'+C(\text{常数})\\&=-\frac{1}{a}\left[y'F(y')|_{y'=0}^{y'=y}-\int_0^y y'\frac{dF(y')}{dy'}dy'\right]+C\\&=-\frac{1}{a}\left[yF(y)+\int_0^y y'f_1(y')\right]dy'+C\\&=\frac{1}{a}\int_y^b(y'-y)f_1(y')dy'+C'\end{aligned} \tag{ix}$$

除一个附加的任意常数外确定了 $Y_0(y)$. 用常数变异法积分 (vii), 记

$$Y_n(y)=A_n(y)\sinh\frac{n\pi y}{a}+B_n(y)\cosh\frac{n\pi y}{a}, \tag{x}$$

设这里引入的函数 $A_n(y),B_n(y)$ 通过关系式

$$\frac{dA_n(y)}{dy}\sinh\frac{n\pi y}{a}+\frac{dB_n(y)}{dy}\cosh\frac{n\pi y}{a}=0 \tag{xi}$$

联系起来; 涉及 A_n 和 B_n 的一阶导数的另一关系式, 即

$$\frac{dA_n}{dy}\cosh\frac{n\pi y}{a}+\frac{dB_n}{dy}\sinh\frac{n\pi y}{a}=\frac{2}{n\pi}f_1(y), \tag{xii}$$

则是由 (vii),(x) 和 (xi) 推导出的. 从 (xi),(xii) 得到对 dA_n/dy 和 dB_n/dy 的表示式, 且用这些表示式去得到非齐次常微分方程 (vii) 的特解

$$Y_n(y)=\frac{2}{n\pi}\int_y^b f_1(y')\sinh\frac{n\pi}{a}(y'-y)dy' \tag{xiii}$$

和由此得到的带有任意系数 C_n,D_n 的通解

$$\begin{aligned}Y_n(y)=&\frac{2}{n\pi}\int_y^b f_1(y')\sinh\frac{n\pi}{a}(y'-y)dy'\\&+C_n\cosh\frac{n\pi}{a}(b-y)+D_n\cosh\frac{n\pi y}{a}.\end{aligned} \tag{xiv}$$

援引在 $y=0,b$ 处的边界条件去建立完全决定的形式

$$Y_n(y)=\frac{2}{n\pi}\int_y^b f_1(y')\sinh\frac{n\pi}{a}(y'-y)dy' \tag{xv}$$

$$-\frac{2}{n\pi}\frac{\cosh\dfrac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh\dfrac{n\pi b}{a}}\left[\int_0^a f_2(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx+\int_0^b f_1(y)\cosh\frac{n\pi y}{a}dy\right],$$

它与 (ix) 和 (iii) 联合起来就描述该问题的解. 考虑特殊情形, 其中

$$f_1(y)=-A/b, 0<y<b, \quad f_2(x)=A/a, 0<x<a,$$

且推导出 (除了一个无重要意义的附加任意常数外)

$$u(x,y)=\frac{A}{2ab}(y-b)^2-\frac{2aA}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{n\pi x}{a}}{(n\pi)^2}$$

$$=\frac{A}{2ab}\{(y-b)^2-(x-a)^2\}.$$

7. 给定方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<d,$$

$$u(0,t)=U\cos\omega t, \quad u(d,t)=0, \quad t>0,$$

它与一对 (无限的) 平行平板间的不可压缩黏性流体运动有关, 其中一个平板 (在 $x=0$) 在其自身的平面内振动而另一平板 (在 $x=d$) 保持固定. 建立这方程组的解的表示式

$$u(x,t)=U\mathrm{Re}\left[\frac{\sinh\lambda(d-x)}{\sinh\lambda d}e^{i\omega t}\right], \quad 0<x<d,$$

这里

$$\lambda=\left(\frac{i\omega}{\nu}\right)^{1/2}$$

且 $\mathrm{Re}[\Phi]$ 表示复值函数 Φ 的实部. 讨论该解在分别的极限情形

$$\frac{\omega d^2}{\nu}\to\infty \quad 和 \quad \frac{\omega d^2}{\nu}\to 0$$

下的某些近似式. 如果

$$u(x,0)=0, \quad 0<x<d,$$

$u(x,t)$ 的合适表示式是什么?

第十九章

局部热源

适当定义的本征函数在其他扩散问题, 特别是, 设想在有一局部 (或点态的) 性质的内部热源的问题中有构造性作用. 例如, 设在时刻 $t = 0$ 在杆的两端点之间一个点 $x = l$ 处, 一个具有输出每秒 θ 单位的定常热源开始起作用 (见图 35); 如果该杆初始温度为零且此后在两端保持温度为零, 相关的方程组包括

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{array}{l} 0 < x < l, \\ l < x < L, \end{array} \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, u(L,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad 0 < x < L \end{gathered} \tag{19.1}$$

和

$$u(l+0,t) = u(l-0,t), \quad -\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l-0}^{x=l+0} = \frac{Q}{\kappa}, t > 0,$$

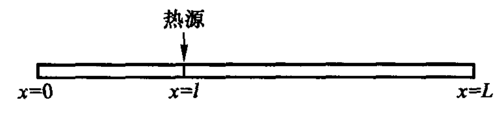


图 35

这里记号 $l \pm 0$ 等同于正好位于该热源右边和左边的点, 且 κ 仍然表示热传导率. 温度 $u(x,t)$ 的 x 导数的不连续性进入其中的方程指明从该热源有一纯热流量流

失, 而该处温度本身是连续的. 给定在 $x=0,L$ 处的 $u(x,y)$ 总是零, 现在有关的本征函数在两互补的区间上用不同的齐次方程组定义, 即:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda\right)X_-=0, 0<x<l, \left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda\right)X_+=0, l<x<L,\\&X_-(0)=0,\ \left.\frac{dX_-}{dx}\right|_{x=l}=0,\quad \left.\frac{dX_+}{dx}\right|_{x=l}=0, X_+(L)=0,\end{aligned}\tag{19.2}$$

且其结果有各自的形式

$$\left.\begin{aligned}X_{-,n}(x)&=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l},\quad 0<x<l,\\X_{+,n}(x)&=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi(L-x)}{L-l},\quad l<x<L,\end{aligned}\right\}\quad n=0,1,2,\cdots\tag{19.3}$$

引入具有公共系数集 $T_n(t)$ 的展开式

$$\begin{aligned}u_-(x,t)&=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}, 0<x<l,\\u_+(x,t)&=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi(L-x)}{L-l},\ l<x<L,\end{aligned}\tag{19.4}$$

这样来保证温度的处处连续性. 由于这两个本征函数的无关集各自是正交的, (19.4) 中的系数函数用看来好像不同的积分表示, 即

$$T_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l u_-(x,t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}dx$$

和

$$T_n(t)=\frac{2}{L-l}\int_l^L u_+(x,t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi(L-x)}{L-l}dx.$$

从上面两式继续下去, 利用对温度的偏微分方程和边界条件, 用前一章中详述的那种方式的运算操作, 建立一对关系式, 即

$$\begin{aligned}&dT_n/dt+k\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l}\right)^2T_n=\frac{2}{l}k(-1)^n\left(\frac{\partial u_-}{\partial x}\right)_{x=l-0},\\&dT_n/dt+k\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L-l}\right)^2T_n=-\frac{2k(-1)^n}{L-l}\left(\frac{\partial u_+}{\partial x}\right)_{x=l+0};\end{aligned}$$

上两式分别乘以 l 和 $L-l$, 再相加, 得出

$$\begin{aligned}&L\frac{dT_n}{dt}+k\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^2\frac{1}{l}\frac{L}{L-l}T_n\\&=-2k(-1)^n\left\{\left.\frac{\partial u_+}{\partial x}\right|_{x=l+0}-\left.\frac{\partial u_-}{\partial x}\right|_{x=l-0}\right\}=2k(-1)^n\frac{Q}{\kappa},\end{aligned}\tag{19.5}$$

它是 $T_n(t)$ 的完全确定的常微分方程. 该方程满足初始条件 $T_n(t)=0$ 的有关解是

$$T_n(t)=2\frac{Q}{\kappa}(-1)^n\frac{(L-l)l}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2L}\cdot\left[1-\exp\left\{-k\frac{\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^2t}{(L-l)l}\right\}\right],n=0,1,\cdots \tag{19.6}$$

与对 $u_-(x,t)$ 和 $u_+(x,t)$ 的展开式 (19.4) 结合在一起, 就确定了杆内温度的整体方程.

由于热源强度和边界条件是不依赖于时间的, 显然最终得到定常温度分布; 特别是

$$\begin{aligned}u_-(x,t)&\sim 2\frac{Q}{\kappa}\frac{l(L-l)}{\pi^2L}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right\}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\\&=\frac{Q}{\kappa}\frac{(L-l)x}{L},\quad 0<x<l,\quad 当\ t\to\infty,\end{aligned} \tag{19.7}$$

而

$$\begin{aligned}u_+(x,t)&\sim 2\frac{Q}{\kappa}\frac{l(L-l)}{\pi^2L}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi(L-x)}{L-l}\right\}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\\&=\frac{Q}{\kappa}\frac{(L-x)l}{L},\quad l<x<L,\quad 当\ t\to\infty.\end{aligned} \tag{19.8}$$

这些渐近式可直接从定常体系的常微分方程组

$$\frac{d^2u_-}{dx^2}=0,0<x<l,\quad \frac{d^2u_+}{dx^2}=0,l<x<L,$$
$$u_-(0)=0,\ u_+(L)=0,\ u_-(l)=u_+(l),$$
$$-\left(\frac{du_+}{dx}\right)\bigg|_{x=l+0}+\left(\frac{du_-}{dx}\right)\bigg|_{x=l-0}=\frac{Q}{\kappa}$$

推导出来, 它包括了由温度的一阶导数的不连续性所表示的一个源条件.

对给出的解析表示式的自相容性的进一步检验值得注意, 这关系到当定常温度分布出现时在热源的热释放速率和在杆的端点的总流出速率之间必需的平

衡. 从级数式 (19.4) 分别计算瞬时流量, 得出

$$j_L(t) = -\kappa \frac{\partial u_+}{\partial x}\bigg|_{x=L} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{L-l}, \quad 在\ x=L,$$

$$j_0(t) = \kappa \frac{\partial u_-}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}, \quad 在\ x=0,$$

同时得出在任一瞬时可变流出量的联合度量,

$$\begin{aligned} J(t) = j_L(t) + j_0(t) &= \pi\kappa \frac{L}{l(L-l)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n+\frac{1}{2}\right) T_n(t) \\ &= \frac{2}{\pi} Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}} \left[1 - \exp\left\{-k \frac{\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^2}{L-l} t\right\}\right]. \end{aligned} \tag{19.9}$$

所以在 $t \to \infty$ 时,

$$J(t) \sim \frac{2}{\pi} Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}}, \tag{19.10}$$

这里的数值级数可求助于以下结果 (隐含在 (19.7) 中) 求其数值,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\pi z}{2}, \quad 0 < z < \pi;$$

为此, 上式对 z 微分然后令 $z=0$, 即得出

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2},$$

所以 (19.10) 变成

$$J(t) \sim Q \quad 当\ t \to \infty,$$

从而证实了定常态所需的热平衡.

以下考虑位于周长 $2L$ 的闭圆环中有随时间变化的输出 $Q(t)$ 的一个点热源; 如果源位置与坐标原点 $x=0$ 重合, 且该环所有其他点的坐标分别在区间

$-L < x < 0, 0 < x < L$ 中, 在与周围环境无热交换的条件下, 支配此环温度 $u(x,t)$ 的方程包括

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -L < x < L, x \neq 0, t > 0, \\
&u(0^+,t) = u(0^-,t), \quad -\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0^+} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0^-} = \frac{Q(t)}{\kappa}, \\
&u(-L,t) = u(L,t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=-L} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L}, t > 0
\end{aligned} \tag{19.11}$$

和

$$u(x,0) = 0, \quad -L < x < L,$$

即初始温度为零的情形. 记号 $0^+, 0^-$ 表示热源位置相反的两边上几乎重合的点.

对这环形区域, 如第十五章中所引出的, 有本征函数的线性无关集, 即

$$\left\{\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}, \left\{\sin\frac{n\pi x}{L}\right\}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

其中唯独前者有偶对称性, 切合当前问题. 因此, 引入用这样的相关本征函数表示的 $u(x,t)$ 的展开式,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\frac{n\pi x}{L}, \quad -L < x < L, \tag{19.12}$$

然后应用表示式

$$T_0(t) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} u(x,t)dx,$$

$$T_n(t) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} u(x,t)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, n = 1, 2, \cdots$$

记住 $\partial u/\partial x$ 在 $x = 0$ 处是不连续的, $T_0(t)$ 对 t 微分的结果得出

$$\begin{aligned}
\frac{dT_0}{dt} &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dx = \frac{k}{2L}\int_{-L}^{L}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx \\
&= \frac{k}{2L}\left\{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0^+}^{x=L} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=-L}^{x=0^-}\right\} \\
&= \frac{k}{2L}\left[-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0^+} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0^-}\right] \\
&= \frac{k}{2\kappa L}Q(t),
\end{aligned}$$

且这常微分方程的解

$$T_0(t) = \frac{k}{2\kappa L}\int_0^t Q(t')dt' \tag{19.13}$$

唯一地适合初始条件 $T_0(0) = 0$.

按类似方式建立 $T_n(t)$ 的非齐次常微分方程, 即

$$\frac{dT_n}{dt} + k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T_n = \frac{k}{\kappa L}Q(t), n = 1, 2, \cdots$$

且所要求的在 $t = 0$ 为零的解是

$$T_n(t) = \frac{k}{\kappa L}\int_0^t Q(t')e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2(t-t')}dt'. \tag{19.14}$$

考虑到表示式 (19.13),(19.14) 后, 级数 (19.12) 得到了完全详细的描述, 因而提供了这热源问题的一个解.

特别地, 如果热源有定常状态且 $Q(t) = Q$, 则由此得出表示式

$$T_0(t) = \frac{Qk}{2\kappa L}t,$$

$$T_n(t) = \frac{QL}{\kappa(n\pi)^2}\left(1 - e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\right), n = 1, 2, \cdots$$

且对应的温度分布

$$u(x,t) = \frac{Qk}{2\kappa L}t + \frac{QL}{\kappa\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1 - e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\right)\cos\frac{n\pi x}{L}, \quad -L < x < L, t > 0 \tag{19.15}$$

最终取近似式

$$u(x,t) = \frac{Qk}{2\kappa L}t + \frac{QL}{\kappa\pi^2}f(x), \quad 当 t \to \infty$$

这里

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{L}.$$

将这式子代入对 u 的偏微分方程, 表明

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{\pi^2}{2L^2}, \quad -L < x < L, x \neq 0, \tag{19.16}$$

且所要求的解必须满足条件

$$f(x) = f(-x),$$

$$-\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0^-}^{x=0^+} = \frac{\pi^2}{L},$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0,$$

这里最后的式子是从关系式

$$\int_{-L}^{L} u(x,t)dx = 2LT_0(t) = \frac{Qk}{\kappa}t$$

导出的. (19.16) 的积分

$$f(x) = \frac{\pi^2}{4L^2}x^2 - \frac{\pi^2}{2L}|x| + C$$

满足前两个条件, 且第三个条件确定了 C 的值为 $\pi^2/6$. 所以

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\frac{n\pi x}{L} = \frac{\pi^2 x^2}{4L^2} - \frac{\pi^2}{2L}|x| + \frac{\pi^2}{6}, \quad -L < x < L,$$

且在长时间后由定常源产生的环的温度的估计为

$$u(x,t) \sim \frac{Qk}{2\kappa L}t + \frac{Q}{\kappa}\left(\frac{x^2}{4L} - \frac{1}{2}|x| + \frac{L}{6}\right), \quad 当\ t \to \infty, \tag{19.17}$$

同时有明显的和所要求的属性.

考虑一个可变源函数

$$Q(t) = \frac{H}{\tau}e^{-t/\tau}, \quad t > 0, \tag{19.18}$$

当特征时间 τ 为小的量时其总的热输出 H 释放得更快; 在 $\tau \to 0$ 的极限情形近似式

$$T_0 = \frac{Hk}{2\kappa L},$$

$$T_n(t) = \frac{Hk}{\kappa L}e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

成立, 且由此环温度

$$u(x,t) = \frac{Hk}{2\kappa L} + \frac{Hk}{\kappa L}\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi x}{L}e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \quad -L < x < L, t > 0 \tag{19.19}$$

可归因于在原点 $x = 0$ 的瞬时作用源. 虽然温度分布 (19.19) 是依赖于时间的, 它的沿环的积分值则不然, 且

$$\int_{-L}^{L} u(x,t)dx = H$$

是必需的热平衡关系.

习 题 19

1. 给定方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<L,t>0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=hu(0,t),h>0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L}=0,$$

$$-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l-0}^{x=l+0}=\frac{Q}{\kappa},\quad 0<l<L,t>0$$

和

$$u(x,0)=0,\quad 0<x<L,$$

它描述在包含一稳定热源且过一端点 $(x=0)$ 以变速率失去热的一根杆上 (处处连续的) 温度分布 $u(x,t)$. 决定对所有时间值的温度且讨论最终定常态的可能性.

2. 分析方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<L,t>0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\frac{f(t)}{\kappa},\ -\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l-0}^{x=l+0}=\frac{Q}{\kappa},0<l<L,u(L,t)=0$$

和

$$u(x,0)=g(x),\quad 0<x<L.$$

3. 考虑在有限时间区间 $0<t<\tau$ 内作用有强度为 Q_1 的点源的圆环; 且假设有一 "汇点", 该处热从此环以定常速率 Q_2 流出, 汇恰好在源变得不起作用后开始起作用. 用数学术语将这问题公式化, 且在假定 $Q_2<Q_1$ 的条件下决定在时间 $t=2\tau$ 时环内的热量.

4. 研究修正的扩散方程的局部热源问题

$$\frac{\partial n}{\partial t}=D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}+v\frac{\partial n}{\partial x},\quad 0<x<L,t>0,$$

且此时

$$D\frac{\partial n}{\partial x}+vn=0,x=0,L,\quad v(x,0)=0,0<x<L,$$

和

$$D\left.\frac{\partial n}{\partial x}\right|_{l-0}^{l+0}=\frac{dq}{dt}.$$

第二十章

一种非均一结构的问题

考虑一复合杆, 它由两部分组成 (虽然每部分都是均匀的), 其热参数和长度各不相同; 且假设确定全杆温度

$$u(x,t)=\begin{cases}u_1(x,t), & -L_1<x<0,\\ u_2(x,t), & 0<x<L_2\end{cases} \tag{20.1}$$

的方程是

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_1}{\partial t}=k_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},\quad -L_1<x<0;\quad \frac{\partial u_2}{\partial t}=k_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2},\quad 0<x<L_2,\\ u_1(-L_1,t)=0,\quad u_2(L_2,t)=0,\\ u_1(0,t)=u_2(0,t),\quad \kappa_1\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0}=\kappa_2\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=0},\quad t>0\end{gathered} \tag{20.2}$$

和

$$u_1(x,0)=f_1(x),\quad -L_1<x<0,\qquad u_2(x,0)=f_2(x),\quad 0<x<L_2.$$

(20.2) 中的偏微分方程的特解

$$u_1(x,t)=A\sin\sqrt{\frac{\lambda}{k_1}}(L_1+x)\cdot e^{-\lambda t}$$

和

$$u_2(x,t)=B\sin\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}(L_2-x)\cdot e^{-\lambda t}$$

在 $x=-L_1, L_2$ 满足各自的边界条件且有相同的时间依赖性; 在两不同部分 $x \lessgtr 0$ 之间的接触点上所加条件给出一对关于 A, B 的线性方程

$$\left(\sin\sqrt{\frac{\lambda}{k_1}}L_1\right)A-\left(\sin\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}L_2\right)B=0,$$

$$\kappa_1\sqrt{\lambda/k_1}\left(\cos\sqrt{\frac{\lambda}{k_1}}L_1\right)A+\kappa_2\sqrt{\lambda/k_2}\left(\cos\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}L_2\right)B=0,$$

为了排除导致平凡解 $u_1=u_2\equiv 0$ 的 $A=B=0$ 的可能性, 得到一个对本征值 $\lambda(\neq 0)$ 的超越方程, 即

$$\kappa_1/\sqrt{k_1}\cot\sqrt{\frac{\lambda}{k_1}}L_1+\kappa_2/\sqrt{k_2}\cot\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}}L_2=0. \tag{20.3}$$

上面找到的 A 和 B 之间的比例关系提示了与 (20.3) 的第 n 个根相伴的本征函数的合适形式,

$$\overline{X}^{(n)}(x)=\begin{cases}X_1^{(n)}(x)=\dfrac{\sin\sqrt{\dfrac{\lambda_n}{k_1}}(L_1+x)}{\sin\sqrt{\dfrac{\lambda_n}{k_1}}L_1}, -L_1<x<0,\\[2em] X_2^{(n)}(x)=\dfrac{\sin\sqrt{\dfrac{\lambda_n}{k_2}}(L_2-x)}{\sin\sqrt{\dfrac{\lambda_n}{k_2}}L_2}, 0<x<L_2;\end{cases} \tag{20.4}$$

函数 $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, dX_1^{(n)}/dx, dX_2^{(n)}/dx$ 中的每一个在各自的定义域上连续地变化, 它们在公共点 $x=0$ 处的相互联系由下列方程描述

$$\begin{aligned}X_1^{(n)}(0)&=X_2^{(n)}(0),\\ \kappa_1\frac{d}{dx}X_1^{(n)}\bigg|_{x=0}&=\kappa_2\frac{d}{dx}X_2^{(n)}\bigg|_{x=0}.\end{aligned} \tag{20.5}$$

考虑常微分方程

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\lambda_n}{k_1}\right)X_1^{(n)}=0,\quad \left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\lambda_n}{k_2}\right)X_2^{(n)}=0$$

以及在 $x=-L_1, L_2$ 的边界条件, 由此推导出对任一对不同的本征函数及其对应的本征值, 有

$$(\lambda_n-\lambda_m)\int_{-L_1}^{0}\frac{\kappa_1}{k_1}X_1^{(n)}(x)X_1^{(m)}(x)dx=\kappa_1\left[X_1^{(n)}(x)\frac{dX_1^{(m)}}{dx}-X_1^{(m)}\frac{dX_1^{(n)}}{dx}\right]_{x=0}$$

和

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^{L_2} \frac{\kappa_2}{k_2} X_2^{(n)}(x) X_2^{(m)}(x) dx = -\kappa_2 \left[X_2^{(n)}(x) \frac{dX_2^{(m)}}{dx} - X_2^{(m)} \frac{dX_2^{(n)}}{dx} \right]_{x=0}$$

当相加上面两关系式且用 (20.5) 连同关系式

$$\frac{\kappa_1}{k_1} = \rho_1 c_1, \quad \frac{\kappa_2}{k_2} = \rho_2 c_2,$$

得出的结果

$$(\lambda_n - \lambda_m) \left[\int_{-L_1}^{0} \rho_1 c_1 X_1^{(n)} X_1^{(m)} dx + \int_0^{L_2} \rho_2 c_2 X_2^{(n)} X_2^{(m)} dx \right] = 0$$

提供了本征函数 $\overline{X}^{(n)}(x)$ 的正交性质, 即:

$$\int_{-L_1}^{0} \rho_1 c_1 X_1^{(n)}(x) X_1^{(m)}(x) dx + \int_0^{L_2} \rho_2 c_2 X_2^{(n)}(x) X_2^{(m)}(x) dx = 0, n \neq m. \quad (20.6)$$

为了处理 (20.2) 中剩下的初始条件, 可取满足其中规定的所有其他要求的特解之和, 即

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \end{cases} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \overline{X}^{(n)}(x) e^{-\lambda_n t}, \quad (20.7)$$

且系数 A_n 是下面的复合 Fourier 展开式的系数,

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \overline{X}^{(n)}(x) = \begin{cases} f_1(x), & -L_1 < x < 0, \\ f_2(x), & 0 < x < L_2. \end{cases}$$

应用 (20.6), 这些系数可以从以下表示式分别地找到.

$$\begin{aligned} & A_n \left\{ \int_{-L_1}^{0} \rho_1 c_1 (X_1^{(n)}(x))^2 dx + \int_0^{L_2} \rho_2 c_2 (X_2^{(n)}(x))^2 dx \right\} \\ = & \int_{-L_1}^{0} \rho_1 c_1 f_1(x) X_1^{(n)}(x) dx + \int_0^{L_2} \rho_2 c_2 f_2(x) X_2^{(n)}(x) dx, \quad n = 1, 2, \cdots \end{aligned} \quad (20.8)$$

且联合 (20.3),(20.4),(20.7),(20.8) 就可描述所求的解.

习 题 20

1. 不可溶解的物质在包含两种不同流体的圆柱容器中的扩散问题由以下的方

程组定义

$$\frac{\partial n_1}{\partial t}=D_1\frac{\partial^2 n_1}{\partial x^2},\quad -L_1<x<0,\quad \frac{\partial n_2}{\partial t}=D_2\frac{\partial^2 n_2}{\partial x^2},\quad 0<x<L_2,$$

$$\left.\frac{\partial n_1}{\partial x}\right|_{x=-L_1}=0,\ \left.\frac{\partial n_2}{\partial x}\right|_{x=L_2}=0,$$

$$n_1(0,t)=\sigma n_2(0,t),\quad D_1\left.\frac{\partial n_1}{\partial x}\right|_{x=0}=D_2\left.\frac{\partial n_2}{\partial x}\right|_{x=0},\quad t>0$$

和

$$n_1(x,0)=C_1,\quad -L_1<x<0,\quad n_2(x,0)=C_2,\quad 0<x<L_2,$$

这里 C_1,C_2 是常数. 证明: 当 λ 是本征值方程

$$\sigma\sqrt{D_1}\tan\sqrt{\frac{\lambda}{D_1}}L_1+\sqrt{D_2}\tan\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}L_2=0 \tag{*}$$

的一个根时, 得到分离变量解

$$n_1(x,t)=A\cos\sqrt{\frac{\lambda}{D_1}}(L_1+x)e^{-\lambda t},\quad -L_1<x<0,$$

$$n_2(x,t)=B\cos\sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}(L_2-x)e^{-\lambda t},\quad 0<x<L_2,$$

且这些解可表成形式

$$\overline{n}(x,t)=\begin{cases}n_1(x,t)=X_1^{(n)}(x,\lambda_n)e^{-\lambda_n t},\\ n_2(x,t)=X_2^{(n)}(x,\lambda_n)e^{-\lambda_n t},\end{cases}$$

这里本征函数

$$X_1^{(n)}=\frac{\cos\sqrt{\frac{\lambda_n}{D_1}}(L_1+x)}{\cos\sqrt{\frac{\lambda_n}{D_1}}L_1},\quad X_2^{(n)}(x)=\frac{\cos\sqrt{\frac{\lambda_n}{D_2}}(L_2-x)}{\sigma\cos\sqrt{\frac{\lambda_n}{D_2}}L_2}$$

由一对等式

$$X_1^{(n)}(0)=X_2^{(n)}(0),$$

$$D_1\left.\frac{d}{dx}X_1^{(n)}\right|_{x=0}=D_2\left.\frac{d}{dx}X_2^{(n)}\right|_{x=0}$$

连接起来, 第二个等式是本征值方程 (*) 的推论. 建立正交性关系式

$$\int_{-L_1}^{0}\frac{1}{\sigma}X_1^{(n)}(x)X_1^{(m)}(x)dx+\int_0^{L_2}X_2^{(n)}(x)X_2^{(m)}(x)dx=0,\quad n\neq m,$$

且在级数

$$\overline{n}(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\overline{X}^{(n)}(x,\lambda_n)e^{-\lambda_n t},\quad -L_1<x<L_2$$

中求得系数 A_n 的表示式, 上式融入了 $n_1(x,t)$ 和 $n_2(x,t)$ 的指定初始值.

给定与零本征值 $\lambda_0=0$ 相应的非平凡本征函数, 如果 $n_1(x,0)=C_1$, $n_2(x,0)=C_2$, 进一步确定

$$A_0=\sigma\frac{C_1+C_2(L_2/L_1)}{\dfrac{L_2}{L_1}+\sigma};$$

且注意由本征值 $\lambda_n, n=1,2,\cdots$ 的正性所蕴含的估计式

$$n_1\sim\sigma\frac{C_1+C_2\dfrac{L_2}{L_1}}{\sigma+\dfrac{L_2}{L_1}},\quad n_2\sim\frac{C_1+\dfrac{L_2}{L_1}C_2}{\sigma+\dfrac{L_2}{L_1}}\quad 当\ t\to\infty. \tag{**}$$

此外, 证明: 在特殊情形

$$\frac{L_1}{\sqrt{D_1}}=\frac{L_2}{\sqrt{D_2}} \tag{***}$$

且本征值方程简单地变成

$$\tan\sqrt{\frac{\lambda}{D_1}}L_1=0$$

时, 则所确定的式子 (**) 在所有时间成立.

当特殊条件 (***) 成立时, 有另一个更直接的方法去导出在不同流体的分界面上与时间无关的浓度水平 n_1, n_2. 为此, 引入偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<l,\quad t>0$$

的一个解

$$u(x,t)=U(x,t),$$

它具有性质

$$U(x,0)=0,\quad 0<x<l,$$

$$U(0,t)=1,\quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=l}=0,\quad t>0,$$

然后取表示式

$$n(x,t) = C_1 + (n_1 - C_1)U\left(-\frac{x}{L_1}, \frac{D_1}{L_1^2}t\right), \quad -L_1 < x < 0,$$
$$n(x,t) = C_2 + (n_2 - C_2)U\left(\frac{x}{L_2}, \frac{D_2}{L_2^2}t\right), \quad 0 < x < L_2,$$

这里 $n_1 = n(0^-, t)$ 和 $n_2 = n(0^+, t)$ 假设为常数.

证实

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}, \quad -L_1 < x < 0,$$
$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L_2,$$

此外还有

$$n(x,0) = C_1, -L_1 < x < 0, n(x,0) = C_2, \quad 0 < x < L_2,$$
$$\left.\frac{\partial n}{\partial x}\right|_{x=-L_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial n}{\partial x}\right|_{x=L_2} = 0, \quad t > 0.$$

用界面条件

$$D_1 \left.\frac{\partial n}{\partial x}\right|_{x=0} = D_2 \left.\frac{\partial n}{\partial x}\right|_{x=0}, \quad t > 0$$

和关联两不同流体参数的特殊条件 $(***)$ 去得到关系式

$$L_1 n_1 + L_2 n_2 = L_1 C_1 + L_2 C_2.$$

再求助于条件

$$n_1 = \sigma n_2$$

从而建立结果 $(**)$.

2. 考虑上述问题的一种变形, 其中扩散在无限长容器 $(L_1 \to \infty, L_2 \to \infty)$ 内发生; (回顾第四章后) 验证

$$n(x,t) = n_1 + (C_1 - n_1)\mathrm{erf}\left(-\frac{x}{2\sqrt{D_1 t}}\right), \quad x < 0$$

$(\mathrm{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\zeta^2} d\zeta)$ 表示偏微分方程

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}, \quad x < 0$$

的一个解, 且有性质

$$n(0,t)=n_1,\quad \text{与时间无关},$$
$$n(x,0)=C_1,\quad n(x,t)\sim C_1,\quad \text{当 } x\to-\infty.$$

类似地, 验证

$$n(x,t)=n_2+(C_2-n_2)\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_2t}}\right),\quad x>0$$

满足偏微分方程

$$\frac{\partial n}{\partial t}=D_2\frac{\partial^2 n}{\partial x^2},\quad x>0,$$

且有性质

$$n(0,t)=n_2,\quad \text{与时间无关},$$
$$n(x,0)=C_2,\quad x>0,\quad n(x,t)\sim C_2,\quad \text{当 } x\to\infty.$$

加上条件

$$n_1=\sigma n_2,\quad D_1\left.\frac{\partial n}{\partial x}\right|_{x=0^-}=D_2\left.\frac{\partial n}{\partial x}\right|_{x=0^+}$$

去求得确定的表示式

$$n_1=\sigma\frac{C_1+C_2\sqrt{D_2/D_1}}{\sigma+\sqrt{D_2/D_1}},\quad n_2=\frac{C_1+C_2\sqrt{D_2/D_1}}{\sigma+\sqrt{D_2/D_1}},$$

且注意当特殊关系式

$$L_1/\sqrt{D_1}=L_2/\sqrt{D_2}$$

成立时它们与问题 1 中前面的对应部分 (**) 相同.

3. 研究由两个均匀而不同的部分 $-L_1<x<0, 0<x<L_2$ 构成的杆内的变温度分布, 假设整个杆的初始温度为零, 此后在一端点 $(x=L_2)$ 取零值, 在另一端点 $(x=-L_1)$ 适用非齐次条件, 即

$$\frac{\partial u}{\partial x}+hu=f(t),\quad h>0,t>0.$$

第二十一章

其他的本征函数/本征值问题

关于除扩散型外的其他现象的偏微分方程的分析中遇到的本征函数和本征值, 值得讲述某些额外的细节. 因此, 考虑在圆柱形均匀弹性杆中的轴向运动, 即其中任一横截面的各点沿圆柱母线方向经历一个小的且共同的位移的那种运动. 设 $u(x,t)$ 作为在 x 位置的物质薄片的位移的度量, 则

$$v(x,t)=\frac{\partial u}{\partial t} \tag{21.1}$$

定义对应的速度; 运动的动力学方程把速度和内应力函数 $\sigma(x,t)$ 联系起来, 即

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}=\rho\frac{\partial v}{\partial t}, \tag{21.2}$$

这里 ρ 是质量密度. 应用 Hooke 定律, 即

$$\sigma(x,t)=E\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{21.3}$$

其中 E 表示弹性性质的一个参数, σ 和 v 之间的第二个关系由 (21.3) 对时间 t 微分且参照 (21.1) 得出, 即:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}=E\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{21.4}$$

这样 (21.2) 和 (21.4) 组成关于所考虑类型运动的一个联立一阶偏微分方程组, 对单独的状态函数的偏微分方程也是可以利用的, 特别是适用于位移的二阶方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad c^2=\frac{E}{\rho}. \tag{21.5}$$

对波动方程 (21.5) 的定解问题在补充附加条件, 即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=L}=0,$$
$$u(x,0)=f(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x),\quad 0<x<L \tag{21.6}$$

后就确定了, 这里边界条件是在端点 $(x=0)$ 处固定, 而在另一端点 $(x=L)$ 处浸入于黏性流体中. 两个初始条件是恰当的, 因为该偏微分方程包含对时间的二阶导数. 对一类特解采用乘积表示式

$$u(x,t)=X(x)T(t), \tag{21.7}$$

这里的两个单变量因子可用带共同参数的有共同形式的二阶常微分方程来描述, 即

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\lambda^2X=0,0<x<L,\quad \frac{d^2T}{dt^2}+(\lambda c)^2T=0,t>0. \tag{21.8}$$

在 $x=L$ 的边界条件的对应变化形式

$$T(t)\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=L}+\alpha X(L)\frac{dT}{dt}=0,\quad t>0 \tag{21.9}$$

表明, 如果 dT/dt 和 T 之间成比例, 则时间变量可以从那里消去; 这可以通过利用对 $T(t)$ 的常微分方程的一个特定的复值解达到, 即:

$$T(t,\lambda)=e^{i\lambda ct}=\cos\lambda ct+i\sin\lambda ct, \tag{21.10}$$

使得

$$\frac{dT}{dt}=i\lambda cT, \tag{21.11}$$

相比之下, 该常微分方程带有任意常数 A,B 的通解

$$T(t,\lambda)=A\cos\lambda ct+B\sin\lambda ct$$

有与 T 本身不成比例的导数.

因此, 从 (21.9),(21.11) 得出

$$\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=L}+i\alpha c\lambda X(L)=0, \tag{21.12}$$

而且当把在 $x=0$ 对所有 λ 满足边界条件 $dX/dx=0$ 的函数

$$X(x,\lambda)=\cos\lambda x \tag{21.13}$$

代入 (21.12) 时, 结果为一个包含虚系数的本征值方程

$$\tan \lambda L = i\alpha c. \tag{21.14}$$

利用关系式

$$\sin \mu = \frac{1}{2i}(e^{i\mu} - e^{-i\mu}), \quad \cos \mu = \frac{1}{2}(e^{i\mu} + e^{-i\mu})$$

及其直接推论

$$\tan \mu = \frac{1}{i}\frac{e^{2i\mu} - 1}{e^{2i\mu} + 1},$$

本征值方程 (21.14) 可改写成形式

$$e^{2i\lambda L} = \frac{1 - \alpha c}{1 + \alpha c},$$

从而得到 λ 的显式表示, 即

$$2i\lambda L = \ln\left(\frac{1 - \alpha c}{1 + \alpha c}\right),$$

这里 ln 表示自然对数函数. ln 的变元是正或负依赖于 $\alpha c \lessgtr 1$, 且在不同情形下该函数分别取不同的值 (由复变量分析确定), 即

$$\ln\left(\frac{1 - \alpha c}{1 + \alpha c}\right) = \ln\left|\frac{1 - \alpha c}{1 + \alpha c}\right| + \begin{cases} 2in\pi, & \alpha c < 1, \\ 2i\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi, & \alpha c > 1, \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \cdots$$

因此在这例子中出现了复本征值, 其具体表示为

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L} - \frac{i}{2L}\ln\left|\frac{1 - \alpha c}{1 + \alpha c}\right|, \quad \alpha c < 1 \tag{21.15}$$

或

$$\lambda_n = \frac{n + \frac{1}{2}}{L}\pi - \frac{i}{2L}\ln\left|\frac{1 - \alpha c}{1 + \alpha c}\right|, \quad \alpha c > 1$$

且对应的本征函数

$$X_n(x, \lambda_n) = \cos \lambda_n x$$

也是复值的. 值得关注的是: 偏微分方程 (21.5) 满足 (21.6) 所述边界条件的所有分离变量特解

$$u_n(x, t) = X_n(x, \lambda_n)e^{i\lambda_n ct} \tag{21.16}$$

有一个共同的不依赖于本征值指标 n 的按指数递减的时间因子

$$\exp\left\{-\frac{c}{2L}\ln\left|\frac{1 + \alpha c}{1 - \alpha c}\right| t\right\}.$$

迄今与初值条件或激发方式无关的 (21.6) 型的固有运动或自由运动展示的阻尼、衰减由基本方程对 (21.2),(21.4) 得出的微分恒等式所预示; 为此, 这两方程分别乘以 v 和 σ, 然后相加, 其结果是

$$\rho v\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{E}\sigma\frac{\partial \sigma}{\partial t}=v\frac{\partial \sigma}{\partial x}+\sigma\frac{\partial v}{\partial x},$$

或更紧凑地

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\frac{1}{2E}\sigma^2\right)=\frac{\partial}{\partial x}(v\sigma). \tag{21.17}$$

在 $(0,L)$ 上对 x 积分, 考虑到边界条件 (21.6), 得出

$$\frac{d}{dt}\varepsilon=v\sigma\Big|_{x=0}^{x=L}=\frac{\partial}{\partial t}u(L,t)\sigma(L,t)=-\alpha E\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2_{x=L}, \tag{21.18}$$

这里

$$\varepsilon(t)=\int_0^L\left\{\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}dx$$

表示杆中弹性激发的总能量 (动能和势能). 当 $\alpha>0$ 时, (21.18) 确实预示了能量的不断减少, 而且与杆在 $x=L$ 的终端变化方式有关.

本征函数的一个积分性质, 与加在和式

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nX_n(x,\lambda_n)e^{i\lambda_n ct}$$

上的初始条件有直接关系, 这个性质可以依靠限定的常微分方程

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda_n^2\right)X_n=0,\quad 0<x<L,\\ \left(\frac{d^2}{dx^2}+\overline{\lambda_m^2}\right)\overline{X}_m=0,\quad 0<x<L\end{aligned} \tag{21.19}$$

来建立, 这里上划线表示该量的复共轭. (21.19) 中分别乘以 $\overline{X}_m$ 和 X_n, 相减再积分, 得出

$$(\lambda_n^2-\overline{\lambda_m^2})\int_0^L X_n\overline{X}_m dx=-\int_0^L\overline{X}_m\frac{d^2}{dx^2}X_n dx+\int_0^L X_n\frac{d^2}{dx^2}\overline{X}_m dx. \tag{21.20}$$

其中右边第一项分部积分后得

$$\int_0^L\overline{X}_m\frac{d^2}{dx^2}X_n dx=\left[\overline{X}_m\frac{d}{dx}X_n-X_n\frac{d}{dx}\overline{X}_m\right]_{x=0}^{x=L}+\int_0^L X_n\frac{d^2}{dx^2}\overline{X}_m dx,$$

且把它应用到 (21.20), 连同 $X_n, \overline{X}_m$ 所满足的边界条件一起就得到

$$(\lambda_n^2 - \overline{\lambda_m^2}) \int_0^L X_n \overline{X}_m dx = -\left[\overline{X}_m \frac{d}{dx} X_n + X_n \frac{d}{dx} \overline{X}_m\right]_{x=0}^{x=L}$$
$$= i\alpha c(\lambda_n + \overline{\lambda_m}) X_n(L) \overline{X}_m(L),$$

或

$$(\overline{\lambda}_m - \lambda_n) \int_0^L X_n \overline{X}_m dx + i\alpha c X_n(L) \overline{X}_m(L) = 0, \quad n \neq m. \tag{21.21}$$

由 (21.21) 可见本征函数不是正交的, 因此基于这种函数的级数展开式中系数的决定要求不同于常规的运算 (回顾第十六章).

通过考虑修正波动方程

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\nu}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad 0 < x < L, t > 0 \tag{21.22}$$

连同齐次边界条件

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, t > 0 \tag{21.23}$$

和一对初始条件

$$u(x,0) = f(x), \quad \left.\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L, \tag{21.24}$$

能进一步领会本征函数和本征值概念内蕴的广阔应用范围和灵活性. 在常系数偏微分方程 (21.22) 中分离变量, 设

$$u(x,t) = X(x) e^{i\lambda ct}, \tag{21.25}$$

那么齐次边值问题

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2i\nu\lambda \frac{d}{dx} + \lambda^2\right) X = 0, \quad 0 < x < L, \tag{21.26}$$
$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0$$

刻画了该问题的本征函数. 常微分方程 (21.26) 的线性无关解有形式

$$e^{i\lambda\nu x} e^{\pm i\lambda\sqrt{1+\nu^2}x}$$

且

$$X(x, \lambda) = e^{i\lambda\nu x} \sin \lambda\sqrt{1+\nu^2}x$$

显然满足条件 $X(0) = 0$; 如果有

$$\sin \lambda\sqrt{1+\nu^2}L = 0,$$

则条件 $X(L)=0$ 得以保证, 因此推演出实本征值的确定值

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{L\sqrt{1+\nu^2}},\quad n=\pm1,\pm2,\cdots \tag{21.27}$$

借助于复值本征函数

$$X_n(x,\lambda_n)=e^{i\lambda_n\nu x}\sin\frac{n\pi x}{L},\quad n=\pm1,\pm2,\cdots \tag{21.28}$$

的微分方程, 即

$$\frac{d^2}{dx^2}X_n-2i\nu\lambda_n\frac{d}{dx}X_n+\lambda_n^2X_n=0$$

和

$$\frac{d^2}{dx^2}\overline{X}_m+2i\nu\lambda_m\frac{d}{dx}\overline{X}_m+\lambda_m^2\overline{X}_m=0,$$

利用多次详述过的一类论证, 即可推导出

$$(\lambda_m-\lambda_n)\int_0^L X_n(x)\left[(\lambda_m+\lambda_n)\overline{X}_m(x)+2i\nu\frac{d}{dx}\overline{X}_m(x)\right]dx=0,$$

所以

$$\int_0^L X_n(x)\left[(\lambda_m+\lambda_n)\overline{X}_m(x)+2i\nu\frac{d}{dx}\overline{X}_m(x)\right]dx=0,\quad n\neq m. \tag{21.29}$$

当 $m=n$ 时, 后一积分的直接计算是简单的, 即

$$\begin{aligned}&\int_0^L X_n(x)\left[2\lambda_n\overline{X}_n(x)+2i\nu\frac{d}{dx}\overline{X}_n(x)\right]dx\\&=2\lambda_n(1+\nu^2)\int_0^L\sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx+i\frac{n\pi\nu}{L}\int_0^L\sin\frac{2n\pi x}{L}dx\\&=\lambda_n(1+\nu^2)L=n\pi\sqrt{1+\nu^2},\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^L X_n(x)\left[(\lambda_n+\lambda_m)\overline{X}_m(x)+2i\nu\frac{d}{dx}\overline{X}_m(x)\right]dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ n\pi\sqrt{1+\nu^2}, & m=n,\end{cases} \tag{21.30}$$

就表示了对 (21.29) 的推广.

把偏微分方程 (21.22) 的分离变量解汇集在一起, 即:

$$u(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nX_n(x,\lambda_n)e^{i\lambda_n ct}, \tag{21.31}$$

且加上初始条件 (21.24), 就得到两个级数展开式

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n X_n(x), \quad g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\lambda_n a_n X_n(x), 0 < x < L, \tag{21.32}$$

为了得到确定系数 a_n 的各个表示式, 注意涉及给定函数 f, g 的预备性关系式, 即:

$$\begin{aligned} & f(x)\left[\lambda_m \overline{X}_m(x) + 2i\nu \frac{d}{dx}\overline{X}_m(x)\right] - ig(x)\overline{X}_m(x) \\ = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n X_n(x)\left[(\lambda_n + \lambda_m)\overline{X}_m(x) + 2i\nu \frac{d}{dx}\overline{X}_m(x)\right]. \end{aligned}$$

用积分性质 (21.30) 后, 立即得到想要的表示式, 即

$$\begin{aligned} a_m = \frac{1}{m\pi\sqrt{1+\nu^2}} \int_0^L & \left\{ f(x)\left[\lambda_m \overline{X}_m(x) + 2i\nu \frac{d}{dx}\overline{X}_m(x)\right]\right. \\ & \left. - ig(x)\overline{X}_m(x)\right\} dx, \quad m = \pm 1, \pm 2, \cdots \end{aligned} \tag{21.33}$$

从偏微分方程 (21.22) 导出的一个恒等式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] = 0$$

蕴涵非负函数

$$\varepsilon(t) = \int_0^L \left\{\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\} dx$$

不随时间而变, 只要如假定的那样, 在 $x = 0, L$, 对所有的 $t > 0, u$ 及其时间导数为零; 此外, 将这个性状与本征值的实数性联系起来是合适的.

本征函数和本征值与包含高阶偏微分方程的问题也有关系; 为此考虑四阶方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad 0 < x < L \tag{21.34}$$

和一组齐次边界条件

$$u(0,t) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \ u(L,t) = 0, \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0, \quad t > 0. \tag{21.35}$$

分离变量解

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{21.36}$$

的存在性现在有赖于由带有未定参数 λ 的方程

$$\left(\frac{d^4}{dx^4} - \lambda\right) X = 0, \quad 0 < x < L \tag{21.37}$$

和

$$X(0)=0,\quad \left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=0}=0,\quad X(L)=0,\quad \left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=L}=0$$

所定义的齐次边值问题的非平凡解的存在性. 常微分方程 (21.37) 的通解有两个不同的形式, 即

$$X(x)=A\cosh\mu x+B\sinh\mu x+C\cos\mu x+D\sin\mu x \tag{21.38}$$

和

$$X(x)=\alpha e^{\mu x}+\beta e^{-\mu x}+\gamma\cos\mu x+\delta\sin\mu x,$$

这里

$$\mu=\lambda^{1/4}. \tag{21.39}$$

当考虑构造基本解组

$$X_1(x),X_2(x),X_3(x),X_4(x)$$

时, 证明前者是有优越性的. 它们在 $x=0$ 的指定值, 连同其前三阶导数的指定值, 在下表的相继行中给出:

	X	$\frac{dX}{dx}$	$\frac{d^2X}{dx^2}$	$\frac{d^3X}{dx^3}$
X_1	1	0	0	0
X_2	0	1	0	0
X_3	0	0	1	0
X_4	0	0	0	1

利用 $X_1(0)=1,\dfrac{dX_1(0)}{dx}=\dfrac{d^2X_1(0)}{dx^2}=\dfrac{d^3X_1(0)}{dx^3}=0$, 对特解 $X_1(x)$ 容易求得 $A=C=1/2,B=D=0$, 所以

$$X_1(x)=\frac{1}{2}\cosh\mu x+\frac{1}{2}\cos\mu x,$$

用类似方法求得另三个基本解为

$$X_2(x)=\frac{1}{2\mu}\sinh\mu x+\frac{1}{2\mu}\sin\mu x,$$
$$X_3(x)=\frac{1}{2\mu^2}\cosh\mu x-\frac{1}{2\mu^2}\cos\mu x \tag{21.40}$$

和

$$X_4(x)=\frac{1}{2\mu^3}\sinh\mu x-\frac{1}{2\mu^3}\sin\mu x. \tag{21.41}$$

现在可用这四元组来刻画常微分方程组 (21.37) 的通解的另一形式, 即

$$X(x) = C_1X_1(x) + C_2X_2(x) + C_3X_3(x) + C_4X_4(x), \tag{21.42}$$

它比前面的 (21.38) 具有优越性. 这样分别从条件 $X(0) = 0$ 和 $dX/dx|_{x=0} = 0$ 得出 $C_1 = 0$ 和 $C_2 = 0$; 由此得到的 (21.42) 的简化结果

$$X(x) = C_3X_3(x) + C_4X_4(x), \quad 0 < x < L \tag{21.43}$$

满足在 $x = L$ 的边界条件当且仅当关系式

$$\begin{aligned} C_3X_3(L) + C_4X_4(L) = 0, \\ C_3\frac{d}{dx}X_3\bigg|_{x=L} + C_4\frac{d}{dx}X_4\bigg|_{x=L} = 0 \end{aligned} \tag{21.44}$$

成立. 由 (21.44) 推导出以下两者

$$C_3 = 0, C_4 = 0 \quad \text{且} \quad X(x) \equiv 0$$

或

$$X_3(L) \cdot \frac{d}{dx}X_4\bigg|_{x=L} - \frac{d}{dx}X_3\bigg|_{x=L} \cdot X_4(L) = 0 \tag{21.45}$$

必居其一且后者构成该问题的本征值方程. 在这里代入 X_3, X_4 的表示式 (21.40), (21.41), 经化简后, 给出

$$\frac{1}{\mu^4}(1 - \cosh\mu L \cdot \cos\mu L) = 0,$$

或更简单地有

$$1 - \cosh\mu L \cdot \cos\mu L = 0, \tag{21.46}$$

这是因为

$$\lim_{\mu\to 0}\left\{\frac{1}{\mu^4}(1 - \cosh\mu L \cdot \cos\mu L)\right\} \neq 0.$$

显然代换 $\mu = \pm i\nu$ 使 (21.46) 不变, 因为普通余弦和双曲余弦只是一个变换成另一个; 然而这样的根不会导致不同的本征值 $\lambda = \mu^4$, 因为 $(\pm i)^4 = 1$.

C_3 和 C_4 之间确定的比值由 (21.44) 的一对线性方程提供, 即:

$$\frac{C_4}{C_3} = -\frac{X_3(L)}{X_4(L)} = \mu\frac{\sin\mu L}{1 - \cos\mu L} = -\mu\frac{\sinh\mu L}{\cosh\mu L - 1}, \tag{21.47}$$

上式右边两个可互相替代的式子是一致的, 这是由于 (21.46) 的以下推论

$$\cosh\mu L = \frac{1}{\cos\mu L}, \quad \sinh\mu L = \tan\mu L, \quad \sin\mu L = \tanh\mu L. \tag{21.48}$$

考虑到各关系式 (21.43),(21.47),(21.48), 该问题的本征函数用 (21.46) 的根 μ_n 表成

$$X_n(x) = \frac{\cosh\mu_n(L-x)-\cosh\mu_n x}{\cosh\mu_n L-1} + \frac{\cos\mu_n(L-x)-\cos\mu_n x}{1-\cos\mu_n L}$$
$$= \frac{\sin\mu_n\left(x-\frac{L}{2}\right)}{\sin\mu_n\frac{L}{2}} - \frac{\sinh\mu_n\left(x-\frac{L}{2}\right)}{\sinh\mu_n\frac{L}{2}}, \tag{21.49}$$

且容易验证它们与边界条件的相容性.

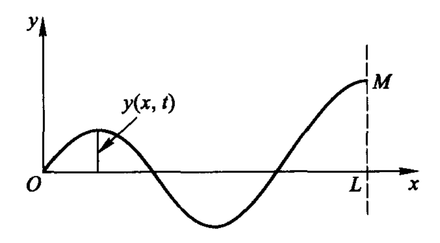
习 题 21

1. 考虑一拉紧弦的横向位移 $y(x,t)$, 它在一端 $(x=0)$ 固定, 在另一端连接可沿一固定方向 $(x=L)$ 运动的质量 M; 当位移很小时, 可以应用线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad 0<x<L, \tag{$*$}$$

这里 c^2 等于 (均匀) 弦张力 P 与每单位长度的质量密度 ρ 之比. 零位移条件

$$y(0,t)=0, \quad t>0 \tag{$**$}$$



适用于该弦的固定端, 刻画所连接质量的直线运动的方程适用于该弦的另一端; 特别地, 方程

$$-P\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=L} = \left.\left(M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\mu\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right|_{x=L}, \quad t>0 \tag{$***$}$$

考虑到弦的张力以及与该质点的速度成正比的阻力的联合影响. 研究满足条件 $(**)$,$(***)$ 的偏微分方程 $(*)$ 的分离变量解且描述对应的本征函数与本征值. 讨论由一对初始条件, 即

$$y(x,0)=f(x), \quad \left.\frac{\partial}{\partial t}y\right|_{t=0}=g(x), \quad 0<x<L$$

所确定的求解的方式. 从关系式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\frac{P}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[-P\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right]=0$$

可得到什么信息? 其中第一项表示该弦每单位长度的能量密度的瞬时变化.

2. 解偏微分方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-c^2\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-2\mu\frac{\partial y}{\partial t}-a^2y=0,\quad 0<x<L,$$

这时所加的边界条件和初始条件分别是

$$y(0,t)=A,\quad y(L,t)=B,\quad t>0$$

和

$$y(x,0)=0,\quad \left.\frac{\partial}{\partial t}y\right|_{t=0}=0,\quad 0<x<L,$$

3. 磁场在电流元上的动态效应与为测量小且可变的电流而设计的称为弦电流计的一种仪器的作用有直接关系. 为定量描述这种效应, 考虑 $x=0$ 与 $x=L$ 之间处于直线静止位置拉紧的弦的横向位移 $y(x,t)$, 给定在该弦中的电流 $I(t)$ 和垂直于该弦的均匀磁场 H. 假设同时垂直于电流和磁场的方向的 (对小振幅运动是合适的) 磁偏转力总是平行于位移, 则一个动力学性质的线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\mu\frac{\partial y}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{HI}{\rho},\quad 0<x<L \tag{$*$}$$

得到肯定, 其中系数 μ 构成了摩擦或空气阻力项一个组成部分. 如果要分别决定 y 和 I, 需要一个额外的电路方程, 即对 y 和 I 的一种描述,

$$E=RI+\mathbf{L}\frac{dI}{dt}+H\int_0^L\frac{\partial y}{\partial t}dx, \tag{$**$}$$

它包含外加电动势 E, 电阻 R, 电自感 $\mathbf{L}$, 也考虑作为弦运动的结果磁流量通过电路时随时间的改变.

为了分析耦合方程组 $(*),(**)$, 一开始假设 $E=0$, 且采用表示式

$$y(x,t)=X(x)e^{i\omega t},\quad I(t)=I_0e^{i\omega t},$$

这里 ω 是一个任意的频率参数, 然后导出 $X(x)$ 满足的方程, 即

$$c^2\frac{d^2X}{dx^2}+\sigma^2X=\alpha\int_0^L X(x)dx,\quad 0<x<L, \tag{$***$}$$

其中采用了记号

$$\sigma^2 = \omega^2 - i\omega\mu, \quad \alpha = \frac{i\omega H^2}{\rho(R + i\omega \mathbf{L})}.$$

证明 (***) 容许有如下形式的解

$$X(x) = A\cos\frac{\omega}{c}x + B\sin\frac{\omega}{c}x + C, \quad 0 < x < L,$$

且求常数 A, B, C 之间必须满足的关系式. 给定标示该弦两固定端点的边界条件 $X(0) = 0, X(L) = 0$, 导出本征值方程

$$\sigma^2 \sin\frac{\sigma L}{c} = \alpha\left[L\sin\frac{\sigma L}{c} - 2\frac{c}{\sigma}\left(1 - \cos\frac{\sigma L}{c}\right)\right],$$

它规定了频率 ω 的容许值; 且证实由此分别推出的推论, 即: 或者

$$\sin\frac{\sigma L}{2c} = 0, \tag{****}$$

或者

$$\sigma^2 \cos\frac{\sigma L}{2c} = \alpha\left[L\cos\frac{\sigma L}{2c} - \frac{2c}{\sigma}\sin\frac{\sigma L}{2c}\right].$$

第一种情形导致一组复值集合 ω_n, 它们与弦的阻尼运动相联系且完全不依赖于磁场, 使得

$$\omega_n^2 - i\omega_n\mu = \left(\frac{2n\pi c}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, \cdots$$

第二种情形, 在 $R, \alpha \to \infty$ 的极限下, 取简单形式

$$\cos\frac{\sigma L}{2c} = 0,$$

由此, 当 $\mu = 0$ 时得出近似式

$$\omega_n^* = (2n+1)\frac{\pi c}{L}.$$

下一步,令

$$\omega_n = \omega_n^* + \delta\omega_n, \quad \delta\omega_n \ll \omega_n^*$$

且注意估计式

$$\delta\omega_n = \frac{4iHL^2}{\rho R\pi^2(2n+1)^2} \quad (L = 0),$$

它可推导出对位移和电流有一个 (共同的) 磁场阻尼因子,

$$\exp\left\{-\frac{4HL^2}{\rho R\pi^2(2n+1)^2}t\right\}, \quad n = 0, 1, \cdots$$

它在 n 的较大值处相对较小, 此时对应的弦曲线由在两相反方向移动的许多部分组成. 如果电阻 R 很小 (且$L=0$), 则阻尼因子证明是与指标 n 无关的.

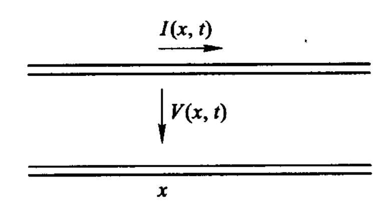
验证在 $x=0$ 和 $x=L$ 为零的 (* * *) 本征函数或非平凡解用 (* * **) 的根 σ_n 表示有形式

$$X_n(x)=\frac{\sin\frac{\sigma_n}{c}L-\sin\frac{\sigma_n}{c}(L-x)-\sin\frac{\sigma_n}{c}x}{\sin\frac{\sigma_n}{c}L},\quad 0<x<L;$$

研究这些本征函数的正交性, 且利用它们来求给定初始位移和初始速度之后的弦位移曲线. 对电动势 E 为常量的情形能采取什么方法?

4. 双导线传输线的传统工程理论将它看成一种具有串联电感和并联电容 (忽略损耗) 的配电参数电路. 设 $V(x,t)$ 表示在上、下线上对应点的电势差, 且设 $I(x,t)$ 表示上线上在 x 点处流向右边的电流; 在这配置中用电感和电荷守恒的基本定律, 结果得出一个对 V 和 I 的一阶偏微分方程耦合组, 即

$$-\frac{\partial V}{\partial x}=\mathbf{L}\frac{\partial I}{\partial t},\quad -\frac{\partial I}{\partial x}=C\frac{\partial V}{\partial t},$$



这里 $\mathbf{L},C$ 表示该线的每单位长度的自感和电容. 这两方程中的任一个都提示 V 和 I 能借助于一公共函数, 例如说 $U(x,t)$ 来表示; 这样, 第二个方程揭示的形式是

$$V=\frac{\partial U}{\partial x},\quad I=-C\frac{\partial U}{\partial t},$$

再代入到第一个方程得到 U 满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

它的系数为

$$c^2=\frac{1}{\mathbf{L}C}.$$

记

$$U(x,t)=X(x)e^{i\omega t},$$

接着得出表示式

$$V(x,t)=e^{i\omega t}\frac{dX}{dx},\quad I(x,t)=-i\omega Ce^{i\omega t}X,$$

其中函数 $X(x)$ 由常微分方程

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right)X(x)=0$$

刻画, 且由显式

$$X(x,\omega)=A\cos\frac{\omega}{c}x+B\sin\frac{\omega}{c}x$$

表示. 现在考虑两端连接自感 $\mathbf{L}_1,\mathbf{L}_2$ 的一个有限导线, $0<x<L$; 分别给出边界条件

$$V(0,t)=-\mathbf{L}_1\left.\frac{\partial I}{\partial t}\right|_{x=0},\quad V(L,t)=-\mathbf{L}_2\left.\frac{\partial I}{\partial t}\right|_{x=L},$$

求决定该电振荡固有频率 ω_n 的本征值方程, 且导出对应的本征函数 $X_n(x)$ 的表示式. 用关系式

$$\begin{aligned}&\frac{\omega_m^2-\omega_n^2}{c^2}\int_0^L X_m(x)X_n(x)dx\\&=\left\{\left.\frac{d}{dx}X_n\right|_{x=L}\cdot X_m(L)-\left.\frac{d}{dx}X_m\right|_{x=L}\cdot X_n(L)\right\}\\&\quad-\left\{\left.\frac{d}{dx}X_n\right|_{x=0}\cdot X_m(0)-\left.\frac{d}{dx}X_m\right|_{x=0}\cdot X_n(0)\right\}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&(\omega_m^2-\omega_n^2)\int_0^L\frac{d}{dx}X_m\frac{d}{dx}X_ndx\\&=\omega_m^2\left\{\left.\frac{d}{dx}X_n\right|_{x=L}\cdot X_m(L)-\left.\frac{d}{dx}X_n\right|_{x=0}\cdot X_m(0)\right\}\\&\quad-\omega_n^2\left\{\left.\frac{d}{dx}X_m\right|_{x=L}\cdot X_n(L)-\left.\frac{d}{dx}X_n\right|_{x=0}\cdot X_n(0)\right\}\end{aligned}$$

去证实积分公式 $(m\neq n)$

$$\int_0^L X_m(x)X_n(x)dx=-\frac{\mathbf{L}_1}{\mathbf{L}}X_m(0)X_n(0)-\frac{\mathbf{L}_2}{\mathbf{L}}X_m(L)X_n(L),$$

$$\int_0^L\frac{d}{dx}X_m\frac{d}{dx}X_ndx=0.$$

讨论寻找从独立地指定的初始条件

$$V(x,0)=f(x),\quad I(x,0)=g(x),\quad 0<x<L$$

发展出来的电势和电流的方法.

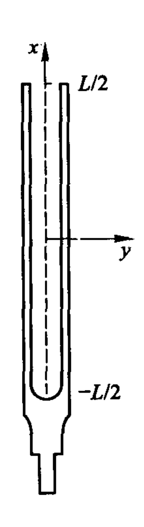
对两端连接电容 C_1, C_2 的输送线, 边界条件为

$$I(0,t)=-C_1\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{x=0},\quad I(L,t)=C_2\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{x=L}$$

的情形作出类似结果; 且对一端有电自感另一端有电容的线路也这样做.

5. 试图解释音叉产生八度音阶的一个简单模型是把音源看成弯曲成 U 形的单独一根棒且安装在一块同样的材料上. 偏微分方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+D\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=0$$



能用来描述在该叉平面内的弯曲运动, 其中不同弹性的、材料的和几何的参数合并成单独的一个参数 D. 对关于 x 轴对称的两根棒的运动来说, 在底座上 $(x=-L/2)$ 的边界条件

$$y=0,\quad \frac{\partial y}{\partial x}=0$$

是合适的, 而在自由端 $(x=L/2)$ 的边界条件包含高阶导数, 即

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=0.$$

证明上述方程集存在时间周期解, 即

$$y(x,t)=\begin{cases}X(x)\cos\omega t, \\ X(x)\sin\omega t,\end{cases} \quad -\frac{L}{2}<x<\frac{L}{2},$$

这里

$$X(x,\mu)=\sin\frac{\mu L}{2}\cosh\mu x+\cosh\frac{\mu L}{2}\sin\mu x,$$

$$\mu^4=\frac{\omega^2}{D},$$

$$\cosh\frac{\mu L}{2}=\tan\frac{\mu L}{2} \tag{*}$$

与本征值方程 (*) 不同的根相应的本征函数 X 是否构成正交集?

6. 证明由方程集

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\lambda\frac{d^2y}{dx^2}=0, \quad 0<x<L,$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=0, \quad \left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=0}=0, \quad y(L)=0, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L}=0$$

定义的齐次边值问题仅有一个平凡解 $y=0$, 即没有本征函数或本征值. 如果选不同的边界条件四元组, 即

$$y(0)=0, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0, \quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=0, \quad y(L)=0,$$

导出关系式

$$\sin\sqrt{\lambda}L=\sqrt{\lambda}L,$$

且由此推导出不存在实本征值; 注意具有复自变量的正弦函数的表示式

$$\sin(a+ib)=\sin a\cosh b+i\cos a\sinh b, \quad a,b \text{ 为实数}.$$

7. 关于方程集

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\lambda X=0, \quad -l<x<l,$$

$$X(-l)=X(l), \quad \left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=-l}=-\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=+l}$$

的本征值和本征函数能说些什么?

8. 讨论能使偏微分方程和边界条件 (21.34),(21.35) 的解满足初始条件

$$u(x,0)=f(x), \quad \left.\frac{\partial}{\partial t}u\right|_{t=0}=g(x), \quad 0<x<L$$

的方式.

第二十二章

解的唯一性

与偏微分方程和边界/初始条件有关的线性问题的 Fourier 方法, 正如它已经显示的那样, 能绰绰有余地为范围广泛的各种情形的问题提供级数形式的解, 在进入 Fourier 级数 (例如三角级数) 本身以及关于它们的收敛性、用法 (逐项微分或积分) 和表示方面的细节之前, 解的唯一性问题需要引起注意.

特定的方程集

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<L,\quad t>0,$$
$$u(x,0)=f(x),\quad 0<x<L \tag{22.1}$$

和

$$u(0,t)=g(t),\quad u(L,t)=h(t),\quad t>0$$

在 x,t 平面的矩形区域, $0<x<L, 0<t<\tau$ (任意的) 中定义一个问题,(如物理理由可提示) 它是一个适定问题, 而且可用早先给出的方法求解. 现在考虑与原始数据的连续变化和满足衔接条件

$$f(0)=g(0),\quad f(L)=h(L)$$

相应的在整个 $0<x<L$ 和 $t>0$ 上连续的一类解; 此外假设 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ 和 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 在 $t>0$ 和 $0<x<L$ 上分别连续地变化. 设 $u_1(x,t),u_2(x,t)$ 表示一对可能不同的

解, 它们满足 (22.1) 中规定的同样的初始和边界条件; 则它们的差

$$U(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t) \tag{22.2}$$

是用一组全是齐次的方程来描述的函数, 即:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

$$U(x,0) = 0, 0 < x < L, \quad U(0,t) = U(L,t) = 0, t > 0.$$

上面的偏微分方程乘以 U 后对 x 积分且重新排列, 结果得出恒等式

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^L U^2(x,t)dx\right] &= k\int_0^L U\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}dx \\ &= kU\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}^{x=L} - k\int_0^L \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx.\end{aligned} \tag{22.3}$$

由于在 $x=0$ 和 $x=L$ 对 $t>0, U$ 为零, (22.3) 的结果即

$$\frac{dF}{dt} = G(t),$$

这里

$$F(t) = \frac{1}{2}\int_0^L U^2(x,t)dx \geqslant 0, \tag{22.4}$$

$$G(t) = -k\int_0^L \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx \leqslant 0,$$

由于 $F(0) = 0$, 转而得出关系式

$$F(t) = \int_0^t G(t')dt' \leqslant 0 \tag{22.4$'$}$$

同时要求 (22.4), (22.4′) 成立, 必须有

$$F(t) \equiv 0, \quad t > 0,$$

所以函数 $U(x,t)$ 必须恒等于零, 且由 (22.2)

$$u_1(x,t) = u_2(x,t), \quad t > 0,$$

这就是说, 在所指定的解类中的解是唯一的. 当边界条件包含 U 和/或 $\frac{\partial U}{\partial x}$ 时, 只要能保证消去 (22.3) 中的端点项, 可得到同样的结论. 在边界条件为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} + \alpha u(0,t) = g(t), \quad u(L,t) = h(t), \quad t > 0$$

的情形, (22.4′) 的相应部分为

$$F(t)=\alpha k\int_0^t U^2(0,t')dt'+\int_0^t G(t')dt'\leqslant 0,$$

假若 $\alpha<0$, 再次导出唯一性证明.

证明唯一性有一种不同的方法, 这种方法是从扩散方程连续解的一般特征导出的, 这种特征显现于*最大值原理*中, 即: 如果 $u(x,t)$ 满足齐次偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\tag{22.5}$$

且连同其中出现的导数, 在由直线 $x=0, x=L, t=0$ 和 $t=\tau$ 所描述的整个矩形区域上连续变化, 则 u 在位于该矩形的垂直边 $(x=0, x=L)$ 或底边 $(t=0)$ 的至少一个点上取到其最大值. 这种性质反映了由无源或守恒方程 (22.5) 所导致的热和温度 (而非浓度) 的仅有的重新分布; 相反地, 在一源点, 其中热由此沿所有可能的方向流出 (且 u 对 x 的导数的不连续性出现了), 显然, 温度必然有一相对最大值.

用反证法证明最大值原理, 假设 $u(x,t)$ 在矩形内 (或在其顶边) 某点 (x_0,t_0) 取到最大值, 且引入辅助函数

$$v(x,t)=u(x,t)+\epsilon(x-x_0)^2\tag{22.6}$$

考虑到 (22.5) v 满足方程

$$k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial t}=2\epsilon.\tag{22.7}$$

当 $\epsilon(>0)$ 充分小时, 函数 $v(x,t)$ 也在矩形内的某点 (x_1,t_1) 达到其最大值, 且极值条件

$$\frac{\partial v}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\leqslant 0,\quad x=x_1, t=t_1\tag{22.8}$$

适用. 考虑到 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ 的符号, 关系式 (22.7),(22.8) 之间有明显的不相容性, 要求撤回 u 的最大值在内点处达到的假设. 如果最大值在该矩形的顶边 $(t_1=\tau)$ 取到, 这里不能假设 u 的可微性, 必须修改论证, 且特别地, 论证可以对一较小矩形域 $0<x<L, 0<t<\tau-\delta$ 展开, 当 $\delta(>0)$ 有无穷小的量时, 它的顶边正好位于原矩形顶边之下. 前面已排除 u 的最大值在这较大区域内部取到, 由此推断出最大值在这较小区域的上边界上的一个点处出现, 因而可用的极值条件

$$\frac{\partial v}{\partial t}\geqslant 0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\leqslant 0\tag{22.9}$$

由各导数的存在性得到保证; 虽然 (22.9) 的一对条件中的第一个与 (22.8) 中的第一个不同, 现在的两个式子仍与 (22.7) 不相容, 因此最大值原理得到证明.

由于反号函数 $-u(x,t)$ 也满足偏微分方程 (22.5), 由此推出 u 的最大值和最小值都在 x,t 平面的影响区域的边界上取到, 即

$$|u(x,t)| \leqslant \max |u(x,t)| \quad 在\ \Gamma\ 上, \tag{22.10}$$

这里开的围线 Γ 由直线段 $x=0, 0<t<\tau, t=0, 0<x<L$ 和 $x=L, 0<t<\tau$ 构成.

不等式 (22.10) 提供解的唯一性的一个直接证明, 当它应用于 (22.2) 中定义的差函数 $U(x,t)$ 时, $U(x,t)$ 在 Γ 上有零值因而在该区域本身必为零.

此外, 最大值最小值原理推断出, 方程集 (22.1) 的解对于原始数据即指定的初始和边界值按连续方式变化, 即后者的小改变带来解本身在影响区域内对应的小改变; 所以将该问题看成适定问题是恰当的.

用区域积分和曲线积分可方便地研究偏微分方程 (22.5) 的解的更多的问题和性质; 特别地, 考虑到两任意适度正则函数的 $\varphi(x,t), \psi(x,t)$ 的恒等式, 即

$$\psi\left(k\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi-\varphi\left(k\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi=\frac{\partial}{\partial x}\left[k\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial t}\varphi\psi,$$

在 (x,t) 平面的有界区域 D 上积分, 得出

$$\begin{aligned}&\iint\limits_D\left[\psi\left(k\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi-\varphi\left(k\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi\right]dxdt\\ =&\iint\limits_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{k\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial t}\varphi\psi\right]dxdt\\ =&\oint_\Gamma\left\{\varphi\psi dx+k\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dt\right\},\end{aligned} \tag{22.11}$$

这里最后的积分是沿该区域光滑边界曲线 Γ 逆时针方向取的, 应用联系区域积分和边界曲线积分的经典 Green 公式后出现的.

用 (22.5) 的一个解, 例如说 $u(x,t)$ 替换 φ, 且设 $\psi=1$, (22.11) 的结果

$$\oint_\Gamma\left(udx+k\frac{\partial u}{\partial x}dt\right)=0 \tag{22.12}$$

构成了对用微分方程描述 u 的另一种方法. 设边界 Γ 是一矩形 (见图 36), 在各边上变量 x,t 的一个或另一个取常数 (t 保持常数的边是二阶偏微分方程 (22.5) 的特征线段); 则在同时改变有向线积分的方向和正负号后, (22.12) 变成 (回顾 $k=\kappa/\rho c$)

$$\int_{AB}\rho cudx-\int_{CD}\rho cudx=-\int_{BD}\kappa\frac{\partial u}{\partial x}dt-\int_{CA}\kappa\frac{\partial u}{\partial x}dt. \tag{22.13}$$

(22.13) 的左边表示在 $0 < x < L$ 范围内初始 $(t = 0)$ 与后来 $(t = \tau)$ 热量之差, 而右边表示在所经过的一段时间 τ 中在两端点处的整个热流量; 且它们的平衡隐含于对变温度分布的基本方程的守恒方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c u) + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\kappa\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

中, 这里每单位长度热量的度量 $\rho c u$ 和局部热流量 $-\kappa\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 联系在一起. 因此, (22.12) 可看成是对有任意几何形状的区域 D 内宏观热传导过程的一种守恒关系式.

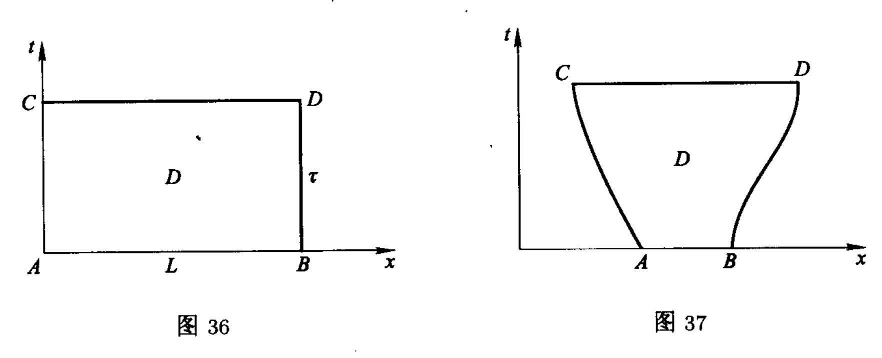


图 36　　　　图 37

为从 (22.11) 得到另一有意义的推论, 选取

$$\varphi = u^2(x,t), \quad \psi = 1,$$

且注意如果 (22.5) 成立, 则

$$\left(k\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right)u^2 = 2k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2;$$

然后, 对任一具有边界 Γ 的平面区域 D

$$\iint\limits_D 2k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt = \oint_\Gamma \left\{u^2dx + 2ku\frac{\partial u}{\partial x}dt\right\}. \tag{22.14}$$

假设 Γ 有两个直线段 $t = 0$ 和 $t = \tau(> 0)$, 和具有全部点都位于分离的特征线段上的一对弧 AC, BD (见图 37); (22.14) 的对应形式,

$$2k\iint\limits_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt + \int_{CD} u^2dx = \int_{AB} u^2dx + \int_{BD}\left(u^2dx + 2ku\frac{\partial u}{\partial x}dt\right)$$
$$- \int_{AC}\left(u^2dx + 2ku\frac{\partial u}{\partial x}dt\right)$$

在 AB, AC 和 BD 上 $u=0$ 的情形下简化成

$$2k\iint\limits_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt + \int_{CD} u^2 dx = 0.$$

由于两个被积函数非负且在 CD 上 $dx>0$，得到一对结论

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0 \quad \text{在 } D \text{ 中}, \quad u \equiv 0 \quad \text{在 } CD \text{ 上}.$$

其中第一式隐含另一式, 即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \equiv 0 \quad \text{在 } D \text{ 中},$$

因而在 D 中

$$u = \text{常数} \equiv 0,$$

这个结果提供了建立以下论断的关键: 即偏微分方程 (22.5) 的解 $u(x,t)$ 在沿曲线 $CABD$ 指定它的值后在该区域内是唯一决定的, 其中 $CABD$ 位于边界最上边部分 CD 之下. 在以后的问题中将会显示后一限制性条件是本质的.

考虑对拉紧弦的小振幅位移的偏微分方程

$$P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{22.15}$$

这里 ρ, P 分别表示每单位长度的质量和张力, (22.15) 是一个动力学关系式而不是守恒关系式; 然而, 用 $\dfrac{\partial y}{\partial t}$ 乘 (22.15) 且重新整理后, 其结果

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}P\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[-P\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right] = 0 \tag{22.16}$$

却有资格作为一个能量守恒关系式, 在第一和第二项中带有能量密度和能量流量的度量. 在区域 D 上积分 (22.16) 且用 Green 公式

$$\iint\limits_D \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial t}\right] dxdt = \oint_\Gamma Gdx + Fdt,$$

得出能量平衡的曲线积分表示形式

$$\oint_\Gamma \left[\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}P\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] dx + P\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}dt = 0. \tag{22.17}$$

如果曲线 Γ 有图 36 中描绘的矩形形状, 这关系式如预期的那样, 确定在时刻 $t=0, t=\tau$ 弦运动总能量

$$E(t) = \int_0^L \left[\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}P\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] dx \tag{22.18}$$

之差等于在端点 $x=0,L$ 纯能量流量之差

$$S=\int_0^T -P\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\bigg|_{x=0}-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\bigg|_{x=L}\right\}dt.$$

以下, 设 Γ 有梯形图形 (见图 38), 其中线段 AC,BD 是特征线族

$$x\pm ct=\text{常数}$$

的一部分, 且参数

$$c=\left(\frac{P}{\rho}\right)^{1/2}$$

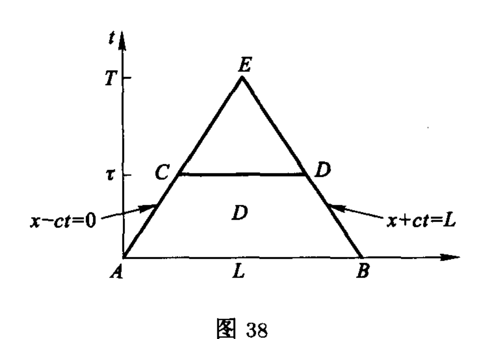


图 38

是与波动方程 (22.15) 相联系的沿 x 方向能量传播的特征速度. 考虑到在 AC 上 $dx=cdt$, 在 BD 上 $dx=-cdt$, 现在用 (22.16) 得出

$$\int_{AB}\left[\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}P\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]dx-\int_{CD}\left[\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}P\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]dx$$
$$=\frac{1}{2}\rho c\int_{AC}\left(\frac{\partial y}{\partial t}+c\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2dt+\frac{1}{2}\rho c\int_{BD}\left(\frac{\partial y}{\partial t}-c\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2dt,$$

且导致结果

$$E(\tau)-E(0)\leqslant 0. \tag{22.19}$$

如果 y 和 $\dfrac{\partial y}{\partial t}$ 在 AB 上, 即在 $0<x<L,t=0$ 处为零, 则 $E(0)=0$, 因此考虑到 (22.18) 的非负性, (22.19) 的结果

$$E(\tau)\leqslant 0$$

蕴含着 y 和 $\dfrac{\partial y}{\partial t}$ 在 CD 上也为零, 这里 $t=\tau$. 因此偏微分方程 (22.15) 的解, 当它和它的时间导数一开始取零值时, 在整个特征三角形 (或影响区域) $ABE,0<t<T$ 内也为零; 且这结论保证了在 AB 上 y 和 $\dfrac{\partial y}{\partial t}$ 取指定值的解在特征三角形中的唯一性.

必须指出唯一性的证明并没有证明解的*存在性*, 此外, 当一个特定问题中的齐次边界条件包括不同参数时, 需要利用积分关系式或偏微分方程的其他方法.

习 题 22

1. 借助于考察函数

$$I(t)=\int_{-L_1}^{0}N_1^2(x,t)dx+\sigma\int_0^{L_2}N_2^2(x,t)dx$$

的时间变化, 证明第二十章习题 1 中的问题的唯一性是成立的, 这里 $N_1(x,t)$, $N_2(x,t)$ 在互补区间 $-L_1<x<0, 0<x<L_2$ 上的两个不同的解的差, 且有分别/联合的规定

$$\frac{\partial N_1}{\partial t}=D_1\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2},\quad \frac{\partial N_2}{\partial t}=D_2\frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2},$$

$$\left.\frac{\partial N_1}{\partial x}\right|_{x=-L_1}=0,\quad \left.\frac{\partial N_2}{\partial x}\right|_{x=L_2}=0,$$

$$N_1(0,t)=\sigma N_2(0,t),\quad D_1\left.\frac{\partial N_1}{\partial x}\right|_{x=0}=D_2\left.\frac{\partial N_2}{\partial x}\right|_{x=0}$$

和

$$N_1(x,0)=0,\quad -L_1<x<0,\quad N_2(x,0)=0,\quad 0<x<L_2.$$

2. 考虑对两个自变量都有二阶偏导数的偏微分方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\mu(x)y,\quad 0<x<L, t>0, \tag{*}$$

且为了研究解的唯一性, 齐次边/初值为

$$y(0,t)=0\quad y(L,t)=0,\quad t>0$$

和

$$y(x,0)=0,\quad \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\quad 0<x<L.$$

引入函数

$$Y(x,t)=\int_0^t y(x,t')dt',$$

且证明这函数同时满足偏微分方程 (*) 和积分恒等式

$$\frac{1}{2}\int_0^L\left(\frac{\partial}{\partial t}Y(x,t)\right)^2dx=-\frac{1}{2}\int_0^L\left(\frac{\partial}{\partial x}Y(x,t)\right)^2dx-\frac{1}{2}\int_0^L\mu(x)Y^2(x,t)dx.$$

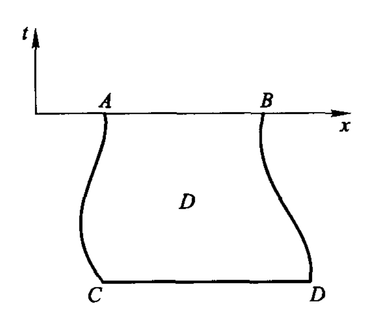
讨论后者在唯一性问题中的作用.

3. 应用对扩散方程或热方程的解的积分恒等式

$$2k\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt=\oint_{\Gamma}u^2dx+2ku\frac{\partial u}{\partial x}dt,$$

此时区域 D 位于特征线 $t=0$ 之下, 如草图所示, 且讨论如果 u 在 AB, AC 和 BD 上为零时它蕴涵的结果. 考虑该方程的一个特解

$$u(x,t)=\sin xe^{-kt}-\frac{1}{2}\sin 2xe^{-4kt}$$



和相关曲线, 即

$$t=\frac{1}{3k}\ln\sin x,\quad 当\ \sin x>0.$$

u 在其上取值为零. 画出这族曲线的几条曲线的草图, 且把它们当作以下的命题来看待: 如果偏微分方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的一个非平凡解沿一曲线为零, 则这曲线的任何部分都不可能同与此曲线在两点相交的特征线 ($t=$ 常数) 构成一个位于该特征线下的区域.

4. 证明声扰动的一阶偏微分方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\mu^2\frac{\partial p}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial t}+\nu^2\frac{\partial u}{\partial x}=0\quad c^2=(\mu\nu)^2 \tag{*}$$

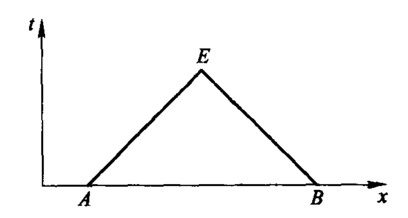
能用来建立恒等式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu^2}u^2+\frac{1}{2\nu^2}p^2\right)+\frac{\partial}{\partial x}(pu)=0,$$

它又导致曲线积分关系式

$$\oint_{\Gamma}-\left[\frac{1}{2\mu^2}u^2+\frac{1}{2\nu^2}p^2\right]dx+pudt=0.$$

应用后者证明指定 u 和 p 在 AB 上的值, 就决定了在特征三角形 ABE 中方程组 (*) 的唯一解.



5. 考察方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<L,t>0,$$

$$u=0,x=0,\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma\frac{\partial u}{\partial t}=0,\quad x=L\quad t>0$$

和

$$u(x,0)=f(x),\quad 0<x<L$$

的解的唯一性.

第二十三章

解的替代表示

解的存在性和唯一性并不排除有可能找到有利于对解做估计的相辅相成的解的不同形式. 为了用一个具体例子来阐明这个特点, 也复习一下先前处理非齐次边界条件的方法, 选取方程组

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \tag{23.1}$$
$$n(x,0) = N, \quad \frac{\partial n}{\partial x} = RI, \quad x = 0, L,$$

它与圆柱形容器中由极化效应诱导的电流有关联. 采用本征函数展开式, 即

$$n(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} T_m(t)\cos\frac{m\pi x}{L}, \tag{23.2}$$

援引 (23.1) 中给出的边界条件后, 发现系数函数

$$T_0(t) = \frac{1}{L}\int_0^L u(x,t)dx, \quad T_m(t) = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\cos\frac{m\pi x}{L}dx, \quad m = 1, 2, \cdots$$

满足常微分方程

$$\frac{dT_0}{dt} = 0, \quad \frac{dT_m}{dt} + D\left[\frac{(m+1)\pi}{L}\right]^2 T_m = -\frac{4}{L}DRI, \quad m = 1, 2, \cdots$$

取

$$T_0 = N$$

和

$$T_{2m+1}(t) = -\frac{4RIL}{(2m+1)^2\pi^2}\left\{1-\exp\left(-D\frac{((2m+1)\pi)^2}{L^2}t\right)\right\}, \quad m=0,1,2,\cdots$$

它们与初始条件的一致性经由 (23.2) 就导致结果

$$\begin{aligned} n(x,t) = N &- \frac{RIL}{2}\left(1-2\frac{x}{L}\right) \\ &+ \frac{4RIL}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos\left((2m+1)\frac{\pi}{L}x\right)}{(2m+1)^2}\exp\left(-D\frac{((2m+1)\pi)^2}{L^2}t\right), \end{aligned} \tag{23.3}$$

用到了关系式

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)\frac{\pi x}{L}}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\left(1-2\frac{x}{L}\right), \quad 0<x<L.$$

$n(x,t)$ 上面形式的解的级数的收敛性当 t 的量增加时显然更快, 且最终的定常态分布

$$n = N - \frac{RIL}{2}\left(1-2\frac{x}{L}\right), \quad t\to\infty \tag{23.4}$$

是极其显然的.

为了对 t 的小的量达到快速收敛的目的, (23.3) 中的级数的一个变换, 例如说

$$\Sigma(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos\left((2m+1)\frac{\pi}{L}x\right)}{(2m+1)^2}\exp\left(-D\frac{((2m+1)\pi)^2}{L^2}t\right) \tag{23.5}$$

借助于结果

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-(x-2mL)^2/4Dt} = \frac{1}{2L}+\frac{1}{L}\sum_{m=0}^{\infty}\cos\frac{m\pi x}{L}e^{-D(m\pi/L)^2t} \tag{23.6}$$

而得到. 为了证实 (23.6), 注意左边的级数定义一个 x 的以 $2L$ 为周期的偶函数, 设为 $S(x,t)$, 所以其 Fourier 展开式为

$$S(x,t) = \frac{1}{2}a_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty}a_m(t)\cos\frac{m\pi x}{L}dx,$$

这里

$$a_m(t) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}S(x,t)\cos\frac{m\pi x}{L}dx, \quad m=0,1,\cdots$$

这样

$$a_0(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-L}^{L} e^{-(x-2mL)^2/4Dt} dx$$

$$= \frac{1}{L\sqrt{\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-(2m+1)L/2\sqrt{Dt}}^{-(2m-1)L/2\sqrt{Dt}} e^{-\zeta^2} d\zeta$$

$$= \frac{1}{L\sqrt{\pi}} \left(\underset{(m=0)}{\int_{-L/2\sqrt{Dt}}^{L/2\sqrt{Dt}}} + \underset{(m=-1)}{\int_{L/2\sqrt{Dt}}^{3L/2\sqrt{Dt}}} + \underset{(m=1)}{\int_{-3L/2\sqrt{Dt}}^{-L/2\sqrt{Dt}}} + \cdots \right) e^{-\zeta^2} d\zeta$$

$$= \frac{1}{L\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = \frac{1}{L},$$

且类似地, 回顾 (4.4),(4.5),

$$a_m(t) = \frac{1}{L} \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2/4Dt} \cos \frac{m\pi\zeta}{L} d\zeta$$

$$= \exp\left(-D\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 t\right), \quad m = 1, 2, \cdots$$

在用结果 (23.6) 前, (23.5) 的函数 $\sum(x,t)$ 对 t 微分是合适的, 且随此运算后连同接着的重排且明显的改写 (23.6), 从而得出

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = -\frac{\pi^2}{L^2} D \sum_{m=0}^{\infty} \cos(2m+1)\frac{\pi x}{L} \exp\left\{-D\left(\frac{(2m+1)\pi}{L}\right)^2 t\right\}$$

$$= -\frac{\pi^2}{L^2} D \left[\sum_{m=1}^{\infty} \cos\frac{m\pi x}{L} \exp\left\{-D\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 t\right\} \right.$$

$$\left. - \sum_{m=1}^{\infty} \cos\frac{2m\pi x}{L} \exp\left\{-D\left(\frac{2m\pi}{L}\right)^2 t\right\} \right]$$

$$= -\frac{\pi^{3/2}}{2L} \sqrt{\frac{D}{t}} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(x-2mL)^2/4Dt} - \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-mL)^2/4Dt} \right],$$

所以

$$\Sigma(x,t) = \frac{\pi^2}{8}\left(1 - 2\frac{x}{L}\right) - \frac{\pi^{3/2}}{2L} D^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-(x-2mL)^2/4D\tau} d\tau$$

$$+ \frac{\pi^{3/2}}{4L} D^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-(x-mL)^2/4D\tau} d\tau,$$

给出

$$\Sigma(x,0) = \frac{\pi^2}{8}\left(1 - 2\frac{x}{L}\right), \quad 0 < x < L.$$

由于

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \frac{e^{-\alpha/\tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau &= \int_{t^{-1/2}}^{\infty} e^{-\alpha\zeta^2} \frac{2d\zeta}{\zeta^2} = 2\int_{t^{-1/2}}^{\infty} e^{-\alpha\zeta^2} d\left(-\frac{1}{\zeta}\right) \\
&= 2t^{1/2}e^{-\alpha/t} - 4\alpha \int_{t^{-1/2}}^{\infty} e^{-\alpha\zeta^2} d\zeta \\
&= 2t^{1/2}e^{-\alpha/t} - 2(\pi\alpha)^{1/2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{t}}\right), \quad \alpha > 0
\end{aligned} \tag{23.7}
$$

这里 erfc 表示互补误差函数, 即

$$
\operatorname{erfc} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta, \tag{23.8}
$$

就得到

$$
\begin{aligned}
\Sigma(x,t) = \frac{\pi^2}{8}\left(1 - 2\frac{x}{L}\right) - \pi^{3/2}\frac{\sqrt{Dt}}{L}&\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(x-2mL)^2/4Dt}\right. \\
&\left. - \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-mL)^2/4Dt}\right] \\
+\frac{\pi^2}{2L}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} |x-2mL|\operatorname{erfc}\left(\frac{|x-2mL|}{2\sqrt{Dt}}\right)\right. \\
&\left. -\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} |x-mL|\operatorname{erfc}\left(\frac{|x-mL|}{2\sqrt{Dt}}\right)\right\},
\end{aligned} \tag{23.9}
$$

且当用于 (23.3) 时, 将指标 m 从 $-\infty$ 到 ∞ 的和式重写成指标从 1 到 ∞ 的另外的和式后, 得到解的另一种表示

$$
\begin{aligned}
n(x,t) = N &- 2RI\sqrt{\frac{Dt}{\pi}}e^{-x^2/4Dt} + 4RIx\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) \\
&+2RI\sqrt{\frac{Dt}{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\left\{e^{-(x-mL)^2/4Dt} + e^{-(x+mL)^2/4Dt}\right\} \\
&+RI\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left\{(mL-x)\operatorname{erfc}\left(\frac{mL-x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right. \\
&\left. +(mL+x)\operatorname{erfc}\left(\frac{mL+x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{23.10}
$$

(23.1) 中的边界条件导出 $n(x,t)$ 在 $0 < x < L$ 上的积分值不随时间而变, 因此

$$
\int_0^L n(x,t)dx = NL; \tag{23.11}
$$

容易证实函数 $n(x,t)$ 的原表示式 (23.3) 与 (23.11) 是一致的, 由于在 x 的整个区间上积分时, 该和式的每一项为零, 且该一次多项式的积分值也为零. 为验证另一种表示式 (23.10) 遵从 (23.11), 首先考虑包含指数函数的那些项目注意关系式

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^L e^{-x^2/4Dt}dx = \sqrt{\pi Dt}\mathrm{erf}\left(\frac{L}{2\sqrt{Dt}}\right),\\
I_2 &= \int_0^L e^{-(x-mL)^2/4Dt}dx = 2\sqrt{Dt}\int_{(m-1)L/2\sqrt{Dt}}^{mL/2\sqrt{Dt}} e^{-\zeta^2}d\zeta\\
&= \sqrt{\pi Dt}\left\{\mathrm{erf}\left(\frac{mL}{2\sqrt{Dt}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{(m-1)L}{2\sqrt{Dt}}\right)\right\},\\
I_3 &= \int_0^L e^{-(x+mL)^2/4Dt}dx = \sqrt{\pi Dt}\left\{\mathrm{erf}\left(\frac{(m+1)L}{2\sqrt{Dt}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{mL}{2\sqrt{Dt}}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

由于成对相消, 这些项对 $n(x,t)$ 的积分的贡献为

$$
\begin{aligned}
&2RI\sqrt{\frac{Dt}{\pi}}\left[-I_1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}(I_2+I_3)\right]\\
&= 2RIDt\left\{-\mathrm{erf}\left(\frac{L}{2\sqrt{Dt}}\right) + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{(m+1)L}{2\sqrt{Dt}}\right)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.-\mathrm{erf}\left(\frac{(m-1)L}{2\sqrt{Dt}}\right)\right]\right\}\\
&= 2RIDt\left[-\mathrm{erf}\left(\frac{L}{2\sqrt{Dt}}\right) + \mathrm{erf}\left(\frac{2L}{2\sqrt{Dt}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{3L}{2\sqrt{Dt}}\right)\right.\\
&\qquad +\mathrm{erf}\left(\frac{L}{2\sqrt{Dt}}\right) + \mathrm{erf}\left(\frac{4L}{2\sqrt{Dt}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{2L}{2\sqrt{Dt}}\right)\\
&\qquad\left. -\mathrm{erf}\left(\frac{5L}{2\sqrt{Dt}}\right) + \mathrm{erf}\left(\frac{3L}{2\sqrt{Dt}}\right) + \cdots\right]\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

考虑 (23.10) 中所有其他项的积分, 由于最后是

$$
\begin{aligned}
&RI\int_0^L x\ \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)dx + RI\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\int_0^L\left\{(mL-x)\mathrm{erfc}\left(\frac{mL-x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right.\\
&\qquad\left.+(mL+x)\mathrm{erfc}\left(\frac{mL+x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right\}dx\\
&= 4RI\ Dt\int_0^{L/2\sqrt{Dt}}\zeta\ \mathrm{erfc}\ \zeta\ d\zeta + 4RI\ Dt\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\int_{(m-1)L/2\sqrt{Dt}}^{(m+1)L/2\sqrt{Dt}}\zeta\ \mathrm{erfc}\ \zeta\ d\zeta\\
&= 4RI\ Dt\int_0^{L/2\sqrt{Dt}}\zeta\ \mathrm{erfc}\ \zeta\ d\zeta - 4RI\ Dt\int_0^{L/2\sqrt{Dt}}\zeta\ \mathrm{erfc}\ \zeta\ d\zeta = 0,
\end{aligned}
$$

表示式 (23.10) 当 $t \ll L^2/D$ 时, 令人满意地适合于估计, 与此对比, 解的原形式 (23.3) 的快速收敛和容易估计要求 $t \gg L^2/D$. (23.10) 的一个特别推论, 即

$$n(0,t) = N - 2RI\sqrt{\frac{Dt}{\pi}} + 4RI\sqrt{\frac{Dt}{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}e^{-m^2L^2/4Dt}$$
$$+2RIL\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m m \operatorname{erfc}\left(\frac{mL}{2\sqrt{Dt}}\right),$$

导致估计式

$$n(0,t) \sim N - 2RI\sqrt{\frac{Dt}{\pi}} + 4RI\sqrt{\frac{Dt}{\pi}}e^{-L^2/4Dt} - 2RIL \operatorname{erfc}\left(\frac{L}{2\sqrt{Dt}}\right)$$
$$\sim N - 2RI\sqrt{\frac{Dt}{\pi}} + 8RI\frac{(Dt)^{3/2}}{\sqrt{\pi}L^2}e^{-L^2/4Dt}, \quad t \to 0, \tag{23.12}$$

后者是利用了对大自变量的互补误差函数的一个估计式

$$\operatorname{erfc} z \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^3} + \cdots\right), \quad z \gg 1.$$

在区间的另一端点, 发现

$$n(L,t) = N - 2RI\sqrt{\frac{Dt}{\pi}}e^{-L^2/4Dt} + RI \operatorname{erfc}\left(\frac{L}{2\sqrt{Dt}}\right)$$
$$+2RI\sqrt{\frac{Dt}{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\left\{e^{-(m-1)^2L^2/4Dt} + e^{-(m+1)^2L^2/4Dt}\right\}$$
$$+RIL\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left\{(m-1) \operatorname{erfc}\left(\frac{(m-1)L}{2\sqrt{Dt}}\right)\right. \tag{23.13}$$
$$\left.+(m+1) \operatorname{erfc}\left(\frac{(m+1)L}{2\sqrt{Dt}}\right)\right\}$$
$$\sim N - 2RI\sqrt{\frac{Dt}{\pi}} - 8RI\frac{(Dt)^{3/2}}{\sqrt{\pi}L^2}e^{-L^2/4Dt}, \quad t \to 0;$$

这样, (23.12) 和 (23.13) 两者揭示在两端点从初始水平 N 的早期偏离是与时间的平方根成比例的.

表示式 (23.3) 的各项, 除第一项外, 在中点 $x = L/2$ 为零, 所以

$$n\left(\frac{L}{2},t\right) = N, \quad t > 0,$$

且同样结果是 (23.10) 通过项的互相消去而得出的推论. 最后由 (23.10) 提供的估计

$$n\left(\frac{L}{4},t\right) \sim N - \frac{64}{\sqrt{\pi}}RI\frac{(Dt)^{3/2}}{L^2}e^{-L^2/64Dt}, \quad t \to 0, \tag{23.14}$$

揭示 $x = L/4$ 处从初始水平的偏离与在端点 $x = 0, L$ 处相应部分 (23.12),(23.13) 中出现的偏离相比, 是一个较小阶的量.

诸如 (23.6) 那样的基本恒等式, 不是普遍可用于表示式的转换; 在这方面, 对各个问题用其解的一个积分表示式 (通常用 Heaviside 于 19 世纪末首先提倡和使用的运算微积方法找到) 证明是合适的. 这种性质的一些细节留待以后讲述.

习　题　23

1. 方程组

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2},$$
$$n(x,0) = N, \quad 0 < x < L, \quad n(0,t) = 0, \quad n(L,t) = 0, \quad t > 0$$

有一个形为

$$n(x,t) = N\left[1 - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)\dfrac{\pi x}{L}}{2m+1}e^{-D((2m+1)\pi/L)^2 t}\right],$$

的解, 当 $t \gg L^2/D$ 时明显地容易估计. 求得且检验当 $t \ll L^2/D$ 时有助于估计的另一种表示.

2. 注意到基本恒等式 (23.6) 能使圆环 $(-L < x < L)$ 内在原点 $(x = 0)$ 具有热输出 H 的瞬时作用源产生的温度分布 (19.19) 立即转换成另一种形式, 即

$$u(x,t) = \frac{H}{2\sqrt{\pi kt}}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(x-2mL)^2/4kt}; \tag{$*$}$$

且由此得到的估计

$$u(x,t) \sim \frac{H}{2\sqrt{\pi kt}}e^{-x^2/4kt} \quad t \ll \frac{L^2}{k}$$

是偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

对 $t > 0$ 在无穷区间 $-\infty < x < \infty$ 上的一个非分离变量解 (回顾 (4.5)), 在点 $x = 0$ 附近有局部化初始分布. 显然, 当 $t \ll L^2/k$ 时, 这构成对中心在有限圆环内的类似热源的一个近似. 证明 $(*)$ 正确地预示了所要求的热在该环中的守恒性.

3. 级数

$$n(x,t)=\sum_{p=1}^{\infty}c_p\sin\frac{p\pi x}{L}e^{-D(p\pi/L)^2t},\quad 0<x<L,\quad t>0,\tag{*}$$

其系数 c_p 表示为

$$c_p=\frac{2}{L}\int_0^L n(x,0)\sin\frac{p\pi x}{L}dx,\quad p=1,2,\cdots$$

该级数表示方程组

$$\frac{\partial n}{\partial t}=D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2},\quad n(0,t)=n(L,t)=0,\quad t>0$$

的初始分布为 $n(x,0)$ 的解. 如果后者局限于 $x=L/2$ 的紧接邻近处, 且

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\frac{L}{2}(1-\epsilon)}^{\frac{L}{2}(1+\epsilon)}n(x,0)dx=N,$$

则

$$c_p=\frac{2N}{L}\sin\frac{p\pi}{2}=\begin{cases}0, & p=2m,\quad m=1,2,\cdots\\ \dfrac{2N}{L}(-1)^m, & p=2m+1,\quad m=0,1,2,\cdots\end{cases}$$

且这样得到的 (*) 的表示式

$$n(x,t)=\frac{2N}{L}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\sin(2m+1)\frac{\pi x}{L}e^{-D((2m+1)\pi/L)^2t},\tag{**}$$

当 $t\gg L^2/D$ 时有速降项.

注意如果 (23.6) 首先改写成形式

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-(x-2mL)^2/4Dt}=\frac{1}{2L}+\frac{1}{L}\sum_{m=1}^{\infty}\cos\frac{2m\pi x}{L}e^{-D(2m\pi/L)^2t}$$
$$+\frac{1}{L}\sum_{m=0}^{\infty}\cos(2m+1)\frac{\pi x}{L}e^{-D((2m+1)\pi/L)^2t},$$

再用 $L/2$ 代替 L, 得出

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-(x-mL)^2/4Dt}=\frac{1}{L}+\frac{2}{L}\sum_{m=1}^{\infty}\cos\frac{2m\pi x}{L}e^{-D(2m\pi/L)^2t},$$

从上面两关系式之间消去带有因子 $\cos\dfrac{2m\pi x}{L}$ 的级数, 其结果给出

$$\sum_{m=0}^{\infty}\cos(2m+1)\frac{\pi x}{L}e^{-D((2m+1)\pi/L)^2t}$$
$$=\frac{L}{2\sqrt{\pi Dt}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-(x-2mL)^2/4Dt}-\frac{1}{4\sqrt{\pi Dt}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-(x-mL)^2/4Dt},$$

然后记 $x=\frac{L}{2}+\zeta$, 由此得出

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\sin(2m+1)\frac{\pi\zeta}{L}e^{-D((2m+1)\pi/L)^2t}\\&=\frac{L}{2\sqrt{\pi Dt}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-(\zeta-(2m-\frac{1}{2})L)^2/4Dt}\\&\quad-\frac{L}{4\sqrt{\pi Dt}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-(\zeta-(m-\frac{1}{2})L)^2/4Dt}.\end{aligned}\qquad(***)$$

用 (***) 去实现 (**) 的一个转换, 且检验产生的结果.

4. 对第十九章中分析的局部源问题 (参看 (19.1) - (19.6)) 建立解的另一种表示, 且就此提供一个检验.

5. 证明方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2u}{\partial x^2},$$
$$u(x,0)=0,\quad 0<x<L,\quad u(0,t)=f(t),\quad u(L,t)=0,\quad t>0$$

的一个解可用积分表示

$$u(x,t)=\int_0^t K(x,t-t')f(t')dt',$$

其中核函数 $K(x,t)$ 有两个供选择的式子, 即

$$K(x,t)=\frac{2\pi k}{L^2}\sum_{m=1}^{\infty}m\sin\frac{m\pi x}{L}e^{-k(m\pi/L)^2t}$$

或

$$K(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi k}t^{3/2}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(x+2mL)e^{-k(x+2mL)^2/4kt}.$$

对上两式的存在所带来的优点作评注.

6. 考虑一圆环, 其上的温度分布 $u(x,t),-L<x<L$, 满足偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{u}{\tau},\quad t>0,\qquad(\mathrm{i})$$

它容许周围的热损失 (设 $\tau>0$), 因而蕴涵随着时间向前不断冷却; 且假设开始时一个内部点源曾经在充分长时间内起作用, 有效地建立一个定常态温

度分布 $U(x)$, 它由以下这些方程确定:

$$k\frac{d^2U}{dx^2}-\frac{U}{\tau}=0,\quad -L<x<L,$$

$$U(0^+)=U(0^-),\quad -\kappa\frac{dU}{dx}\bigg|_{x=0^-}^{x=0^+}=Q\ (\text{常数}),$$

$$U(-L)=U(L),\quad \frac{dU}{dx}\bigg|_{x=-L}=\frac{dU}{dx}\bigg|_{x=L}.$$

证明这些方程的解可表成

$$U(x)=\frac{Q}{2\kappa}\sqrt{k\tau}\frac{\cosh\{(L-|x|)/\sqrt{k\tau}\}}{\sinh\dfrac{L}{\sqrt{k\tau}}},\quad -L<x<L, \tag{ii}$$

且对应于环内总热容量

$$H=\rho c\int_{-L}^{L}U(x)dx=Q\tau. \tag{iii}$$

以下, 设该热源在 $t=0$ 时被瞬时地废止; 则该环随后的冷却由处处有连续一阶导数的温度分布 $u(x,t)$ 的方程组决定, 即

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{u}{\tau},\quad -L<x<L,\quad t>0,$$

$$u(-L,t)=u(L,t),\quad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=-L}=\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=+L},\quad t>0,$$

$$u(x,0)=U(x),\quad -L<x<L.$$

证明辅助函数

$$v(x,t)=e^{t/\tau}u(x,t)$$

容许有表示式

$$v(x,t)=\frac{1}{2}c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\frac{n\pi x}{L}e^{-k(n\pi/L)^2t},$$

这里

$$c_0=\frac{Q\tau}{\rho cL}\quad \text{和}\quad c_n=\frac{Q}{\kappa L}\frac{1}{\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2+\dfrac{1}{k\tau}},\quad n=1,2,\cdots$$

所以, 在冷却阶段环内温度由

$$u(x,t)=\frac{Q\tau}{2\rho cL}e^{-t/\tau}+\frac{Q}{\kappa L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{n\pi x}{L}}{\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2+\dfrac{1}{k\tau}}e^{-k(n\pi/L)^2t-t/\tau}\quad t>0 \tag{iv}$$

给出, 且在时间 t 呈现的总热量

$$H(t) = c\int_{-L}^{L} u(x,t)dx = Q\tau e^{-t/\tau},$$

有初始值 $H(0) = Q\tau$, 与 (iii) 一致. 此外注意三角级数或 Fourier 级数

$$\frac{1}{\alpha} + 2\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\zeta}{n^2+\alpha^2} = \frac{\cosh(\alpha(\pi-|\zeta|))}{\sinh\alpha\pi}, \quad -\pi<\zeta<\pi,$$

可以验证

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{n\pi x}{L}}{\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2+\dfrac{1}{k\tau}} = \frac{L}{2}\sqrt{k\tau}\frac{\cosh\left(\dfrac{1}{\sqrt{k\tau}}(L-|x|)\right)}{\sinh\dfrac{L}{\sqrt{k\tau}}} - \frac{k\tau}{2}, \quad -L<x<L, \tag{v}$$

从而当 $t\to 0$ 时, (iv) 准确地回复到对 $U(x)$ 的式子 (ii).

(iv) 中级数的实际可用性要求 $t \gg L^2/k$, 它的一个变换是可行的; 为此, 定义

$$S(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{n\pi x}{L}}{\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2+\dfrac{1}{k\tau}}e^{-k(n\pi/L)^2t}, \tag{vi}$$

且得到对 S 的一阶常微分方程, 即

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{S}{\tau} &= -k\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{L}e^{-k(n\pi/L)^2t}\\ &= \frac{k}{2} - \frac{kL}{2\sqrt{\pi kt}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-k(x-2mL)^2/4kt}.\end{aligned}$$

这里最后一个表示式是由应用恒等式 (23.6) 而得到的. 积分这方程, 得出

$$\begin{aligned}S(x,t) = {}& S(x,0)e^{t/\tau} + \frac{k\tau}{2}(e^{t/\tau}-1)\\ &-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}}L\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^t e^{-t'/\tau}e^{-(x-2mL)^2/4kt'}\frac{dt'}{\sqrt{t'}},\end{aligned}$$

特别地,

$$\begin{aligned}S(0,t) &= S(0,0)e^{t/\tau} + \frac{k\tau}{2}(e^{t/\tau}-1)\\ &\quad -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{\pi}}L\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^t \frac{e^{-m^2L^2/kt'-t'/\tau}}{\sqrt{t'}}dt'\\ &= S(0,0)e^{t/\tau} + \frac{k\tau}{2}(e^{t/\tau}-1)\\ &\quad -\frac{\sqrt{k\tau}L}{4}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{e^{-2mL/\sqrt{k\tau}}\operatorname{erfc}\left(\frac{mL}{\sqrt{kt}}-\sqrt{\frac{t}{\tau}}\right)\right.\\ &\quad \left.-e^{-2mL/\sqrt{k\tau}}\operatorname{erfc}\left(\frac{mL}{\sqrt{kt}}+\sqrt{\frac{t}{\tau}}\right)\right\},\end{aligned} \tag{vii}$$

以上推导中用到结果

$$\begin{aligned}&\int_0^x e^{-(a^2\zeta+\frac{b^2}{\zeta})}\frac{d\zeta}{2\sqrt{\zeta}}\\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4a}\left[e^{-2ab}\operatorname{erfc}\left(\frac{b}{\sqrt{x}}-a\sqrt{x}\right)-e^{2ab}\operatorname{erfc}\left(\frac{b}{\sqrt{x}}+a\sqrt{x}\right)\right].\end{aligned}$$

这样得到的表示式

$$\begin{aligned}u(0,t)-u(0,0) = -Q\frac{\sqrt{k\tau}}{4}e^{-t/\tau}\sum_{m=-\infty}^{\infty}&\left\{e^{-2mL/\sqrt{k\tau}}\operatorname{erfc}\left(\frac{mL}{\sqrt{kt}}-\sqrt{\frac{t}{\tau}}\right)\right.\\ &\left.-e^{2mL/\sqrt{k\tau}}\operatorname{erfc}\left(\frac{mL}{\sqrt{kt}}+\sqrt{\frac{t}{\tau}}\right)\right\}\end{aligned}$$

已准备好当 $t \ll L^2/k$ 和 $t<\tau$ 时的直接近似估计; 特别地, 援引关系式

$$\operatorname{erfc} z + \operatorname{erf} z = 1, \quad \operatorname{erfc}(-z)+\operatorname{erfc}(z) = 2$$

和

$$\operatorname{erfc} z \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}z}e^{-z^2}, \quad z \gg 1,$$

去验证估计式

$$u(0,t)-u(0,0) \sim -\frac{Q}{\kappa}\sqrt{\frac{kt}{\pi}}, \quad 当\ t\to 0.$$

注意到为了在 (iv) 的基础上去建立这种估计 (及其直接的精细改进) 提出了很大的挑战.

求差 $u(L,t)-u(L,0)$ 的相应的估计.

第二十四章

其他微分方程及有关推论

Fourier 选择热传导问题来进行分析具有特别的好处, 即简单的物理论据就能支持从这种分析中作出的预测. 在迄今为止提出的有关常微分方程以及各种边界条件的例子中, 他的方法很容易详细说明; 考虑到这种方法明显的功能, 范围更广以及有关更复杂的微分方程的应用就成为有意义的事.

因此, 为了领会非初等本征函数怎么会产生和怎样得到刻画, 假设热流沿非均匀细杆的轴 (或 x) 方向发生, 该杆的热学和力学参数随位置而变, 且设温度 $u(x,t)$ 满足以下形式的线性偏微分方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r(x)u=q(x)\frac{\partial u}{\partial t},\quad a<x<b, t>0, \tag{24.1}$$

其中 $p(x), q(x)$ 和 $r(x)$ 是给定的函数. 其中两个, 即 $p(x)$ (热传导率) 和 $q(x)$ (密度和比热之积) 自然是正的, 而另一个 $r(x)$ 可以有不同符号, 依赖于方程中出现的这一项是否表示进入或离开该杆的一个局部热流. 分离变量解

$$u(x,t)=X(x)T(t) \tag{24.2}$$

可以得到, 如果方程

$$\frac{dT}{dt}+\lambda T=0,\quad t>0 \tag{24.3}$$

和

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right)+\lambda q(x)X+r(x)X=0,\quad a<x<b \tag{24.4}$$

两者都能解; 显然第一个方程的求解没有困难, 而第二个方程中的变系数除特殊情形外排除了找到显式解的可能性. 而正是第二个方程从一开始就必须处理的, 因为 λ 的容许值与 (24.4) 的在 $x = a, b$ 满足齐次边界条件的 (本征) 解相联系. 考虑到分析中以前讨论的问题或局限性, 就 Fourier 方法的持久的重要性而言更广的定性描述是必要的. 如果边界条件有形式

$$\alpha_{11}X(a) + \alpha_{12}\left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=a} + \alpha_{13}X(b) + \alpha_{14}\left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=b} = 0,$$
$$\alpha_{21}X(a) + \alpha_{22}\left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=a} + \alpha_{23}X(b) + \alpha_{24}\left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=b} = 0, \tag{24.5}$$

方程组 (24.4),(24.5) 定义一类以 Sturm 和 Liouville 命名的问题, 他们在 Fourier 的发现后不久首先创造这有关理论 (1836—1837).

当考虑 (具有不同物理或技术联系的) 其他类型偏微分方程时, 例如

$$L(u) = \alpha(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(t)\frac{\partial u}{\partial t}, \quad t > 0, \tag{24.6}$$

这里

$$L(u) = p_0(x)\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + p_1(x)\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} + \cdots + p_n(x)u, \quad a < x < b \tag{24.7}$$

就提出了常微分方程 (24.3),(24.4) 的变形; 它们就是

$$\alpha(t)\frac{d^2T}{dt^2} + \beta(t)\frac{dT}{dt} + \lambda T = 0, \quad t > 0, \tag{24.8}$$
$$L(X) + \lambda X = 0, \quad a < x < b. \tag{24.9}$$

对 X 的 n 个边界条件的集合从对 u 的边界条件中得出且齐次表示式

$$\mathcal{L}_i(X) = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{24.10}$$

一般与阶数低于 n 的微分算子 $\mathcal{L}_i$ 有关.

设偏微分方程

$$L(u) = 0 \tag{24.11}$$

的具有乘积形式的特解为

$$u = U_1 \cdot U_2, \tag{24.12}$$

其因子与出现在算子 L 中的自变量的不同的子集 1,2 有关, 如果算子表示式

$$L = L_1L_2 + M_1M_2 \tag{24.13}$$

使得

$$L_1L_2(U_1 \cdot U_2) = L_1U_1 \cdot L_2U_2,$$
$$M_1M_2(U_1 \cdot U_2) = M_1U_1 \cdot M_2U_2$$

成立, 则这种特解容易描述. 借助于上面的关系式从 (24.11) 可得出

$$\frac{L_1U_1}{M_1U_1} = -\frac{M_2U_2}{L_2U_2} = \lambda, \tag{24.14}$$

由于两个比值包含不同的变量组, 随之而来的对 U_1, U_2 的方程, 即

$$L_1U_1 = \lambda M_1U_1, \quad M_2U_2 = -\lambda L_2U_2 \tag{24.15}$$

显然比原来的方程 (24.11) 包含较少的变量. 如果算子分解的类型 (24.13) 能重复充分多次, 则最终得到一组常微分方程, 且隐式地定义了 (24.11) 的一个分离变量特解. 当然必须指出, 可能对这种解的存在性没有一般的断言.

关于在一均匀杆内热传递的一维偏微分方程 (14.1) 分别是从反映热平衡的基本要求和热流量与温度梯度之间成比例的一对基本关系式中推导出来的. 当质量传输发生包括质量守恒和有动力学性质的类似关系时, 其中有关的力就适当地合并在一起了.

考虑通过一根管子的质量流的理想模型, 它的平面法截面可随位置与时间两者而变; 具体地, 设 x 表示轴向坐标, t 表示时间, 且设横截面积 $A(x,t)$ 的变化充分小以致可设想为具有轴向速度分量 $u(x,t)$ 的一个单向流. 如果 $\rho(x,t)$ 表示在截面 x 的质量密度, 则在时间 t 和 $t+dt$ 之间该处质量流由

$$\rho uAdt$$

给出, 而在同样时间区间 dt 内通过在 $x+dx$ 处的面积为 $A+\dfrac{\partial A}{\partial x}dx$ 的邻近截面的质量流近似地是

$$\left(\rho+\frac{\partial \rho}{\partial x}dx\right)\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)\left(A+\frac{\partial A}{\partial x}dx\right)dt \doteq \left[\rho uA+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uA)dx\right]dt.$$

它们的差为

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uA)dx\ dt, \tag{24.16}$$

考虑到必要的守恒性, 必须等于在 x 和 $x+dx$ 之间总质量

$$\rho Adx$$

在同样时间区间 dt 内的改变量, 即

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Adx)dt; \tag{24.17}$$

这样 (24.16) 和 (24.17) 之和为零, 且所得方程

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uA)+\frac{\partial}{\partial t}(\rho A)=0 \tag{24.18}$$

表示流中的质量守恒.

为了得到动量平衡的相伴关系式, 选一个厚度为 dx 在时间 t 具有动量

$$\rho uAdx \tag{24.19}$$

的狭窄流体片, 且注意经时间区间 dt 后, 随后的动量是

$$\left(\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t}dt\right)\left(u+\frac{\partial u}{\partial t}dt\right)\left(A+\frac{\partial A}{\partial t}dt\right)\left(dx+\frac{\partial}{\partial t}(dx)dt\right), \tag{24.20}$$

这时该片占据了不同位置. 该片的厚度的改变量, 即

$$\frac{\partial}{\partial x}(dx)dt$$

也出现于对应的质量度量中,

$$\begin{aligned}&\left(\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t}dt\right)\left(A+\frac{\partial A}{\partial t}dt\right)\left(dx+\frac{\partial}{\partial t}(dx)dt\right)\\ &=\rho Adx+dx\frac{\partial}{\partial t}(\rho A)dt+\rho A\frac{\partial}{\partial t}(dx)dt+\frac{\partial}{\partial t}(dx)\frac{\partial}{\partial t}(\rho A)dt^2\end{aligned}$$

(必须) 以足够精度等于原来的质量度量 ρAdx, 其条件是

$$\rho A\frac{\partial}{\partial t}(dx)dt=-\frac{\partial}{\partial t}(\rho A)dx\ dt. \tag{24.21}$$

利用守恒方程 (24.18), 得到 (24.21) 的另一表示

$$\frac{\partial}{\partial t}(dx)dt=\frac{1}{\rho A}\frac{\partial}{\partial x}(\rho uA)dx\ dt,$$

将此式引入到 (24.20) 中后, 动量改变量的结果是

$$\begin{aligned}&\left(\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t}dt\right)\left(u+\frac{\partial u}{\partial t}dt\right)\left(A+\frac{\partial A}{\partial t}dt\right)\left(dx+\frac{1}{\rho A}\ \frac{\partial}{\partial x}(\rho uA)dxdt\right)\\ &\qquad-\rho uAdx\doteq\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho uA)+u\frac{\partial}{\partial x}(\rho uA)\right]dxdt.\end{aligned} \tag{24.22}$$

上式中的 $\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho uA)+u\frac{\partial}{\partial x}(\rho uA)\right]dx$ 等同于薄片上轴向的纯力, 此纯力由两端面上的法向压力和侧边上压力的投影推导出, 因此 (24.22) 中出现右端项是显然的. 如果 p 表示该流体压力, 则分别的力的贡献是

$$pA,-\left(pA+\frac{\partial}{\partial x}(pA)dx\right),p\frac{\partial A}{\partial x}dx,$$

且它们的和等于

$$-A\frac{\partial p}{\partial x}dx,$$

所以动量平衡方程取形式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho uA)+u\frac{\partial}{\partial x}(\rho uA)=-A\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{24.23}$$

一对方程 (24.18),(24.23) 以及 p 和 ρ 之间的一个关系式 (或流体的状态方程) 一起构成所考虑情境下的基本方程组. 如果假设 u 和 ρ, p, u 的导数是小 (例如说, 一阶小) 量, 则方程组忽略高阶量后能线性化, 它有利于较简单的分析, 这样重写 (24.18) 成

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A)+(\rho-\rho_0)\frac{\partial}{\partial x}(uA)+\rho_0\frac{\partial}{\partial x}(uA)+u\frac{\partial}{\partial x}(\rho A)=0,$$

这里 ρ_0 表示密度的静态值, 上述假设蕴含着第二和第四项是比其他项高阶的项; 且按 ρ, u 线性的形式成为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A)+\rho_0\frac{\partial}{\partial x}(uA)=0. \tag{24.24}$$

类似推理表明方程

$$\rho_0\frac{\partial}{\partial t}(uA)+A\frac{\partial p}{\partial x}=0 \tag{24.25}$$

替代 (24.23) 是合适的, 且给出一个状态方程

$$\rho=f(p), \tag{24.26}$$

它补充 ρ 和 p 的时间导数之间的一个关系式,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{df}{dp}\frac{\partial p}{\partial t}\doteq\left(\frac{df}{dp}\right)_{p=p_0}\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{24.27}$$

其中 f 的常导数在静态压力下估值, 通过联立线性方程组 (24.24),(24.25) 能求得 p 和 u.

当 A 保持为常量时, 从这方程组消去一个未知函数, 其结果是对 p 和 u 的分离的然而是同样的偏微分方程, 即

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{bmatrix}p\\u\end{bmatrix}=0, \tag{24.28}$$

这里

$$c^2=\frac{1}{\left(\dfrac{df}{dp}\right)_{p=p_0}}, \tag{24.29}$$

且它们描述一维或平面声扰动 (前面关注的主题, 见 (17.9)).

方程组 (24.24) – (24.26) 已被用来研究一类角状区域内无穷小振幅、轴对称声激发, 该角状区域的横截面积由 $A(x,t)$ 规定; 且一些有关细节现已准备就绪. 首先假设该面积不随时间改变, 即

$$A = A(x),$$

且引入记号

$$q(x) = \frac{1}{A(x)}\ \frac{dA}{dx}; \tag{24.30}$$

那么 (24.24),(24.25) 相应的变化形式是

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0 c^2}\ \frac{\partial p}{\partial t} - q(x)u$$

和

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\ \frac{\partial p}{\partial x}.$$

在上面这对方程中依次消去 u, p, 得出两个偏微分方程

$$\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = q(x)\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{24.31}$$

$$\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = q(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dq}{dx}u, \tag{24.32}$$

其中 A 的可变性用一个线性波动方程中的 (类似于源的) 低阶项显示出来, 该线性波动方程将修改齐次方程 (24.28) 的解 $F(x \pm ct)$.

(24.31) 的分别依赖于每个变量的特解, 即

$$p(x,t) = X(x)T(t) \tag{24.33}$$

可以得到, 如果 X, T 分别满足常微分方程

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \lambda c^2 T = 0$$

和

$$\frac{d^2X}{dx^2} + q(x)\frac{dX}{dx} + \lambda X = 0; \tag{24.34}$$

这里第二个方程除分离常数外还包含一个变系数.

其次, 假设该角状区域有柱面的形状且设

$$r(t) = \frac{1}{A(t)}\ \frac{dA}{dt} \tag{24.35}$$

是其横截面积 $A(t)$ 的瞬时变化的度量; 求得与偏微分方程 (24.31),(24.32) 对应的方程为

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(r(t)u), \tag{24.36}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=-\frac{1}{c^2}r(t)\frac{\partial p}{\partial t}-\rho_0\frac{1}{A}\frac{d^2 A}{dt^2}, \tag{24.37}$$

这里低次项由 A 的不均匀性产生, 如前所述.(24.36) 的一个特解

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

的各因子 X,T 与常微分方程

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\lambda X=0,$$

$$\frac{d^2T}{dt^2}+r(t)\frac{dT}{dt}+\left(\frac{dr}{dt}-\lambda c^2\right)T=0 \tag{24.38}$$

相联系; 且第二个方程考虑到它的变系数更为复杂.

当截面积不能表成积的形式

$$A(x,t)=F(x)G(t)$$

时, 构造 p 和 u 的分离变量解不再可行. 例如, 给出典型的压力方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=q(x,t)\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{1}{c^2}r(x,t)\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{24.39}$$

这里

$$q(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}A(x,t),\quad r(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}A(x,t). \tag{24.40}$$

作为替代, 形式的简化是可取的, 且依赖于引入特征变量

$$\xi=x+ct,\quad \eta=x-ct, \tag{24.41}$$

用新变量,(24.39) 表成

$$\frac{\partial^2 p}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{2}\frac{1}{A(\xi,\eta)}\frac{\partial A}{\partial\eta}\frac{\partial p}{\partial\xi}+\frac{1}{2}\frac{1}{A(\xi,\eta)}\frac{\partial A}{\partial\xi}\frac{\partial p}{\partial\eta}=0. \tag{24.42}$$

令

$$p(\xi,\eta)=\mu(\xi,\eta)P(\xi,\eta),$$

且适当选取 μ, 则 (24.42) 中的一阶导数项能消去, 便有最后结果

$$\frac{\partial^2 p}{\partial\xi\partial\eta}+F(\xi,\eta)P=0,$$

这里 $F(\xi,\eta)$ 按确定方式与 $A(\xi,\eta)$ 关联; 分析这微分方程的方法已经被 Riemann (黎曼, 1826 — 1866) 所发展.

关于非齐次场景中热和质量流的上述观察指出变系数微分方程的普遍的作用, 对其他现象也是这种情况. 如果要求解一个偏微分方程, 它在二维或三维区域的边界上服从设定性状, 则采用可利用的特殊坐标系的优点是清楚的; 然而, 这将导致将常系数偏微分方程, 例如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

替换成一个带变系数的方程. 所以在这种情况下如何应用 Fourier 分析, 尚待以后说明.

习 题 24

1. 证明带有混合二阶导数的偏微分方程

$$\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2\alpha}{c^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t},\quad \alpha, c \text{ 为常数}$$

可以有关于 t 的周期解, 即

$$u(x,t)=A\cos\left(\frac{\alpha x}{c}\right)\sin(\omega t-kx),$$

这里

$$k=\frac{1}{c}\sqrt{\omega^2+\alpha^2};$$

且由此导出对 $\alpha x/c$ 和 α/ω 的充分小的值的估计式

$$u(x,t)\doteq A\left[1-\frac{\alpha^2}{2c^2}x^2\right]\sin\left\{\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)-\frac{\alpha^2}{2c\omega^2}x^2\right\},$$

它展示了沿 x 方向前进的形状不变的周期波列, $A\sin\omega\left(t-\dfrac{x}{c}\right)$ 的振幅和相位的某种修正.

2. 在垂直平面内的一 U 形管内装有流体, 一旦两自由面 (或弯液面) 的高度不同, 流体就会产生单摆似的振荡运动; 这种运动基于黏性不可压缩流体的线性化方程的近似理论, 用到了偏微分方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-\nu\left[\frac{\partial^3 z}{\partial r^2\partial t}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial^2 z}{\partial r\partial t}\right]+\frac{2g}{L}z=0,\quad 0<r<R, t>0, \qquad (*)$$

这里 z 表示弯液面相对于流体平衡位置的位移, 它是离管轴的径向距离 r 和时间 t 的函数, g, L 和 ν 分别表示重力加速度、流体柱长度和流体的运动黏性. 求服从条件

$$z(r,0) = -H, \quad \frac{\partial}{\partial t}z(r,0) = 0, \quad 0 < r < R; \quad \frac{\partial}{\partial t}z(R,t) = 0. \quad t > 0$$

的 (*) 的正常解的方程, 其中最后的条件表示在管壁 $r = R$ 处流体的速度为零.

3. 考虑一个有圆横截面和直线轴 (沿 x) 的有弹性的管, 它包含密度为 ρ_0 的不可压缩流体; 且假设轴的法向平面截面保持其圆形形状, 与平衡状态有小的偏差或扰动, 而半径改变了. 设 r_0 和 $r_0 + \zeta(x,t)$ 为平衡状态下的半径和扰动后的半径; 则对应的横截面积是 $A_0 = \pi r_0^2$ 和 $A = \pi(r_0+\zeta)^2 = \pi(r_0^2 + 2r_0\zeta)$, 如果 $\zeta \ll r_0$. 援引对质量和动量守恒的一般方程 (24.18),(24.23), 验证现在的近似式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{r_0}\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \tag{*}$$

和

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

给定半径和流体压力之间的一个关系式

$$p - p_0 = \alpha\zeta + \beta\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \gamma\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2},$$

这里 $\alpha, \beta, \gamma, p_0$ 是正常数, 从 (*) 消去 u 且建立对 $\zeta(x,t)$ 的四阶线性偏微分方程:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{r_0}{2\rho_0}\left[\alpha\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial t} - \gamma\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial t^2}\right], \tag{**}$$

如果 $\beta = \gamma = 0$, 它简化成简单波动方程.

假设

$$\zeta(0,t) = \epsilon e^{i\omega t}, \quad \omega > 0$$

且研究 (**) 的具有形式

$$\zeta(x,t) = \epsilon e^{i(\omega t - kx)}, \quad x > 0$$

的一个解. 如果 $\mathrm{Re}\, k > 0$, 那么 $\mathrm{Im}\, k$ 的符号是什么?

4. 想像问题 3 中的可弯曲管的一种无扰动状态, 其中具有速度 U_0 和压力 p_0 的定常不可压缩流体流; 给定关系式

$$p(x,t) = p_0 + \alpha\zeta - \beta\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2},$$

证明: 如果

$$\frac{\omega}{k} = U_0 \pm c_0,$$

这里

$$c_0 = \sqrt{\frac{r_0(\alpha + \beta k^2)}{2\rho_0}},$$

且为了与管的每一法向截面中的平面形变的假设相一致, 要求 $\lambda = 2\pi/k \gg r_0$, 则半径在静态值 r_0 附近的小振幅周期变化, 即

$$\zeta(x,t) = \epsilon e^{i(\omega t - kx)}$$

是可能的.

5. 如果简单波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{$*$}$$

如 d'Alembert (达朗贝尔, 1717 — 1783) 建议那样改写成形式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial u}{\partial t}\right),$$

那么可引出结论:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c^2}\ \frac{\partial u}{\partial t}$$

是一个函数 $v(x,t)$ 的恰当微分, 即

$$\frac{\partial u}{\partial x}dt + \frac{1}{c^2}\ \frac{\partial u}{\partial t}dx = dv.$$

因为

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial t}dt,$$

就得到关系式

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c}\ \frac{\partial u}{\partial t}\right) d(x+ct) = d(u+cv),$$

且同时有结论

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c}\ \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{和} \quad u + cv$$

两者必是 $x + ct$ 的函数, 即

$$u + cv = f(x + ct). \tag{$**$}$$

对应关系式

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{c}\ \frac{\partial u}{\partial t}\right) d(x-ct) = d(u-cv)$$

蕴涵着

$$u - cv = g(x - ct), \qquad (***)$$

从而, 从 $(**), (***)$ 消去 v 后, 就得到 $(*)$ 的用任意函数 f, g 表示的通解, 即

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct).$$

两个变量的偏微分方程与对那些变量的微分的恰当性条件相结合并不导致沿非均匀杆的热传导方程 (见 (24.1))

$$q(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) \qquad (****)$$

的一个通解; 不管怎样, 试证明 $(****)$ 的解能从与其紧密联系的方程

$$\frac{1}{p(x,t)}\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{q(x)}\ \frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad (*****)$$

的解找到, 且反之亦然. 注意两方程中系数或热参数的互换.

6. 考虑内外半径分别为 r_1, r_2 的两同心圆之间的环形区域和 Laplace 方程在以其公共圆心为极点的平面极坐标中的变系数形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} = 0, \quad r_1 < r < r_2, 0 < \vartheta < 2\pi; \qquad (*)$$

求偏微分方程 $(*)$ 的满足以下条件的正则解, 即对所有 ϑ

$$u(r_1, \vartheta) = C,$$

$$u(r_2, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos n\vartheta.$$

设 u 表示空心 $(0 < r < r_1)$ 普利克斯玻璃 (Plexiglass②) 圆柱内的定常温度, 验证在其外边界的热流量表成

$$q = -\kappa\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_2} = -\frac{\kappa c}{r_0}\left[\frac{1-a_0}{\ln\dfrac{r_1}{r_2}} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \frac{1+(r_1/r_2)^{2n}}{1-(r_1/r_2)^{2n}}\cos n\vartheta\right],$$

这里

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} u(r_2,\vartheta)d\vartheta, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(r_2,\vartheta)\cos n\vartheta d\vartheta, \quad n \geqslant 1,$$

且 κ 表示该普利克斯玻璃的热传导率.

② 一种用聚甲基丙烯酸甲酯制成的透明塑料材料, 常用来制造飞机座舱罩、镜片等. —— 校注

7. 设上述问题中该圆柱的空心部分 $0 < r < r_1$, 包含一种热传导率为 κ_g 的热传导气体. 设 $u(r,\vartheta)$, $u_g(r,\vartheta)$ 分别表示在普利克斯玻璃和气体中的稳态温度, 且假设条件

$$u(r_1,\vartheta) = u_g(r_1,\vartheta),$$
$$\kappa \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_1} = \kappa_g \left.\frac{\partial u_g}{\partial r}\right|_{r=r_1}$$

在其公共边界上成立. 给定外温度分布

$$u(r_2,\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\vartheta,$$

试在两个区域内求解 Laplace 方程, 且验证结果

$$u(r,\vartheta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{r^n + \dfrac{\delta-1}{\delta+1} r_1^{2n} r^{-n}}{r_2^n + \dfrac{\delta-1}{\delta+1} r_1^{2n} r_2^{-n}} \cos n\vartheta, \quad r_1 < r < r_2,$$

这里

$$\delta = \frac{\kappa}{\kappa_g},$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} u(r_2,\vartheta)d\vartheta, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(r_2,\vartheta)\cos n\vartheta d\vartheta, \quad n \geqslant 1.$$

求热流量

$$-\kappa \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_2}$$

的表示式, 以及当 $\delta \to 1$ 且该柱体不再有空心部分时它的极限.

8. 研究 (半径为 R) 均匀球的冷却问题, 给定一个初始温度 (在 $t=0$) 且随后在表面的外向热流与局部温度之间成比例. 对应的方程组包括

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{*}$$

$$u(x,y,z,0) = f(x,y,z), \quad x^2+y^2+z^2 = R^2$$

和

$$\frac{\partial u}{\partial r} + hu = 0, \quad r = R, \quad h > 0;$$

用球极坐标 r,ϑ,φ 代替 x,y,z 后, 该偏微分方程变成变系数方程, 即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cot\vartheta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right].$$

考虑具有形为

$$u(r,\vartheta,\varphi,t)=e^{-k\lambda^2 t}R(r)Y(\vartheta,\varphi)$$

的特解, 这里 λ 是常数, 且导出函数 R,Y 必须满足的方程; 前者 $R(r)$ 属于称为柱函数的函数族, 而后者称为球面调和函数. 不试图得到它们的详细性质 (以后会着手做的), 按 Fourier 的方法, 概述求解方程组 (*) 的步骤.

9. 单向流中联系压力和速度改变的线性化动量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x},$$

借助于引入一个称为速度势的函数 $\phi(x,t)$ 而成立, ϕ 满足

$$u=-\frac{\partial \phi}{\partial x},\quad p=\rho_0\frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

从适合于截面积为 $A(x)$ 的角状区域的相伴质量守恒关系式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho_0 c^2}\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}u$$

推导出对 ϕ 的偏微分方程

$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(A(x)\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}.$$

考虑具有喇叭形指数展开, 长度为 L 的角状区域, 即

$$A(x)=A(0)e^{2ax},\quad a>0,\quad 0<x<L$$

且设它为 $x=0$ 处振荡的一活塞激发, 而在 $x=L$ 处维持一个常压力水平. 当活塞频率 ω 与本征解

$$\phi_n(x,t)=X_n(x)e^{i\omega_n t}$$

的本征频率 ω_n 中的任一个重合时, 共振或异常大激发出现于这个简单模型中; 什么是用以决定这种 ω_n 的在 $x=0,L$ 的齐次边界条件? 证明在序列 $0<\omega_1<\omega_2<\cdots<\omega_n<\cdots$ 中, 可以得到渐近估计

$$\omega_n\sim(2n-1)\frac{\pi c}{2L},\quad n\to\infty.$$

第二十五章

二阶常微分方程

前一章观察到, 当 Fourier 分析用于解偏微分方程边值、初值问题时, 二阶或高阶且带有参数的变系数线性常微分方程起关键作用; 这种情况归因于这类积分或解的不依赖于其显式解的常微分方程的大量文献和结果的积累.

开始陈述关于二阶方程的这类结果时, 首先注意它们的不同表现形式是合适的; 这样, 如果在有关区间上 $p_0(x) \neq 0$, 那么齐次正规形式

$$p_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0 \tag{25.1}$$

可换成另一种形式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0, \tag{25.2}$$

即此时选 $p_0 = 1$ 是容许的且不受限制. 方程

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y\\&= p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dp}{dx}\,\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0\end{aligned} \tag{25.3}$$

有特别的特征, 即导数项的系数本身是通过微分联系着的; 此外分别的表示式 (25.2),(25.3) 在能互相变换意义下是有紧密联系的. 为此, (25.2) 中乘以

$$\exp\left[\int^x p_1(x')dx'\right]$$

再合并前两项, 其结果

$$\frac{d}{dx}\left\{\exp\left[\int^x p_1(x')dx'\right]\frac{dy}{dx}\right\}+p_2(x)\left[\exp\int^x p_1(x')dx'\right]y=0$$

是 (25.3) 形式的方程.

反之, (25.3) 中由

$$z=\int_a^x \frac{dx'}{p(x')}, \qquad p \gtrless 0$$

确定一个自变量变换, 将这方程变成归入 (25.2) 中的形式

$$\frac{d^2y}{dz^2}+pqy=0,$$

虽然无一阶导数项. 上面形式的方程也可从 (25.3) 通过其中因变量的变换得到; 为此, 令

$$y=\frac{1}{\sqrt{p(x)}}Y,$$

结果是

$$\frac{d^2Y}{dx^2}-F(x)Y=0,$$

这里

$$F(x)=\frac{q(x)}{p(x)}-\frac{1}{2\sqrt{p(x)}}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{p(x)}}\frac{dp}{dx}\right),$$

且 $F(x)$ 的连续性要求对 $\dfrac{dp}{dx}$ 有同样的连续性.

可以消去 (25.2) 的一阶导数项, 只要令

$$y=u\cdot v,$$

就有

$$u\frac{d^2v}{dx^2}+\left(2\frac{du}{dx}+p_1u\right)\frac{dv}{dx}+\left(\frac{d^2u}{dx^2}+p_1\frac{du}{dx}+p_2u\right)v=0.$$

选取 u 使得

$$2\frac{du}{dx}+p_1u=0,$$

即

$$u=\exp\left[-\frac{1}{2}\int_a^x p_1(x')dx'\right],$$

所以 v 的方程变成

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\rho(x)v=0, \tag{25.4}$$

其中

$$\rho(x)=p_2-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}p_1-\frac{1}{4}p_1^2.$$

采用 (25.4) 作为二阶线性常微分方程的正规形式对定性讨论和方便求解两方面都有好处.

关于二阶常微分方程的基本命题说: 在 x 的单独的一个值处固定一对带 C_1, C_2 任意值的初始条件

$$y(a)=C_1,\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}=C_2$$

后, 解是唯一确定的. 零初值 $C_1=C_2=0$ 推断出的结论 $y(x)\equiv 0$ 意味着上述这类具有连续系数 (分别为 $p_1(x), p_2(x)$, 或者 $p(x), q(x)$, 或者 $\rho(x)$) 的初值问题的非平凡解只能有简单零点, 即

$$y(a)=0,\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)\bigg|_{x=a}\neq 0,$$

因此, $y(a-0)$ 和 $y(a+0)$ 反号, 且若给定解

$$y(x)>0,\quad a<x<b$$

则得到不等式

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}>0,\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=b}<0; \tag{25.5}$$

如果 $y(x)<0, a<x<b$, 则不等式 (25.5) 中的不等号反号.

假定已知 $x=a$ 是解 $y_1(x)$ 的零点, 则任何也以 $x=a$ 为零点的其他解 $y(x)$ 和 $y_1(x)$ 差一个因子 A 使得 $\left(\frac{dy}{dx}\right)\bigg|_{x=a}=A\left(\frac{dy_1}{dx}\right)\bigg|_{x=0}$; 而且, 由此得出 $y(x)$ 的其余零点也就被确定了.

在 Fourier 分析中在寻找偏微分方程的表成单变量函数之积的那些解后出现的常微分方程必须包含一个参数或分离常数 λ; 而且典型方程 (24.4) 揭示 λ 是作为一个系数因子进入的. 然而随后的论证同样适用于对 λ 有非线性依赖关系的各种变形

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\rho(x,\lambda)y=0 \tag{25.6}$$

和

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x,\lambda)y=0. \tag{25.7}$$

由于曲线 $y=y(x)$ 的凹凸性质是由二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 的符号决定的, 常微分方程的正规形式

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\rho(x)y \tag{25.8}$$

的系数函数 $\rho(x)$ 的符号起类似作用. 为了建立 ρ 的符号和方程 (25.8) 的解的零点之间的联系, 假设

$$\rho(x) < 0, \quad a < x < b,$$
$$y(c) = 0, \quad a < c < b;$$

这样, 如果 $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=c} > 0$, 随之得出不等式

$$y > 0, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) > 0, \quad \text{在 } c < x < \delta \text{ 上.}$$

且曲线 $y(x)$ 是向上凹上升 $\left(\frac{dy}{dx} > 0\right)$ 到点 c 的右边. 类似地, 如果 $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=c} < 0$, 相应的不等式

$$y < 0, \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) < 0, \quad \mu < x < c$$

蕴涵曲线 $y(x)$ 下凹下降到点 c 的左边. 从这些讨论中, 一个一般性结论出现了, 即: 如果在区间 $a < x < b$ 内 $\rho(x) < 0$, 则常微分方程 (25.8) 的任一非平凡解 $y(x)$ 在其中最多只有一个零点. 如果 $\rho(x) > 0$, 解曲线的不同性状就会出现, 由 $\sin x$ 和 $\cos x$ 满足的特殊方程 $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$, 可以推断出多个零点是可能的.

(25.8) 的解的零点在有限区间 $a < x < b$ 内不可能有聚点或有无穷多个零点; 因为如果 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 表示零点序列, 且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^* \quad (\text{有限}),$$

从两个关系式

$$y(x^*) = 0$$

和

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y(x_n) - y(x^*)}{x_n - x^*} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x^*} = 0$$

可推断出 $y = 0$, 这和非平凡解的原假设矛盾.

如果 $y_1(x), y_2(x)$ 是常微分方程 (25.8) 的两个线性无关解, 则关系式

$$y_2\frac{d^2y_1}{dx^2} - y_1\frac{d^2y_2}{dx^2} = 0$$

成立, 因此在 $x = a, b$ 之间积分

$$\left. y_2\frac{dy_1}{dx} - y_1\frac{dy_2}{dx}\right]_{x=a}^{x=b} = 0,$$

这表示它们的 Wronski (朗斯基) 行列式在 $x=a,b$ 上有同样的非零值. 设 $y_1(x)$ 在 $x=a,b$ 为零, 则上式的简化形式为

$$y_2(b)\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=b}-y_2(a)\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=a}=0,$$

再考虑到不等式 (25.5), 就得出推论: $y_2(a)$ 和 $y_2(b)$ 反号. 所以 $y_2(x)$ 在 $y_1(x)$ 的两零点之间至少有一个零点; 且没有其他的零点, 因为由同样的论断 (或互反性) $y_1(x)$ 的一零点必位于 $y_2(x)$ 的两零点之间, 而这种情况是被排除的. 现在可以叙述一个一般性命题: 线性无关解的零点互相交错, 且这对该常微分方程的不同形式都成立. 后一论点证实如下: 设 y_1,y_2 是线性无关解, 有非零的 Wronski 行列式

$$y_2\frac{d}{dx}y_1-y_1\frac{d}{dx}y_2\neq 0;$$

假设在 $a<x<b, y_2(x)\neq 0$ 后, 定义连续函数

$$Y(x)=\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$$

在 a,b 取零值. 由微分学中的中值定理断定存在 a,b 之间的一点 ξ, 其上 $Y(x)$ 的导数

$$\frac{dY}{dx}=\frac{y_2\dfrac{d}{dx}y_1-y_1\dfrac{d}{dx}y_2}{(y_2(x))^2}$$

为零, 这与 y_1,y_2 的无关性矛盾; 所以 $y_2(x)$ 在 $y_1(x)$ 的两相邻零点之间必有一零点, 且反之亦然.

一个得到更多结果的有效方法用到两个系数不同的常微分方程: 这样, 考虑一对方程

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy_1}{dx}\right)+q_1(x)y_1=0, \tag{25.9}$$

和

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy_2}{dx}\right)+q_2(x)y_2=0, \tag{25.10}$$

其中连续函数 p,q_1,q_2 满足

$$p(x)>0,\quad 0<q_1(x)<q_2(x),\quad a\leqslant x\leqslant b$$

分别用 y_2,y_1 乘 (25.9),(25.10), 且相加得出

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\left(y_2\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_2}{dx}\right)\right]=(q_2-q_1)y_1y_2,$$

然后在 a,b 之间积分, 得出结果

$$p(x)\left[y_2\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_2}{dx}\right]_{x=a}^{x=b}=\int_a^b(q_2(x)-q_1(x))y_1y_2dx. \tag{25.11}$$

如果 y_1 和 y_2 两者保持同号, 例如都为正, 上式右边是正的, 而左边在假设 $y_1(a)=y_1(b)=0$ 下简化成

$$p(b)y_2(b)\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=b}-p(a)y_2(a)\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=a}.$$

注意到如 (25.5) 所规定的, $\dfrac{dy_1}{dx}$ 在 $x=a,b$ 反号, 左边部分结果是负的, 所以出现矛盾. 所以给定了 (25.9) 的一个解 $y_1(x)$ 在 $x=a,b$ 为零, 则具有较大系数函数 $q_2(x)$ 的比较方程 (25.10) 的每一解 $y_2(x)$ 在这一区间至少有一次为零.

为了第二个发现, 假设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 两者有同样的初值, 即

$$y_1(a)=y_2(a)>0,\quad \left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=a}=\left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{x=a};$$

则 (25.11) 简化成

$$p(b)y_2(b)\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=b}=\int_a^b(q_2(x)-q_1(x))y_1y_2dx,$$

且左右两边的相反符号 (左边 <0, 右边 >0) 必然得出结论: y_2 在整个区间不能保持为正. 所以 $y_2(x)$ 的最近零点 (在 $x=a$ 后的) 出现于 $y_1(x)$ 的最近零点之前, 且常微分方程 (25.3) 的解的 "振荡" 性态随系数函数的量值增大而加速.

常微分方程

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(n+1)\frac{dy}{dx}+y=0 \tag{25.12}$$

及其前述类型的替代形式

$$\frac{d}{dx}\left(x^{n+1}\frac{dy}{dx}\right)+x^ny=0$$

提供和证实了一个具体的应用. 如果 $0<a<x<\infty$ 时, $x^n>ax^{n-1}$, 提出的比较方程是

$$\frac{d}{dx}\left(x^{n+1}\frac{dy}{dx}\right)+ax^{n-1}y=0 \tag{25.13}$$

或

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(n+1)x\frac{dy}{dx}+ay=0.$$

后者为等维方程, 可证明其线性无关解是

$$x^{r_1} = e^{r_1 \ln\ x} \quad 和 \quad x^{r_2} = e^{r_2 \ln\ x},$$

这里 r_1, r_2 是二次方程

$$r(r-1) + (n+1)r + a = 0$$

的两个根, 即

$$r_1 = -\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}n^2 - a^2}, \quad r_2 = -\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}n^2 - a^2}.$$

如果

$$\frac{1}{4}n^2 - a < 0,$$

则 r_1, r_2 的值是复的, 且这些函数的一个线性组合表示 (25.13) 的具有振荡性态的一个解, 即

$$y(x) = \frac{1}{2i}\left\{e^{r_1 \ln\ x} - e^{r_2 \ln\ x}\right\} = x^{-n/2} \sin\left[\sqrt{a - \frac{1}{4}n^2} \ln\ x\right],$$

其零点位于

$$x_m = \exp\left\{m\pi\left(a - \frac{1}{4}n^2\right)^{-1/2}\right\}, \quad m = 0, 1, \cdots$$

因此当 $x > a$ 和 $a > \dfrac{1}{4}n^2$ 时, 常微分方程 (25.12) 的每一个解有无穷多零点, 且每一单个的零点位于每一区间 (x_m, x_{m+1}) 内, $m = 0, 1, \cdots$

包含常系数且容易求解的比较方程证明是有用的; 例如, 给定

$$0 < \rho(x) < M, \qquad a < x < b,$$

考虑两个常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \rho(x)y = 0 \tag{25.14}$$

和

$$\frac{d^2z}{dx^2} + Mz = 0.$$

后一方程满足规定条件

$$z(c) = 0, \quad \left(\frac{dz(x)}{dx}\right)_{x=c} = A, \quad a < x < b$$

的解是

$$z(x) = \frac{A}{\sqrt{M}} \sin \sqrt{M}(x - c),$$

且其后继零点为

$$x = c + \frac{\pi}{\sqrt{M}}.$$

所以如果 c, d 表示 (25.14) 的一个解在区间 (a, b) 内的相邻零点, 则用前面结果得出

$$d - c > \frac{\pi}{\sqrt{M}},$$

且根据比较方程

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + mz = 0,$$

这里

$$0 < m < \rho(x), \quad a < x < b,$$

用类似推理可得出

$$d - c < \frac{\pi}{\sqrt{m}};$$

因此, 可以得到为分离 (25.14) 的解的相继零点的两个互补界限, 即

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} < d - c < \frac{\pi}{\sqrt{m}}, \tag{25.15}$$

且一个推论是: 在区间 $a < x < b$ 内的零点数 n 满足不等式

$$\frac{b-a}{\pi}\sqrt{m} < n < \frac{b-a}{\pi}\sqrt{M}. \tag{25.16}$$

发现关于不同解的交错零点和当微分方程的系数变化时零点位置的一定的移位的漂亮结果应归功于 Sturm (斯图姆) (1836); 他选择形如

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + \rho(x)y = 0 \tag{$*$}$$

的微分方程, 因为 "数学物理中产生的二阶方程直接表现成形式 $(*)$". 同时代的数学物理主题包括固体中热传导和弹性体、膜和弦的振动; 其中, 在 Fourier 之前和他以外, 作出显著贡献的人是 Euler, L. (欧拉), J. Bernoulli (约翰 · 伯努利) 和 D. Bernoulli (丹尼尔 · 伯努利), Laplace, P. S. M. de (拉普拉斯), Lagrange, J. L. (拉格朗日), Legendre, A. M. (勒让德) 和 d'Alembert, J. L. R. (达朗贝尔). d'Alembert 的一篇文章, 得到柏林科学院的奖项且发表于 1747 年, 评论包括 "在数学物理中首先普遍应用偏微分方程 …… 作为对大气潮汐的研究工作它是成功的, 且很多年后 Lagrange 仍继续赞扬 d'Alembert 的努力".

Liouville (刘维尔, 1837) 处理包含一个常微分方程和在分离点上边界条件的齐次线性组时选取 (*) 中系数函数的特殊形式, 即

$$\rho(x) = \lambda q(x) + r(x),$$

这里 λ 是一参数而 $q(x)$ 是一个正函数. 早就知道 (参见 (24.4),(24.5)), 正是这样的一个方程组出现于沿非均匀杆的热传导分析中, 且类似的一个组出现于非均匀弦在变张力 $k(x) > 0$ 下受偏微分方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right) - r(x)y = \mu(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{25.17}$$

支配的小横位移 $y(x,t)$ 的分析中, 这里 $\mu(x) > 0$ 和 $r(x) > 0$ 分别等于质量密度和与弦位移成比例的恢复力的大小. 这样 (25.17) 的时间周期解

$$y(x,t) = X(x)e^{i\omega t}$$

依赖于一个必须满足常微分方程

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dX}{dx}\right) + (\omega^2\mu(x) + r(x))X = 0$$

的函数 $X(x)$, 以上方程与 (24.4) 的形式完全一样.

有一个参数的常微分方程, 即一般情形下的 (25.6),(25.7), 其解通过表示式

$$y = y(x, \lambda)$$

反映了这种情况. 如果像以后将假设的那样, y 对 x 和 λ 两者有连续依赖性, 且

$$y(c, \overline{\lambda}) = 0, \quad a < c < b,$$

则当

$$|x - c| < \epsilon \quad 和 \quad |\lambda - \overline{\lambda}| < \delta$$

时, 函数 $y(x,\lambda)$ 恰好有一个零点, 这里对任意的 $\epsilon > 0, \delta(\epsilon)$ 是可确定的.

由内在参数 λ 的改变带来的微分方程的改变显然对其解的零点的位置有影响. 考虑常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \rho(x,\lambda)y = 0, \quad a < x < b$$

和对某个 λ 的值满足

$$y(a,\lambda) = \alpha,$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \beta$$

的唯一确定的特解, 这里附加条件 $|\alpha|+|\beta|>0$. 设这解在 $a<x<b$ 内不同零点表成

$$x_1(\lambda), x_2(\lambda), \cdots$$

且给定 $\rho(x,\lambda)$ 是自变量的连续函数, 则 $x_k(\lambda), k=1,2,\cdots$ 是 λ 的连续函数. 如果 $\rho(x,\lambda)$ 是 λ 的正的单调增函数且 $\lambda'>\lambda$, 则应用前面一个结果, 它规定与一特殊系数函数的不同量相联系的常微分方程解的零点相对位置, 现在推断出

$$x_k(\lambda')<x_k(\lambda),$$

即当 λ 增加时, 零点沿 x 轴移向左边. 当 λ' 和 λ 相差无穷小量时, 两曲线 $y_k(x,\lambda)$ 和 $y_k(x,\lambda')$ 在其一对零点之一附近的配置分两种情形如图 39 所示. 一般地, 与分别的参数值 λ,λ' 相联系的常微分方程的两个解, 在 $x=a$ 和 $x=b$ 之间有相等的零点个数. 如果 $y_k(b,\lambda')=0$, 则额外的一个零点出现了, 因为对 $y_k(x,\lambda)$ 的相关的一个零点位于区间 $a<x<b$ 之外; 换言之, 当 λ 变化时, $y(x,\lambda)$ 的一个零点能得到或失去, 只有穿过其进口进入 (a,b) 区间或从该区间离去时才发生. 此外, 如果

$$\rho(x,\lambda)\to\infty, \quad 当 \quad \lambda\to\infty, \quad 在 a<x<b 内,$$

则在这区间内解的零点数变成任意大.

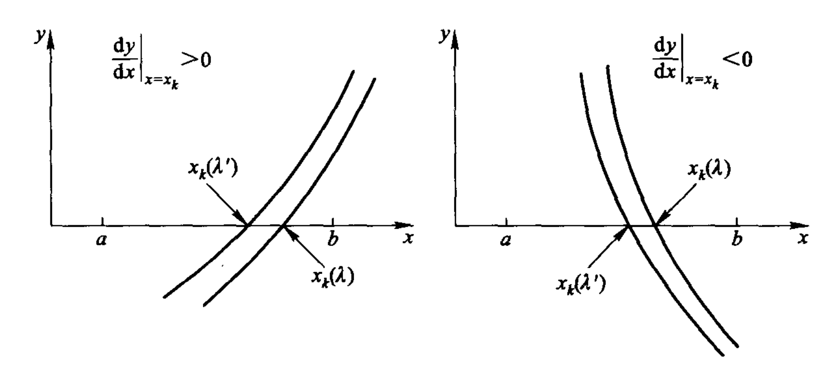


图 39

同样的结果适用于常微分方程

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x,\lambda)y=0$$

和

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(\lambda\rho(x)+r(x))y=0;$$

在后一情形, 规定 $\rho(x) > 0$ 和 $r(x) = 0$, 如果 $\lambda < 0$, 则在 $x = a$ 为零的解在 $a < x < b$ 内无另外的零点. 当 λ 增加时, 零点数也增加, 而且每增加一个零点, 则区间端点 $x = b$ 必为零点. 这样就确定了 λ 的不同值的一个无穷序列, 即

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_k < \cdots$$

其中每一个都表示该常微分方程在所考虑区间的两端 $x = a, b$ 为零的一个解. 此外, 该常微分方程的本征函数为

$$y_1(x, \lambda_1), y_2(x, \lambda_2), \cdots, y_k(x, \lambda_k), \cdots$$

而 $y_k(x, \lambda_k)$ 在 (a, b) 内恰好有 $(k-1)$ 个零点.

对给定区间 $a < x < b$ 内无参数常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \rho(x)y = 0,$$

解的零点数的界 (25.16) 可以马上改写以适用于包括带系数参数 λ 的方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda\rho(x)y = 0.$$

为此, 用 $\lambda_k m, \lambda_k M$ 取代 m, M, 这里 $k, y_k(x, \lambda_k)$ 是配对的, 且用 N_k 表示对应的零点个数, 由此得出

$$\frac{b-a}{\pi}\sqrt{\lambda_k m} < N_k < \frac{b-a}{\pi}\sqrt{\lambda_k M}.$$

接着就可证明 λ_k 的界是

$$\frac{N_k^2\pi^2}{(b-a)^2 M} > \lambda_k > \frac{N_k^2\pi^2}{(b-a)^2 m}.$$

根据后一不等式, λ_k 的倒数的级数

$$\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$$

收敛.

与一个常微分方程的在区间端点 a, b 不为零的解相关联的其他本征值集 λ_k 的存在性也能证明; 例如, 在以下这种情况, 设

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + \lambda q(x)y = 0$$

且 $p(x), q(x) > 0, a < x < b$, 给定齐次边界关系式

$$\alpha y(a) - \beta \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = 0,$$
$$\gamma y(b) - \delta \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=b} = 0.$$

对齐次线性方程的解, 除了专注于其零点外, 某些其他观察也是适宜的. 首先, 回顾一下二阶齐次常微分方程的通解能用任意一对线性无关解 $y_1(x), y_2(x)$ 构成, 即

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{25.18}$$

其中系数 C_1, C_2 是任意的. 一个特定的复值

$$y_1(x) + iy_2(x) = e^{\xi(x)+i\psi(x)} \tag{25.19}$$

将注意力分别集中到辐角函数和相函数 $\xi(x), \psi(x)$, 用 y_1, y_2 来表示是

$$\xi(x) = \frac{1}{2}\ln(y_1^2 + y_2^2) \tag{25.20}$$

和

$$\psi(x) = \tan^{-1}\frac{y_2(x)}{y_1(x)}.$$

函数 $\xi(x)$ 在 $a < x < b$ 有确切定义且是连续的, 因为 y_1 和 y_2 在同一点不能同时为零; 此外, 在通过 y_1 的一个零点时由于它在零点两边取反号, y_2/y_1 的值从 $\pm\infty$ 改变到 $\mp\infty$. 所以在 (a, b) 内某点固定 $\psi(x)$ 的一个值后, 函数 $\psi(x)$ 也是确切定义和连续的. 注意到

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{y_1\dfrac{dy_2}{dx} - y_2\dfrac{dy_1}{dx}}{y_1^2 + y_2^2} = \frac{W(y_1, y_2)}{y_1^2 + y_2^2}$$

包含线性无关函数的 Wronski 行列式, 其符号不变; 因此假设 $\dfrac{d\psi}{dx} > 0$ 是可允许的 (如果需要, 可改变 y_1, y_2 的次序), 所以函数 $\psi(x)$ 显示单调递增性状. 给定常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0$$

的基本解对

$$y_1 = \sin\ \lambda x, \quad y_2 = \cos\lambda\ x$$

以及相应的限制条件

$$\xi(x) = 0, \quad \psi(x, \lambda) = \lambda x,$$

ψ 关于 x 和参数 λ 的单调增长性是显然的.

从 (25.19) 推导出特征化表示式

$$y_1(x) = e^{\xi(x)} \cos \psi(x), \quad y_2(x) = e^{\xi(x)} \sin \psi(x)$$

使得能将 (25.18) 的通解改写成形式

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{\xi(x)} \cos \psi(x) + C_2 e^{\xi(x)} \sin \psi(x) \\ &= C e^{\xi(x)} \sin[\psi(x) + \psi_0], \end{aligned} \tag{25.21}$$

这里 C, ψ_0 表示任意常数, 且后者显示 $\psi(x)$ 形成了 $y(x)$ 的振荡; 当 $\psi(x)$ 增加时, 振荡也快起来.

为了得到含参数 λ 的二阶线性齐次常微分方程的符合端点或边界条件

$$y(a, \lambda) = 0, \quad y(b, \lambda) = 0$$

的解, 在 (25.21) 中令 $\psi_0 = 0$, 且对任意的 λ 满足初始条件

$$\begin{aligned} y_1(a, \lambda) &= 1, \qquad & \left.\frac{d}{dx} y_1\right|_{x=a} &= 0, \\ y_2(a, \lambda) &= 0, \qquad & \left.\frac{d}{dx} y_2\right|_{x=a} &= 1 \end{aligned}$$

的特解 $y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda)$ 定义

$$\psi(x, \lambda) = \tan^{-1} \frac{y_2(x, \lambda)}{y_1(x, \lambda)};$$

则

$$\psi(a, \lambda) = 0, \quad \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=a} = 1.$$

端点条件之一 $y(a, \lambda) = 0$ 自动满足, 而另一个条件 $y(b, \lambda) = 0$ 要求规定

$$\psi(b, \lambda_k) = k\pi, \quad k \text{ 为整数}, \tag{25.22}$$

这使大的 k 的值和 $\psi(b, \lambda_k)$ 相联系. 由 (25.22) 推导出的 λ_k 的特征值方程即

$$y_2(b, \lambda_k) = 0$$

显然与隶属该问题的特征函数 $y_2(x, \lambda_k)$ 一致.

关于非齐次方程组

$$p_0(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + p_1(x) \frac{dy}{dx} + p_2(x) y = F(x), \quad a < x < b \tag{25.23}$$

和

$$L_1[y] = \alpha_{11}y(a) + \alpha_{12}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} + \alpha_{13}y(b) + \alpha_{14}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=b} = A,$$
$$L_2[y] = \alpha_{21}y(a) + \alpha_{22}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} + \alpha_{23}y(b) + \alpha_{24}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=b} = B, \qquad (25.24)$$

做一些进一步的评注是合适的. 给出常微分方程 (25.23) 的一个特解 $y_0(x)$ 和对应齐次方程的一个无关解对 $y_1(x), y_2(x)$, 其通解有形式

$$y(x) = y_0(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

由边界条件 (25.24), 得出 C_1, C_2 的联立线性方程组, 即

$$C_1L_1[y_1] + C_2L_1[y_2] = A - L_1[y_0],$$
$$C_1L_2[y_1] + C_2L_2[y_2] = B - L_2[y_0],$$

由此得出的推论依赖于系数行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1[y_1] & L_1[y_2] \\ L_2[y_1] & L_2[y_2] \end{vmatrix}$$

是否为零.

首先, 如果 $\Delta \neq 0$, 该非齐次问题对 $F(x), A, B$ 的每种选取有唯一非平凡解, 同时对应的齐次组 ($F(x) = 0, A = B = 0$) 只有平凡解. 其次, 如果 $\Delta = 0$, 该齐次问题有无穷多解, 而非齐次问题一般无解, 除非

$$\frac{B - L_2[y_2]}{A - L_1[y_0]} = \frac{L_2[y_1]}{L_1[y_1]} = \frac{L_2[y_2]}{L_1[y_2]},$$

当最后的关系式成立时, 有无穷多解.

习　题　25

1. 考虑函数 $y(x)$ 满足的常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0, \quad a < x < b,$$

用 y 定义函数

$$z(x) = y(x)\frac{dy}{dx}\exp\left\{\int_a^x p_1(x')dx'\right\},$$

证明如果 $p_2(x) \leqslant 0$, 则

$$\frac{dz}{dx} > 0,$$

用此结果证明以下一组关系式

$$y(a)=0,\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}=0,\quad y(c)=0,\quad a<c<b$$

都成立是有矛盾的. 解释这个结论.

2. 设 $y_1(x)$ 表示常微分方程

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}y_1\right)+q(x)y_1=0,\quad p(x)>0,\quad a<x<b$$

的一个特解, 证明这个方程的通解有表示式

$$y(x)=C_1y_1(x)\int_a^x\frac{dx'}{p(x')y_1^2(x')}+C_2y_1(x),$$

其中 C_1,C_2 是两个任意常数. 验证如果 y_1 和 $\frac{dy_1}{dx}$ 在 (a,b) 内的同一点为零, 则 $C_1=0$; 引出适当的结论.

3. 给出一对形式相同的常微分方程

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{d}{dx}y_1\right]-Q(x)y_1=0,\qquad P(x)>0$$

和

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}y_2\right]-q(x)y_2=0,\quad p(x)>0,$$

它们只是系数函数不同. 验证: 如果 y_1,y_2 分别是各个方程的任意解, 则除了 $y_2=0$ 的那些点外有

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left[\frac{y_1}{y_2}\left(P\frac{dy_1}{dx}y_2-py_1\frac{dy_2}{dx}\right)\right]\\&=[q-Q]y_1^2+[P-p]\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2+p\left[\frac{dy_1}{dx}-\frac{y_1}{y_2}\frac{dy_2}{dx}\right]^2.\end{aligned}$$

利用这个关系式得出结论: 第一方程的任一解 y_1 的两相继零点间至少有第二方程每一解 y_2 的一个零点.

容易证实, 函数

$$y_1(x)=\sin(\sqrt{m}\ln\ x),\quad m>0,x>0$$

具有零点

$$x_k=\exp\left(\frac{k\pi}{\sqrt{m}}\right),\quad k=1,2,\cdots$$

且满足常微分方程

$$x^2\frac{d^2y_1}{dx^2}+x\frac{dy_1}{dx}+my_1=0$$

或上面所选形式

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy_1}{dx}\right)-\left(-\frac{m}{x}y_1\right)=0.$$

具有替代形式

$$x^2\frac{d^2y_2}{dx^2}+x(1-x)\frac{dy_2}{dx}+my_2=0$$

的常微分方程

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}x\frac{dy_2}{dx}\right)-\left(-\frac{m}{x}e^{-x}y_2\right)=0$$

其解在 $x>0$ 处的零点有何推论?

4. i) 考虑单个常微分方程

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=0,\quad p(x),q(x)>0$$

且证明每一个无关解在任一解的每一对相继零点之间有一个零点. 函数

$$y_1(x)=a\sin\ x+b\cos\ x,\quad y_2(x)=c\sin\ x+d\cos\ x$$

满足同一个常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0;$$

它们的零点是否总是依上述方式隔开?

ii) 关于常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+xy=0$$

的解的相继零点间的区间, 当 x 较大且为正时, 有何结果?

iii) 试得到带周期系数函数的常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(a+b\cos\ x)y=0$$

的解的有关结果.

5. 对二阶常微分方程

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=0,\quad p(x)>0 \tag{*}$$

的解的一种有用的特征描述曾被 Prüfer, H. (普吕弗) 于 1926 年提出, 依赖于 (*) 和一对一阶常微分方程之间的等价性. 为建立后者, 引入振幅函数和相函数 $r(x), \psi(x)$ 使得

$$y(x) = r(x)\sin\psi(x), \quad p(x)\frac{dy}{dx} = r(x)\cos\psi(x), \tag{**}$$

证实包含其导数的联立线性方程组

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dx}\sin\psi + r\frac{d\psi}{dx}\cos\psi &= \frac{r}{p}\cos\psi, \\ -\frac{dr}{dx}\cos\psi + r\frac{d\psi}{dx}\cos\psi &= qr\sin\psi \end{aligned} \tag{***}$$

的一些细节. 从 (***) 导出表示式

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dx} &= \frac{1}{p(x)}\cos^2\psi + q(x)\sin^2\psi, \\ \frac{dr}{dx} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p(x)} - q(x)\right] r\sin\ 2\psi, \end{aligned} \tag{****}$$

它们构成了完全等价于 (*) 的一个非线性常微分方程组. 值得注意的是: 该方程的第一个方程只涉及 ψ, 且有一个由初始条件

$$\psi(x_0) = C$$

确定的唯一解. r 不可能取零值, 因为

$$r^2 = \left(k\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2,$$

从而可取 $r > 0$; 确定一个 ψ 后, 该方程组的第二个方程提供了对振幅函数 $r(x)$ 的表示式, 即

$$r(x) = r(x_1)\exp\left[\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x}\left(\frac{1}{p(x')} - q(x')\right)\sin\ 2\psi(x')dx'\right].$$

所以, 常微分方程 (*) 的振荡性态可以通过研究相函数 $\psi(x)$ 而阐明. 所定义的方程 (*) 揭示 $y(x)$ 的零点对应于相位值 $\psi_k = k\pi, k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$, 此外, 从 (****) 直接得到推论

$$\frac{d\psi}{dx} > 0 \quad 当 \quad \psi = \psi_k.$$

用最后的不等式证明论断: 如果 $\psi(a) > k\pi$, 则对 $x > a, \psi(x) > k\pi$. 又 $\frac{1}{\pi}\psi(a)$ 和 $\frac{1}{\pi}\psi(b)$ 之间的整数的个数有什么含义?

6. 考虑问题 5 中定义的相函数 $\psi(x), \Psi(x)$, 分别满足常微分方程

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{p(x)} \cos^2 \psi + q(x) \sin^2 \psi$$

和

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{1}{P(x)} \cos^2 \Psi + Q(x) \sin^2 \Psi.$$

假设

$$\frac{1}{P(x)} \geqslant \frac{1}{p(x)}, \quad Q(x) \geqslant q(x)$$

和

$$\psi(a) = \Psi(a);$$

则比较关系式

$$\psi(x) \geqslant \Psi(x), \quad x > a,$$
$$\psi(x) \leqslant \Psi(x), \quad x < a$$

成立.

验证这断言的一种方法始于引入单参数函数族

$$\frac{1}{p_\alpha(x)} = \frac{1}{p(x)} + \alpha \left[\frac{1}{P(x)} - \frac{1}{p(x)} \right],$$
$$q_\alpha(x) = q(x) + \alpha[Q(x) - q(x)], \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

和一个常微分方程

$$\frac{d\psi_\alpha}{dx} = \frac{1}{p_\alpha(x)} \cos^2 \psi_\alpha + q_\alpha(x) \sin^2 \psi_\alpha,$$

其有关解由初始条件

$$\psi_\alpha(a) = \psi(a)$$

确定; 且对参数 $\alpha = 0, 1$, 等式

$$\psi_0(x) = \psi(x), \quad \psi_1(x) = \Psi(x)$$

随之得出.

其次, 设

$$\chi_\alpha(x) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \psi_\alpha(x),$$

证明该函数满足方程

$$\frac{d\chi_\alpha(x)}{dx} = A_\alpha(x) \chi_\alpha + B_\alpha(x), \qquad (*)$$

详述 A_α, B_α 对 $\psi_\alpha, p_\alpha, q_\alpha$ 的依赖性. 用线性常微分方程 (*) 的解连同关系式

$$\Psi(x) - \psi(x) = \psi_1(x) - \psi_0(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\alpha}\psi_\alpha d\alpha = \int_0^1 \chi_\alpha(x) d\alpha$$

去完成比较定理的证明.

第二十六章

边值问题和 Sturm-Liouville 理论

已得到的关于常微分方程的结果为处理偏微分方程及其伴随的边/初值条件的 Fourier 分析的迅速重新开始扫清道路. 专于线性常微分方程解的零点和振荡性态是前一章中最重要的内容, 留下某些其他方面内容在本章讨论, 主要涉及与齐次边值问题相联系的不同的解.

用稍微一般的术语来指出线性微分**方程组**的特征是合适的: 这包括一个 n 阶常微分方程

$$L[y] = p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x)y = f(x), \quad a < x < b \tag{26.1}$$

和 n 个 (常系数的) $y(a), y(b)$ 及 $y(x)$ 的直到 $n-1$ 阶导数在端点 a, b 处的值的线性组合, 即

$$U_i[y] = C_i, \quad i = 1, \cdots, n \tag{26.2}$$

(假定 (26.2) 能包含高阶导数, 且个数可不同于 n). 此后特别有兴趣的是系数依赖于一个参数 (或分离常数) λ 的方程组; 首先必须讨论的问题是齐次方程组 (即, $f(x)$ 和常数 C_i 均为零) 的相容性问题. 给出 $y_1, y_2, \cdots, y_n$, 构成常微分方程: $L[y] = 0$ 的线性无关解的基本组, 相容性条件是用行列式方程

$$\begin{vmatrix} U_1[y_1] & \cdots & U_1[y_n] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_n[y_1] & \cdots & U_n[y_n] \end{vmatrix} = 0 \tag{26.3}$$

来表述的, 因为 y_i 和 (可能) 线性组 U_i 的系数与 λ 有关, 所以它可以更简单地表成

$$F(\lambda) = 0. \tag{26.4}$$

这样, 方程组 (26.1),(26.2) 是相容组当且仅当 λ 的值是函数 F 的根; 这些值称为该组的特征值或本征值. 如果对任一本征值 λ_i, 行列式 (26.3) 的 $n-1$ 阶子式不全为零, 则称此本征值为简单本征值; 如果最高的非零子式是 $n-m$ 阶的, 则称对应的本征值或本征根有重数 m. 基本解组 $y_1, \cdots, y_n$ 的特定选取不影响这些结论的结果; 例如选取不同的基本解组

$$Y_i(x) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} y_j(x), \quad i = 1, \cdots, n$$

(26.4) 的形式改变为

$$|A_{ij}| F(\lambda) = 0,$$

且行列式 $|A_{ij}|$ 必须是非零的.

对某些方程组 F 简化成一 (非零) 常数, 这就蕴涵无本征值, 也无相容性; 一个例子由以下这个方程组提供, 其方程包括

$$L[y] = \frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0, \quad 0 < x < a$$

和

$$\begin{aligned} U_1[y] &= y(0) = 0, \\ U_2[y] &= \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0. \end{aligned} \tag{26.5}$$

应用该常微分方程的基本解组

$$y_1 = \cos \lambda x, \quad y_2(x) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \tag{26.6}$$

到 (26.5) 中, 发现

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

从而不管 λ 取何值, 上述方程组仅有的解是平凡解 $y(x) \equiv 0$.

考虑另一方程组

$$L[y] = \frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0, \quad -a < x < a \tag{26.7}$$

和

$$U_1[y] = y(-a) - y(a) = 0, \quad U_2[y] = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-a} + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = 0.$$

这里用 (26.6) 的基本解组, 特征行列式为

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2\lambda\sin\lambda a & 2\cos\lambda a \end{vmatrix} = 0,$$

且每一个 λ 的值是本征值, 相伴的本征函数为

$$\cos\lambda x.$$

如果 (26.7) 中的边界条件换成周期边界条件, 即

$$U_1[y] = y(-a) - y(a) = 0$$

和

$$U_2[y] = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-a} - \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = 0,$$

则关系式

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & -2\dfrac{\sin\lambda a}{\lambda} \\ 2\lambda\sin\lambda a & 0 \end{vmatrix} = 4\sin^2\lambda a = 0$$

推出存在无穷多本征值

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

它们有重数 2; 与每个本征值对应的线性无关本征函数是

$$\cos\lambda_n x = \cos\frac{n\pi x}{a}, \quad \sin\lambda_n x = \sin\frac{n\pi x}{a}.$$

对于用 n 阶线性算子构成的微分式

$$L[y] = p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x)y, \tag{26.8}$$

有一个极其重要的系统化分析的方法; 它是由 Lagrange (拉格朗日, 1736— 1813) 提出, 首先要做的是求一个乘子 $z(x)$, 使得 $zL[y]$ 等于 $y, \dfrac{dy}{dx}, \cdots, \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ 的线性组合的导数.

通过逐次分部积分后建立的关系式就能清楚地了解对这种性质的确切要求

$$\begin{aligned} \int_a^x zL[y]dx &= \int_a^x z\left\{p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x)y\right\}dx \\ &= P(y,z) + \int_a^x yM[z]dx, \end{aligned} \tag{26.9}$$

这里

$$M[z] = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(p_0 z) + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(p_1 z) + \cdots + p_n z, \tag{26.10}$$

$P(y, z)$ 是包含在积分区间的固定限和变上限的 $4n$ 个量

$$\begin{aligned} & y(a), \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}, \cdots, \left.\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right|_{x=a}, \quad y(x), \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \\ & z(a), \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=a}, \cdots, \left.\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right|_{x=a}, \quad z(x), \frac{dz}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} \end{aligned}$$

的一个**双线性型**. 具体地说, 双线性型的元素是两个不同的 N 变元组的成员, 即

$$x_1, \cdots, x_N,$$
$$y_1, \cdots, y_N.$$

而双线性型由和式

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \cdots + a_{1N}x_1y_N \\ + & a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \cdots + a_{2N}x_2y_N \\ + & \qquad \cdots \\ + & a_{N1}x_Ny_1 + a_{N2}x_Ny_2 + \cdots + a_{NN}x_Ny_N \end{aligned}$$

定义, 且对分别的元素 x_i, y_i 有线性依赖性.

要得到希望的表示式

$$zL[y] = \frac{d}{dx}P(y, z) \tag{26.11}$$

可以从 (26.9) 对 x 微分并且约定乘子 $z(x)$ 必须满足常微分方程

$$M[z] = 0, \tag{26.12}$$

上式称为算子 L 的方程

$$L[y] = 0 \tag{26.13}$$

的**伴随方程**. 这样, 函数 $z(x)$ 作为方程 (26.13) 的积分因子, 把求解的范围缩小到满足 $n-1$ 阶方程

$$P(y, z) = 常数$$

的解, 这里 P 中的 $2n$ 个变量仅仅依赖于 x.

从 (26.9) 导出的恒等式

$$zL[y] - yM[z] = \frac{d}{dx}P(y, z) \tag{26.14}$$

对不必满足 (26.12),(26.13) 的任意可微函数 y, z 都成立, 称为 Lagrange 恒等式; (他也给出积分形式的对应)

$$\int_a^b \{zL[y] - yM[z]\}dx = P(y,z)\Big|_{x=a}^{x=b} \tag{26.15}$$

是 Green 公式的单变量形式 (回顾第二十二章), Green 公式是使平面区域上的一个二重积分等于沿该区域周线的一个曲线积分.

算子 L, M 之间存在互反关系, 即: 如果 M 是 L 的伴随, 则 L 是 M 的伴随. 特别重要的一类算子称为自伴算子, 即 $M = L$ 的那些算子; 比较 (26.8),(26.10) 就知道只有偶数阶算子才具有这种性质. 考虑二阶表示式

$$L[y] = p_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y \tag{26.16}$$

及其伴随, 按照 (26.10)

$$M[z] = p_0(x)\frac{d^2z}{dx^2} + \left\{2\frac{dp_0}{dx} - p_1\right\}\frac{dz}{dx} + \left\{\frac{d^2p_0}{dx^2} - \frac{dp_1}{dx} + p_2\right\}z, \tag{26.17}$$

这里 M 和 L 恒等的充分必要条件是 (26.16) 中的系数必须满足

$$\frac{dp_0}{dx} = p_1. \tag{26.18}$$

虽然表示式 (26.16) 一般不是自伴算子, 乘以因子 (回顾第二十五章)

$$\frac{1}{p_0}\exp\left[\int^x \frac{p_1(x')}{p_0(x')}dx'\right], \quad p_0 \neq 0$$

得到自伴形式, 即

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y, \tag{26.19}$$

它满足条件 (26.18) 是显然的; L 及其伴随

$$M[z] = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dz}{dx}\right) + q(x)z$$

的 Lagrange 恒等式即

$$zL[y] - yM[z] = \frac{d}{dx}\left[p(x)\left(z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right)\right]$$

当系数函数 $p(x)$ 无导数时仍然成立.

与本书后面有关的结果是: 如果L有自伴特征, 则带任意常数 λ 和函数 $q(x)$ 的算子 $L + \lambda q(x)$ 也是自伴的.

以下考虑一个线性齐次微分方程组

$$\begin{aligned} L[y] &= 0, \quad a < x < b, \\ U_i[y] &= 0, \quad i = 1, \cdots, n, \end{aligned} \tag{26.20}$$

其中 U_i 包含 y 及其导数在区间端点处的值, 即

$$\begin{aligned} U_i[y] = &\alpha_{i,1} y(a) + \alpha_{i,2} \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} + \cdots + \alpha_{i,n} \left.\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right|_{x=a} \\ &+ \beta_{i,1} y(b) + \beta_{i,2} \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=b} + \cdots + \beta_{i,n} \left.\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right|_{x=b}; \end{aligned}$$

此外假设 n 个线性式 U_i (数目上与微分算子 L 的阶数相等), 共有 $2n$ 个变元, 是线性无关的. 进一步假设引入 n 个线性式 $U_{n+1}, \cdots, U_{2n}$, 与原来的 $U_1, \cdots, U_n$ 一起构成更大的无关集. 这 $2n$ 个线性式使得量 $y(a), \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}, \cdots, y(b), \cdots, \left.\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right|_{x=b}$ 可用 $U_i, i = 1, \cdots, 2n$ 来表示, 因而 Green 公式 (26.15) 的右边部分允许有一个用 $U_i, V_i, i = 1, \cdots, 2n$ 表示的双线性表示式

$$\begin{aligned} P(y, z)|_{x=a}^{x=b} = &U_1[y] V_{2n}[z] + \cdots + U_n[y] V_{n+1}[z] \\ &+ U_{n+1}[y] V_n[z] + \cdots + U_{2n}[y] V_1[z], \end{aligned} \tag{26.21}$$

这里 V_i 称为边界算子 U_i 的伴随算子, 也构成无关集.

由

$$\begin{aligned} M[z] &= 0, \quad a < x < b, \\ V_i[z] &= 0, \quad i = 1, \cdots, n \end{aligned} \tag{26.22}$$

定义的一组方程称为 (26.20) 的伴随方程组; 引用表示式 (26.21) 后, Green 公式 (26.15) 变成

$$\begin{aligned} \int_a^b \{zL[y] - yM[z]\} dx = &U_1[y] V_{2n}[z] \\ &+ U_2[y] V_{2n-1}[z] + \cdots + U_{2n}[y] V_1[z]. \end{aligned} \tag{26.23}$$

由于线性式 $U_{n+1}, \cdots, U_{2n}$ 不是唯一确定的, 只要求 $U_1, U_2, \cdots, U_{2n}$ 构成无关集, 线性式 $V_1, \cdots, V_n$ 也有类似任意性; 然而 $U_{n+1}, \cdots, U_{2n}$ 的指定的改变结果仅是生成线性式 $V_1, \cdots, V_n$ 的一个新集合, 它们是老的式子的简单线性组合. 这样 $V_1, \cdots, V_n$ 仅被 $U_1, \cdots, U_n$ 所确定, 且能确切地定义齐次伴随方程组.

一个完全自伴方程组满足

$$M = L$$

且 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 是 $U_1, U_2, \cdots, U_n$ 的线性组合, 允许选择 $V_i = U_i, i = 1, \cdots, n$; 且 Green 公式 (26.23) 右边部分为零. 作为例子, 考虑具有自伴算子 L 的二阶方程组

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y, \quad a < x < b,$$
$$U_1[y] = \alpha y(a) + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = 0, \quad U_2[y] = y(b) = 0; \tag{26.24}$$

为确定边界算子 V_1, V_2, 注意

$$\begin{aligned}
\int_a^b zL[y]dx &= \int_a^b z\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y\right]dx \\
&= p(b)\left\{z(b)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=b} - y(b)\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=b}\right\} \\
&\quad + p(a)\left\{y(a)\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=a} - z(a)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}\right\} + \int_a^b yM[z]dx \\
&= -p(a)z(a)\left\{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} + \alpha y(a)\right\} + p(a)\left\{\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=a} + \alpha z(a)\right\}y(a) \\
&\quad + p(b)z(b)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=b} - p(b)y(b)\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=b} + \int_a^b yM[z]dx \\
&= -p(a)z(a)U_1[y] - p(b)\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=b}U_2[y] \\
&\quad + z(b)U_3[y] + \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=a} + z(a)U_4[y] + \int_a^b yM[z]dx,
\end{aligned} \tag{26.25}$$

这时就可作出选择

$$U_3[y] = p(b)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=b}, \quad U_4[y] = p(a)y(a).$$

令

$$V_1[z] = \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=a} + \alpha z(a), \quad V_2[z] = z(b),$$
$$V_3[z] = -p(b)\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=b}, \quad V_4[z] = -p(a)z(a),$$

则上面的关系式具有型为 (26.23) 的 Green 公式, 且根据恒等式

$$V_1[z] = U_1[z], \quad V_2[z] = U_2[z]$$

就证明了该方程组的自伴性.

以下, 设方程组 (26.24) 的边界条件换成更一般的一对边界条件,

$$U_1[y]=\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y(b)+\alpha_3 \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}+\alpha_4 \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=b}=0$$

和

$$U_2[y]=\beta_1 y(a)+\beta_2 y(b)+\beta_3 \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}+\beta_4 \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=b}=0,$$

如果矩阵

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4\end{pmatrix}$$

的秩为 2, 则它们是线性无关的. 定义

$$\gamma_{ij}=\alpha_i\beta_j-\alpha_j\beta_i$$

且假设譬如 $\gamma_{12}\neq 0;U_3,U_4$ 的选择, 原来假定是任意的, 由于

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0,$$

它们可用式子

$$U_3[y]=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a},\quad U_4[y]=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=b}$$

来确定.

那么 Green 公式

$$\int_a^b\{zL[y]-yM[z]\}dx=U_1V_4+U_2V_3+U_3V_2+U_4V_1$$

包含边界算子

$$V_1[z]=\frac{1}{\gamma_{12}}\left[p(b)\gamma_{12}z(b)+p(a)\gamma_{24}\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=a}+p(b)\gamma_{14}\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=b}\right],\tag{26.26}$$

$$V_2[z]=\frac{1}{\gamma_{12}}\left[-p(a)\gamma_{12}z(a)+p(a)\gamma_{23}\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=a}+p(b)\gamma_{13}\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=b}\right]\tag{26.27}$$

和更简单的 V_3,V_4, 它们不含 $z(a)$ 或 $z(b)$.

两个方程组

$$\begin{aligned}&L[y]=0,\quad M[z]=0,\quad a<x<b,\\ &U_i[y]=0,\quad V_i[z]=0,\quad i=1,2\end{aligned}$$

的自伴性的必要条件是各个式子 $V_1[z], V_2[z]$ 是 $U_1[z]$ 和 $U_2[z]$ 的线性组合. 因为 $z(a)$ 不出现在 $V_1[z]$ 中, 把 $z(a)$ 从 $U_1[z], U_2[z]$ 中消去, 由此得出方程

$$\begin{aligned}\beta_1 U_1[z] - \alpha_1 U_2[z] &= \gamma_{21} z(b) + \gamma_{31} \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=a} + \gamma_{41} \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=b} \\ &= -\left[\gamma_{12} z(b) + \gamma_{13} \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=a} + \gamma_{14} \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=b}\right],\end{aligned}$$

将上式和 (26.26) 的变形

$$-\frac{\gamma_{12} V_1[z]}{p(b)} = -\left[\gamma_{12} z(b) + \frac{p(a)}{p(b)} \gamma_{24} \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=a} + \gamma_{14} \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=b}\right]$$

相比较, 如果

$$\gamma_{24} p(a) = \gamma_{13} p(b), \tag{26.28}$$

则建立了 V_1 与 U_1 和 U_2 之间所要求的关系式. 其次从 $U_1[z], U_2[z]$ 消去 $z(b)$, 其结果

$$\beta_2 U_1[z] - \alpha_2 U_2[z] = \gamma_{12} z(a) + \gamma_{32} \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=a} + \gamma_{42} \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=b}$$

和 V_2 的表示式

$$-\frac{\gamma_{12} V_2[z]}{p(a)} = \gamma_{12} z(a) + \gamma_{32} \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=a} + \frac{p(b)}{p(a)} \gamma_{31} \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=b}$$

相一致, 如果

$$\gamma_{42} p(a) = \gamma_{31} p(b),$$

此式等价于 (26.28). 由 (26.28) 规定的必要条件当 $\gamma_{12} = 0$ 时也成立, 因此可以看成是一般的条件.

值得注意的是: 如果各个边界条件附加在单个的端点上, 因而把函数与其导数的值在同一点 ($x = a$ 或 $x = b$) 联系起来, 则 $\gamma_{13} = 0$ 和 $\gamma_{24} = 0$; 从而对应边界算子必然是自伴的.

假设包含有参数 λ 的齐次方程组,

$$\begin{gathered} L[y] + \lambda \rho(x) y = 0, \quad a < x < b, \\ U_i[y] = 0, \quad i = 1, \cdots, n \end{gathered} \tag{26.29}$$

容许有与本征值 λ_m, λ_n 相联系的解 (或本征函数) $y_m(x), y_n(x)$; 同样的本征值集合是满足伴随方程组

$$\begin{gathered} M[z] + \lambda \rho(x) z = 0, \quad a < x < b, \\ V_i[z] = 0, \quad i = 1, \cdots, n \end{gathered} \tag{26.30}$$

的本征函数 $z_m(x), z_n(x)$ 的本征值. 将 $y = y_m, z = z_m$ 代入 Green 公式的合适变形中, 即

$$\int_a^b \{z_n L[y_m] - y_m M[z_n]\} dx = 0,$$

用关系式

$$L[y_m] = -\lambda_m \rho(x) y_m, \quad M[z_n] = -\lambda_n \rho(x) z_n$$

去推导出

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b \rho(x) y_m(x) z_n(x) dx = 0,$$

或, 如果 $\lambda_m \neq \lambda_n$

$$\int_a^b \rho(x) y_m(x) z_n(x) dx = 0, \quad m \neq n. \tag{26.31}$$

因此, 方程组 (26.29) 和其伴随方程组 (26.30) 的匹配有不同本征值的两个本征函数关于**权函数** $\rho(x)$ 是正交的.

特别地, 自伴方程组的对应于不同本征值的本征函数构成一个正交集, 即

$$\int_a^b \rho(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0, \quad m \neq n, \tag{26.32}$$

且当 $\rho(x) > 0$ 时, 它们能按要求

$$\int_a^b \rho(x) y_n^2(x) dx = 1 \tag{26.33}$$

规范化.

容易证明如果在整个 $a < x < b$ 上 $\rho(x) > 0$ 或 < 0, 则自伴方程组

$$\begin{gathered} L[y] + \lambda\rho(x) y = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (q(x) + \lambda\rho(x)) y = 0, \quad a < x < b, \\ U_i[y] = 0, \quad i = 1, 2 \end{gathered} \tag{26.34}$$

只有实本征值. 假设存在复值形式的本征值和本征函数

$$\lambda = \mu + i\nu, \quad y(x) = \xi(x) + i\eta(x),$$

将它们代入 (26.34); 所得方程的实部和虚部分离后发现函数 $\xi(x), \eta(x)$ 满足联立方程组

$$\begin{aligned} L[\xi] + \rho(x)\{\mu\xi(x) - \nu\eta(x)\} = 0, \quad U_i[\xi] = 0, \quad i = 1, 2, \\ L[\eta] + \rho(x)\{\mu\eta(x) + \nu\xi(x)\} = 0, \quad U_i[\eta] = 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

两者联合起来且借助于 Green 公式化简, 推导出

$$\int_a^b \{\eta L[\xi] - \xi L[\eta]\} dx = \nu \int_a^b \rho(x)[\xi^2(x) + \eta^2(x)] dx$$
$$= P(\xi, \eta) = U_1[\xi]U_2[\eta] + U_2[\xi]U_1[\eta] = 0.$$

由于对该方程组的非平凡解或本征函数 $\xi^2 + \eta^2 \neq 0$, 若 $a < x < b$ 内处处成立, $\rho(x) \geqslant 0$ 时, 则 ν 的值为零, 因此本征值为实数; 这个结果对具 n 阶微分算子的自伴方程组也成立.

为建立关于方程组 (26.34) 的本征值的另一命题, 用 $y(x)$ 乘该常微分方程且在 $a < x < b$ 上积分, 分部积分后, 给出关系

$$\lambda \int_a^b \rho(x) y^2(x) dx = \Delta + \int_a^b \left[q(x) y^2(x) + p(x) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx,$$

这里

$$\Delta = -p(x) y \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}^{x=b} = p(a) y(a) \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=a} - p(b) y(b) \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=b};$$

因此, 如果

$$p(x) > 0, \quad q(x) \geqslant 0, \quad \rho(x) > 0, \quad a < x < b$$

且

$$\Delta > 0,$$

则所有本征值是正的. 特别地, 给出边界条件

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} - h y(a) = 0, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=b} + H y(b) = 0, \tag{26.35}$$

如果 $h, H > 0$, 则由此得出

$$\Delta = h p(a) y^2(a) + H p(b) y^2(b) > 0$$

满足正本征值准则. 事实上, 这些本征值与通过一根杆的各端点 $x = a, b$ 向外散热而冷却的问题有关, 散热与在端点的温度成比例; 其正散热量推导出沿杆的热传导的偏微分方程的特解都随时间指数衰减.

有一种值得注意的改写边界条件 (26.35) 的方式, 对 h, H 的符号无任何规定, 即:

$$\cos \alpha y(a) - p(a) \sin \alpha \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = 0 \tag{26.36}$$

和

$$\cos\ \beta y(b) - p(b)\sin\beta \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=b} = 0,$$

这里一对实数 α,β 现在用来定义系数. 由于采用 Prüfer 变量 $r(x),\psi(x)$ (见习题 25, 问题 4) 使得

$$y(x) = r(x)\cos\psi(x), \quad p(x)\frac{dy}{dx} = r(x)\sin\psi(x),$$

当 $y(x)$ 满足常微分方程 (26.34) 时, 相函数 $\psi(x)$ 被一阶常微分方程

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{p(x)}\cos^2\psi + (q(x) + \lambda\rho(x))\sin^2\psi \tag{26.37}$$

所确定, 且边界条件简单地变成

$$\begin{aligned}\tan\psi(a) &= \tan\alpha,\\ \tan\psi(b) &= \tan\beta.\end{aligned} \tag{26.38}$$

指定

$$\psi(a) = \alpha$$

遵从 (26.38) 的第一个关系式, 且不管 λ 的值如何, 选取了 (26.37) 的一个唯一解 $\psi(x,\lambda)$; 再从第二个关系式导出对 λ 的本征值方程, 即

$$\psi(b,\lambda) = \beta + n\pi, \quad n \text{ 为整数}. \tag{26.39}$$

依赖相函数 $\psi(x,\lambda)$ 的性质, 即作为 λ 的函数它的持续增长性和对 x 的连续性, 从 (26.39) 推导出存在与整数 $n = 0, 1\cdots$, 对应的本征值的无穷集

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \cdots$$

对应的本征函数有形式

$$y_n(x) = r_n(x)\cos\psi(x,\lambda_n),$$

此外, $y_n(x)$ 在区间 (a,b) 上恰好有 n 个零点.

与常微分方程的齐次线性组方程有关问题的这个简单回顾说明了它们的某些一般特征且给出多种个别例子的细节; 这两方面都证明处于偏微分方程中心的边值问题的广义 Fourier 分析具有极大的重要性. 与常微分方程对应的非齐次方程组有关的结果在 Fourier 分析中也非常重要, 是以下习题中某些问题的主题.

习　题　26

1. a) 证明二阶方程组

$$L[y] = \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad a < x < b,$$

$$U_1[y] = y(b) - y(a) = 0, \quad U_2[y] = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=b} - \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = 0$$

是自伴的.

b) 证明四阶方程组

$$L[y] = \frac{d^4y}{dx^4} + q(x)y = 0, \quad a < x < b,$$

$$U_1[y] = y(a) = 0, \quad U_2[y] = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = 0,$$

$$U_3[y] = \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=b} = 0, \quad U_4[y] = \left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=b} = 0$$

是自伴的.

2. 给出二阶自伴常微分方程

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = 0, \quad a < x < b$$

和边界条件

$$U_1[y] = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} - \alpha_1 y(a) - \alpha_2 y(b) = 0,$$

$$U_2[y] = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=b} - \beta_1 y(a) - \beta_2 y(b) = 0$$

的齐次方程组, 这些边界条件表示在变量 x 的范围各端点处的导数是函数 $y(x)$ 在两端点取值的一个线性组合. 试决定伴随边界条件且验证自伴性条件

$$\alpha_2 p(a) + \beta_1 p(b) = 0.$$

注意当

$$\alpha_2 = -4, \quad \beta_1 = 1, \quad p(x) = x^2, \quad 1 < x < 2$$

满足上面的条件, 研究自伴组

$$L[y]+\lambda y=\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right)+\lambda y=0,\quad 1<x<2,$$

$$U_1[y]=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}-\alpha_1 y(1)+4y(2)=0,$$

$$U_2[y]=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}-y(1)-\beta_2 y(2)=0$$

的本征函数和本征值; 证明对应于不同本征值的本征函数正交关系式

$$\int_1^2 y_m(x)y_n(x)dx=0,\quad m\neq n$$

成立.

3. 如果方程

$$L[y]=x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+(2+\lambda^2x^2)y=0,\quad a<x<b \tag{$*$}$$

和

$$U_1[y]=y(a)=0,\quad U_2[y]=y(b)=0$$

定义一个齐次线性方程组, 验证 L 的伴随算子有形式

$$\begin{aligned}M[z]&=\frac{d^2}{dx^2}(x^2z)+2\frac{d}{dx}(xz)+(2+\lambda^2x^2)z\\&=x^2\frac{d^2z}{dx^2}+6x\frac{dz}{dx}+(6+\lambda^2x^2)z\end{aligned}$$

且找出伴随边界算子 $V_1[z],V_2[z]$. 给出

$$y_1(x)=x\sin\lambda(x-a),\quad y_2(x)=x\cos\lambda(x-a),$$

构成常微分方程: $L[y]=0$ 的基本解组, 求方程组 $(*)$ 的本征函数和本征值的显式表示式. 验证

$$z_1(x)=x^{-3}\sin\lambda(x-a),\quad z_2(z)=x^{-3}\cos\lambda(x-a)$$

提供了常微分方程: $M[z]=0$ 的一个基本解组, 且描述伴随于 $(*)$ 的方程组的本征函数和本征值. 检验涉及各方程组的本征函数的双正交性关系式和它们的本征值的恒等式. 常微分方程: $L[y]=0$ 的自伴方程是什么?

4. 在假设 $\alpha, \beta \geqslant 0$ 条件下, 分析方程组

$$L[y] + \lambda y = \frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$U_1[y] = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} - \alpha y(0) = 0, \quad U_2[y] = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=l} + \beta y(l) = 0,$$

且对正常解建立表示式

$$y_n(x) = \cos(k_n x - \delta_n),$$

$$k_n l = \mu_n + \nu_n + n\pi, \quad \lambda_n = k_n^2,$$

这里

$$\mu_n = \tan^{-1}\frac{\alpha}{k_n}, \quad \nu_n = \tan^{-1}\frac{\beta}{k_n}, \quad n = 0, 1, \cdots$$

验证论断: k_n 是 α, β 的增函数且在每一区间

$$\left(\frac{n\pi}{l}, \frac{(n+1)\pi}{l}\right), \quad n = 0, 1, \cdots$$

有唯一的本征值. 研究下列各对系数值 $\alpha = \beta = 0, \alpha = 0, \beta = \infty, \alpha = \infty, \beta = 0, \alpha = \beta = \infty$ 所确定的极限情形, 且对大的 n 导出估计

$$k_n l = n\pi + \frac{(\alpha + \beta)}{n\pi} + 0\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

5. 考虑自伴方程组

$$L[y] + \lambda y = \frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \quad -\pi < x < +\pi,$$

$$U_1[y] = \alpha y(-\pi) - \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-\pi} = 0, \quad U_2[y] = \alpha y(\pi) + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\pi} = 0;$$

且证明有两个不同的本征函数集合, 即

$$y_n(x) = \cos \lambda_n x$$

和

$$y_m(x) = \cos \lambda_m x,$$

依 λ 满足本征值方程

$$\alpha \cos \lambda_n \pi - \lambda_n \sin \lambda_n \pi = 0,$$

或

$$\alpha \sin \lambda_m \pi - \lambda_m \cos \lambda_m \pi = 0.$$

6. 证明常微分方程

$$L[y]=2x\frac{d^2y}{dx^2}+(3-2x)\frac{dy}{dx}+2\lambda y=0$$

当 λ 取正整数时容许有多项式解 $y_n(x)$. 改写这方程成自伴形式且证明 $y_m(x),y_n(x),m\neq n$ 在无界区间 $(0,\infty)$ 上关于一个确定的权函数正交.

7. 给定常微分方程

$$L[y]=p_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+p_1(x)\frac{dy}{dx}+p_2(x)y=0,\quad a<x<b,$$

证明: 存在满足周期边界条件

$$y(a)=y(b),\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=b}$$

的解的必要条件是

$$\int_a^b\frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx=0.$$

8. 线性依赖于 λ 且包含两个不同线性算子 $L,\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$ 的阶低于 L 的阶) 的常微分方程

$$L[y]+\lambda\mathcal{L}[y]=0;\quad a<x<b \tag{$*$}$$

表示以前所取形式的一种推广, 其中 $\mathcal{L}[y]=y$. 设 $M,\mathcal{M}$ 表示 $L,\mathcal{L}$ 的伴随算子, 因此不管 λ 取何值

$$M[z]+\lambda\mathcal{M}[z]=0 \tag{$**$}$$

是 $(*)$ 的伴随方程. $(*),(**)$ 连同适当的齐次边界条件的两个方程组是伴随方程组, 如果包含边界算子的双线性型 $P(y,z)$ 对任何 λ 都为零; 而且有

$$\int_a^b[z\{L[y]+\lambda\mathcal{L}[y]\}-y\{M[z]+\lambda\mathcal{M}[z]\}]dx=0.$$

设

$$L[y_m]+\lambda_m\mathcal{L}[y_m]=0$$

和

$$M[z_n]+\lambda_n\mathcal{M}[z_n]=0,$$

描述这两个伴随方程组各自的本征函数 $y_m(x), z_n(x)$; 试建立本征函数的正交关系式, 且讨论自伴方程组的特殊情形. 试对特殊的方程组

$$L[y] + \lambda\mathcal{L}[y] = \frac{d^4y}{dx^4} + \lambda\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$U_1[y] = y(0) = 0, \quad U_2[y] = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0,$$

$$U_3[y] = y(1) = 0, \quad U_4[y] = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0,$$

阐明上述结论.

9. 弹性对杆的热传导的影响反映在关于温度 $u(x,t)$ 和杆的横截面的纵向位移 $v(x,t)$ 的一个偏微分方程组中,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}, \quad c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \tag{i}$$

这里第一个方程或修正扩散方程包含一项其效应是为了提高与相邻截面间的相对压缩 $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 成比例的局部热容量, 而第二个方程说明了热流量与弹性应力之间的比例关系. 假设在杆的两端点 $x = 0, l$, 满足齐次边界条件,

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0$$

和

$$v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0, \quad t > 0;$$

由于 u 和 v 的时间变化必须同步, 记

$$u(x,t) = \varphi(x)e^{-k\alpha^2 t}, v(x,t) = \psi(x)e^{-k\alpha^2 t}, \tag{ii}$$

然后从 (i) 消去时间变量 t, $\varphi(x), \psi(x)$ 的耦合常微分方程组成为

$$-k\alpha^2\varphi = k\frac{d^2\varphi}{dx^2} + k\alpha^2\mu^2\frac{d\psi}{dx}, \quad c^2\frac{d^2\psi}{dx^2} - \nu\frac{d\varphi}{dx} = 0. \tag{iii}$$

后者的第一次积分, 分别为定积分和不定积分, 当应用边界条件

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0$$

得出

$$-\alpha^2\int_0^l \varphi(x)dx = \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=0}^{x=l} \tag{iv}$$

和

$$c^2\frac{d\psi}{dx}=c^2\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=0}+\nu\varphi. \tag{v}$$

此外, 由关系式 (v) 推导出

$$\nu\int_0^l\varphi(x)dx=-c^2l\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=0},$$

因此 (iv),(v) 可联合起来给出

$$\frac{d\psi}{dx}=\frac{\nu\varphi}{c^2}-\frac{\nu}{c^2l}\int_0^l\varphi(x)dx=\frac{\nu\varphi}{c^2}+\frac{\nu}{\alpha^2c^2l}\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=0}^{x=l}. \tag{vi}$$

其次, 从 (iii) 的第一个方程消去 $\dfrac{d\psi}{dx}$, 由此得出 $\varphi(x)$ 满足齐次常微分方程

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\lambda^2\varphi=-\tau\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=0}^{x=l},\quad 0<x<l, \tag{vii}$$

这里

$$\lambda^2=\alpha^2\left(1+\nu\frac{\mu^2}{c^2}\right),\quad \tau=\frac{\mu^2\nu^2}{c^2l}.$$

在 $\varphi(x)$ 关于杆的中点 $x=l/2$ 对称的情形, 即

$$\varphi(x)=\varphi(l-x),$$

则

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=l}=-\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=0},\quad \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=l/2}=0;$$

因而只要考虑范围 $0<x<l/2$ 就足够了. 这里对 $\varphi(x)$ 的方程组包括

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\lambda^2\varphi=2\tau\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=0},\quad 0<x<l/2 \tag{viii}$$

和

$$\varphi(0)=0,\quad \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=l/2}=0.$$

描述这个方程组的本征函数 $\varphi_n(x)$ 和本征值 λ_n 以及常微分方程

$$\frac{d^2\xi}{dx^2}+\lambda^2\xi=0,\quad 0<x<l/2$$

和适当边界条件的伴随问题的本征函数和本征值; 双正交性关系式

$$\int_0^{l/2}\varphi_m(x)\xi_n(x)dx=0,\quad \lambda_m\neq\lambda_n$$

是否满足?

10. 给定非齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \cdots, n \tag{i}$$

并假设相关的齐次方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}y_j = 0, \quad i = 1, \cdots, n \tag{ii}$$

的非平凡解 $y_j, j = 1, \cdots, n$ 存在, 这里 (ii) 的系数矩阵 (a_{ji}) 是原矩阵 (a_{ij}) 的转置或伴随, (i) 乘以 y_i 再对 i 求和, 由 (ii) 得出

$$\sum_{i,j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i = \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ji} y_j = 0;$$

所以 (i) 的解的存在性有一个相容性条件,

$$\sum_{i=1}^{n} b_i y_i = 0, \tag{iii}$$

其中伴随方程组 (ii) 起了作用.

以下考虑非齐次线性微分方程组

$$L[y] = f(x), \quad a < x < b, \tag{iv}$$

$$U_i[y] = \gamma_i, \quad i = 1, \cdots, n$$

和它的对应的齐次伴随方程组, 即

$$M[z] = 0, \quad a < x < b, \tag{v}$$

$$V_i[z] = 0, \quad i = 1, \cdots, n;$$

推导出 (iv) 有解的相容性条件

$$\int_a^b f(x)z(x)dx = \gamma_1 V_{2n}[z] + \cdots + \gamma_n V_{n+1}[z], \tag{vi}$$

这里 $z(x)$ 表示 (v) 的任一非平凡解. 为了证明这个条件的充分性, 设 $\overline{y}(x)$ 使得 $L[\overline{y}] = f(x)$, 且 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ 构成 $L[y] = 0$ 的一个基本解组; 验证 Green 公式的推论

$$\sum_{i=1}^{n} \{U_i[\overline{y}] - \gamma_i\} V_{2n+1-i}[z] = 0$$

和

$$\sum_{i=1}^{n} U_i[y_j]V_{2n+1-i}[z] = 0, \quad j = 1, \cdots, n$$

即 V_i 的 $n+1$ 个方程的线性方程组, 其秩不能超过 $n-1$, 这样保证了微分方程组 (iv) 的相容性.

必须指出 (vi) 要求确定边界算子 $V_{n+1}, \cdots, V_{2n}$ 而不是给定的边界算子 $U_1, \cdots, U_n$ 的伴随算子集合 $V_1, \cdots, V_n$; 当方程组 (iv) 的边界条件是齐次的, 从而 $\gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 0$ 的特殊情形时, 就不用这样做了.

11. 考虑质量为 m 的一个质点受随时间变化的力 $f(t)$ 作用下运动的 Newton 方程

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = f(t), \quad t > 0, \tag{i}$$

这里 $y(t)$ 等于离一固定点或参照点的位移. (i) 的首次积分和第二次积分用函数

$$F(t) = \int_0^t f(t)dt$$

表示成

$$m\frac{dy}{dt} = F(t) + m\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}$$

和

$$my(t) = \int_0^t F(t')dt' + mt\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} + my(0).$$

分部积分给出

$$\int_0^t F(t')dt' = tF(t) - \int_0^t t'\frac{dF}{dt'}dt' = tF(t) - \int_0^t t'f(t')dt'$$

或

$$\int_0^t F(t')dt' = \int_0^t (t-t')f(t')dt',$$

因此 (i) 的通解

$$y(t) = y(0) + t\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} + \frac{1}{m}\int_0^t (t-t')f(t')dt', \quad t > 0 \tag{ii}$$

包含位置的任意初值 $y(0)$ 和速度的任意初值 $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0}$

设

$$y(0) = 0, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0 \tag{iii}$$

具体确定了初始条件且假设在时刻 $T > 0$ 指定

$$y(T) = 0, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=T} = 0; \tag{iv}$$

检查 (i),(iii),(iv) 的伴随方程组且求得相容性条件. 就通解 (ii) 来讨论这些相容性条件且用物理术语解释这些结果.

12. 关于一非均匀 (可变横截面) 杆受横向负载力 $f(x)$ 支配的静载挠度 $y(x)$ 的四阶方程是

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[I(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right] = f(x), \quad 0 < x < l, \tag{i}$$

这里 $I(x)(> 0)$ 表示惯性矩或弹性测度. 设 (i) 换成一对联立的二阶常微分方程, 即

$$I(x)\frac{d^2y}{dx^2} - z(x) = 0, \tag{ii}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = f(x),$$

且假设

$$z(0) = 0, \quad z(l) = 0, \quad \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=l} = 0 \tag{iii}$$

是对具有两自由端的边界条件. 求由两个函数 $u(x), v(x)$ 构成的伴随方程组的细节. 研究相容性条件问题.

其次, 假设方程 (i) 换成四个一阶常微分方程组成的方程组, 即

$$-\frac{dy_4}{dx} = f(x),$$

$$-\frac{dy_3}{dx} - y_4 = 0,$$

$$\frac{dy_2}{dx} - \frac{y_3}{I(x)} = 0$$

和

$$\frac{dy_1}{dx} - y_2 = 0,$$

这里

$$y(x) = y_1(x).$$

给定端点固定的杆的边界条件

$$y_1(0) = y_1(l) = y_2(0) = y_2(l) = 0,$$

导出其伴随方程组的详情并评论其性质.

第二十七章

Green 函数和边值问题

有另一种重新表述 Sturm-Liouville 型问题的极其重要的方法值得我们来讲述, 尽管该方法突出的是*积分方程*而不是微分方程. 与物理或技术现象有关的偏微分方程是以局部形式对定律或性质的表示, 因为导数的出现就表明了这一点, 而且为构成一个有明确定义的问题还需要补充在所考虑区间端点处的边界条件. 说明该物理系统与它周围的环境之间的相互作用的不同的边界条件可以和共同的偏微分方程结合在一起. 与此对比, 系统的整个范围或区间显然是通过积分方程的积分限来表示的, 而且边界条件已经融入积分方程中了; 边界条件的变化反映在该系统的描述量的称为积分方程的核的一个确定的函数的变化中. 这样, 积分方程的表述包括了问题所规定的所有特征, 并提供了对其进行分析的有效的方法. 实际上, 这种方法的系统研究早在 20 世纪初就开始了, 尽管在更早的时候数学家就有能力掌握这些方法.

以英国数学家 George Green (乔治 · 格林, 1793 — 1841) 命名的一种特殊的函数特别适合于建立积分方程, 而且可以就二阶线性自伴常微分方程

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = 0, \quad a < x < b \tag{27.1}$$

和相伴的 Green 公式

$$\int_a^b \{zL[y] - yL[z]\}dx = p(x)\left(z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right)\Big|_{x=a}^{x=b} \tag{27.2}$$

来引入. 如果 y 和 z 是 (27.1) 的光滑 (二次可微) 解, 则 (27.2) 的左边为零, 而且显然有连续的 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\dfrac{dz}{dx}$.

以下设 y 和 z 的一阶导数在 $a<x<b$ 内分离的位置 ξ,η 分别有不连续性; 特别假设

$$a<\xi<\eta<b.$$

为处理 (27.2) 的右边, 有必要把区间 $a<x<b$ 分成三个分离部分且有

$$P(y,z)\Big|_{x=a}^{x=b}=\lim_{\epsilon\to 0}\left[P\Big|_{x=a}^{x=\xi-\epsilon}+P\Big|_{x=\xi+\epsilon}^{x=\eta-\epsilon}+P\Big|_{x=\eta+\epsilon}^{x=b}\right],$$

其中 $p(y,z)=p(x)\left(z\dfrac{dy}{dx}-y\dfrac{dz}{dx}\right)$, 而左边的积分不需改写. 从表示式

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}P\Big|_{x=a}^{x=\xi-\epsilon}&=p(\xi)\left[z(\xi)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\xi-0}-y(\xi)\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=\xi}\right]-P\Big|_{x=a},\\
\lim_{\epsilon\to 0}P\Big|_{x=\xi+\epsilon}^{x=\eta-\epsilon}&=p(\eta)\left[z(\eta)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\eta}-y(\eta)\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=\eta-0}\right]\\
&\quad-p(\xi)\left[z(\xi)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\xi+0}-y(\xi)\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=\xi}\right],\\
\lim_{\epsilon\to 0}P\Big|_{x=\eta+\epsilon}^{x=b}&=P\Big|_{x=b}-p(\eta)\left[z(\eta)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\eta}-y(\eta)\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=\eta+0}\right]
\end{aligned}\tag{27.3}$$

导出 (27.2) 所需要的形式是

$$\begin{aligned}
\int_a^b\{zL[y]-yL[z]\}dx&=p(x)\left(z\frac{dy}{dx}-y\frac{dz}{dx}\right)\Big|_{x=a}^{x=b}\\
&\quad-p(\xi)z(\xi)\left[\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\xi+0}-\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\xi-0}\right]\\
&\quad+p(\eta)y(\eta)\left[\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=\eta+0}-\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=\eta-0}\right],
\end{aligned}\tag{27.4}$$

显然容许 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\dfrac{dz}{dx}$ 有不连续性状.

用 $y_1(x),y_2(x)$ 表示常微分方程 (27.1) 的一对无关的连续可微解且考虑确定在整个 $a<x<b$ 上连续而其一阶导数在区间中的一个点 $x=\xi$ 有规定量 Δ 的不连续性的通解. 记

$$\begin{aligned}
y(x)&=(C_1-\alpha_1)y_1(x)+(C_2-\alpha_2)y_2(x),\quad x\leqslant\xi,\\
y(x)&=(C_1+\alpha_1)y_1(x)+(C_2+\alpha_2)y_2(x),\quad x\geqslant\xi,
\end{aligned}\tag{27.5}$$

和加在 $y(x)$ 上的条件一起得出关系式

$$(C_1-\alpha_1)y_1(\xi)+(C_2-\alpha_2)y_2(\xi)=(C_1+\alpha_1)y_1(\xi)+(C_2+\alpha_2)y_2(\xi),$$
$$(C_1-\alpha_1)\left.\frac{dy_1}{dx}\right|_{x=\xi}+(C_2-\alpha_2)\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=\xi}$$
$$=(C_1+\alpha_1)\left.\frac{dy_1}{dx}\right|_{x=\xi}+(C_2+\alpha_2)\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=\xi}-\Delta,$$

或更简单地有

$$\alpha_1y_1(\xi)+\alpha_2y_2(\xi)=0,$$
$$\alpha_1\left.\frac{dy_1}{dx}\right|_{x=\xi}+\alpha_2\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=\xi}=\frac{\Delta}{2}.$$

所以

$$\alpha_1=\frac{-\Delta y_2(\xi)}{2\left[y_1(\xi)\left.\dfrac{dy_2}{dx}\right|_{x=\xi}-y_2(\xi)\left.\dfrac{dy_1}{dx}\right|_{x=\xi}\right]},$$
$$\alpha_2=\frac{\Delta y_1(\xi)}{2\left[y_1(\xi)\left.\dfrac{dy_2}{dx}\right|_{x=\xi}-y_2(\xi)\left.\dfrac{dy_1}{dx}\right|_{x=\xi}\right]},$$

且 (27.5) 可统一成一个表示式

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\mathcal{G}(x,\xi),\tag{27.6}$$

这里 C_1, C_2 表示任意常数, 且

$$\mathcal{G}(x,\xi)=\pm\frac{\Delta}{2}\frac{y_2(\xi)y_1(x)-y_1(\xi)y_2(x)}{y_1(\xi)\left.\dfrac{dy_2}{dx}\right|_{x=\xi}-y_2(\xi)\left.\dfrac{dy_1}{dx}\right|_{x=\xi}},\quad \begin{matrix}x\leqslant\xi\\ x\geqslant\xi\end{matrix}\tag{27.7}$$

是具有性质

$$L[\mathcal{G}(x,\xi)]=0,\quad x\neq\xi,$$
$$\mathcal{G}(\xi,\xi)=0,\quad \frac{d}{dx}\mathcal{G}(x,\xi)\Bigg|_{x=\xi-0}^{x=\xi+0}=\frac{\Delta}{2}-\left(-\frac{\Delta}{2}\right)=\Delta$$

的一个函数.

表示式 (27.6) 所刻画的常微分方程 (27.1) 的解称为 Green 函数, 在选择

$$\Delta=\frac{1}{p(\xi)}$$

后给出特殊的两个自变量的表示式

$$y = G(x, \xi).$$

考虑一对 Green 函数

$$y = G(x, \xi) \quad 和 \quad z = G(x, \eta),$$

它们在 $a < x < b$ 内的不同点 ξ,η 处有不连续的 x 导数; 此外假设

$$p(a)\left\{y(a)\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=a} - z(a)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}\right\} = p(b)\left\{y(b)\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=b} - z(b)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=b}\right\}.$$

利用 (27.4) 和关系式

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\xi-0}^{x=\xi+0} = \frac{1}{p(\xi)}, \quad \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=\eta-0}^{x=\eta+0} = \frac{1}{p(\eta)},$$

得出对任意的 ξ, η,

$$y(\eta) = z(\xi)$$

或

$$G(\eta, \xi) = G(\xi, \eta). \tag{27.8}$$

所以 $G(x, \xi)$ 是它的两个自变量的对称函数, 且其显式能通过在该区间端点 $x = a, b$ 的适当的边界条件确定 (27.6) 中的常数 C_1, C_2 而详细描述.

在物理内容方面, 考虑沿一杆的热传导问题, 它依赖于偏微分方程 (24.1), 即

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + r(x)u = q(x)\frac{\partial u}{\partial t}, \quad a < x < b, t > 0$$

或在采用表示式

$$u(x, t) = X(x)e^{-\lambda t}$$

后, 它依赖于常微分方程

$$L[X] + \lambda q(x)X = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right) + (r(x) + \lambda q(x))X = 0, \quad a < x < b. \tag{27.9}$$

当给定边界条件, 例如

$$X(a) = X(b) = 0 \tag{27.10}$$

时, 就遇到 X 的一个 Sturm – Liouville 方程; 且这能借助于适当的 Green 函数有效地重新表述. 用 $G(x, x'), a < x, x' < b$ 表示这个 Green 函数, 且采用条件方程组

$$\begin{gathered} L[G] = 0, \quad x \neq x', \\ G(a, x') = 0, \quad G(b, x') = 0 \end{gathered} \tag{27.11}$$

和

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x'-0}-\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x'+0}=+\frac{1}{p(x')},$$

最后这个条件蕴含 G 的导数在点 $x=x'$ 处的不连续性.

设 $X_1(x), X_2(x)$ 表示常微分方程

$$L[X]=\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right)+r(x)X=0,\quad a<x<b$$

的一对无关解, 并和关系式

$$p(x)W(x)=\text{常数} \tag{27.12}$$

联合出现, 这里

$$W=\frac{d}{dx}X_1\cdot X_2-X_1\cdot\frac{d}{dx}X_2\neq 0.$$

以下增加条件

$$X_1(a)=0,\quad X_2(b)=0, \tag{27.13}$$

Green 函数表示式为

$$G(x,x')=\begin{cases}\dfrac{X_1(x)X_2(x')}{p(x)W(x)}, & a\leqslant x\leqslant x',\\ \dfrac{X_1(x')X_2(x)}{p(x)W(x)}, & x'\leqslant x\leqslant b;\end{cases} \tag{27.14}$$

直接微分证明

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x'+0}-\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x'-0}\\ &=\frac{1}{p(x)W(x)}\left\{\left.\frac{dX_2}{dx}\right|_{x=x'}\cdot X_1(x')-\left.\frac{dX_1}{dx}\right|_{x=x'}\cdot X_2(x')\right\}=\frac{-1}{p(x')},\end{aligned}$$

与 (27.11) 的最后条件一致, 且满足其他条件是显然的. 此外, 定义等式 (27.14) 揭示 Green 函数所期望的对称性, 即

$$G(x,x')=G(x',x). \tag{27.15}$$

对于 $p(x)=1$ 和 $r(x)=0$ 的简单情形, 容易得到显式的详细过程, 这时

$$L[X]=\frac{d^2X}{dx^2}=0,\quad a<x<b;$$

这里两个式子

$$X_1(x)=x-a$$

和

$$X_2(x) = b - x$$

分别被边界条件 $X_1(a) = 0, X_2(b) = 0$ 所确定, 因此

$$W = b - x + x - a = b - a.$$

利用 (27.14), 有关的 Green 函数

$$G(x,x') = \begin{cases} \dfrac{(x-a)(b-x')}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant x', \\ \dfrac{(x'-a)(b-x)}{b-a}, & x' \leqslant x \leqslant b \end{cases} \tag{27.16}$$

具有在图 40 中展示的特征, 即它是 x 的分段光滑函数, 由具有公共点 $x = x'$ 的两直线段构成, 在该点导数或斜率有等于 -1 的间断, 因为

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x'-0}^{x=x'+0} = \frac{-(x'-a)-(b-x')}{(b-a)} = -1.$$

Green 函数和局部激发或局部源的作用之间的一般联系的初步概念可以通过把上述图形看作是在端点 $x = a, x = b$ 固定, 在点 x' 受一个横向力的作用下拉紧的弦产生的结果; 这里 $G(x,x')$ 确定该弦 (从沿 x 轴的初始构形) 沿其长度每一处离 x 轴的偏离.

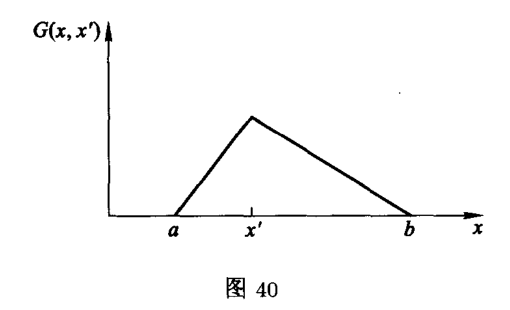


图 40

Green 函数 (27.16) 是恒等式

$$y(x) = -\int_a^b G(x,x')\frac{d^2}{dx'^2}y(x')dx' \tag{27.17}$$

的组成部分, 此式对在 $x = a, b$ 为零的二次可微函数 $y(x)$ 成立; 为检验这断言,

注意从 (27.17) 分部积分且用条件 $y(a)=y(b)=0$ 后逐步算得的一串关系式

$$\begin{aligned}
&\int_a^b G(x,x')\frac{d^2}{dx'^2}y(x')dx' \\
&= \frac{b-x}{b-a}\int_a^x (x'-a)\frac{d^2}{dx'^2}y(x')dx' + \frac{x-a}{b-a}\int_x^b (b-x')\frac{d^2}{dx'^2}y(x')dx' \\
&= \frac{b-x}{b-a}\left[(x'-a)\ \frac{d}{dx'}y(x')\Big|_{x'=a}^{x'=x} - \int_a^x \frac{d}{dx'}y(x')dx'\right] \\
&\quad + \frac{x-a}{b-a}\left[(b-x')\ \frac{d}{dx'}y(x')\Big|_{x'=x}^{x'=b} + \int_x^b \frac{d}{dx'}y(x')dx'\right] \\
&= \frac{b-x}{b-a}\left[(x-a)\frac{dy}{dx} - y(x)\right] + \frac{x-a}{b-a}\left[-(b-x)\frac{dy}{dx} - y(x)\right] \\
&= -y(x).
\end{aligned}$$

所以, 在非齐次常微分方程

$$L[y] = \frac{d^2y}{dx^2} = -f(x), \quad a<x<b$$

在 $x=a,b$ 为零的那个解中, 上面的 Green 函数有直接作用, 即

$$y(x) = \int_a^b G(x,x')f(x')dx'; \tag{27.18}$$

更一般地, 对微分算子

$$L = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + r(x)$$

的 Green 函数 (27.14) 能类似地用于 (27.18) 去描述方程组

$$\begin{aligned}
&L[y] = -f(x), \quad a<x<b \\
&y(a)=0, \quad y(b)=0
\end{aligned}$$

下的解.

如果起源于热传导问题且包含一个待定参数的常微分方程 (27.9) 改写成

$$L[X] = -\lambda q(x)X(x), \quad a<x<b,$$

应用 (27.18) 得出

$$X(x) = \lambda\int_a^b G(x,x')q(x')X(x')dx', \tag{27.19}$$

称为 $X(x)$ 的积分方程; 给定 $q(x)>0$, 用另一函数

$$\Phi(x) = \sqrt{q(x)}X(x) \tag{27.20}$$

能使 (27.19) 改换成

$$\Phi(x) = \lambda \int_a^b K(x,x')\Phi(x')dx', \tag{27.21}$$

它是一个具有对称核函数

$$K(x,x') = \sqrt{q(x)}G(x,x')\sqrt{q(x')} = K(x',x) \tag{27.22}$$

的齐次积分方程, 这里已给定 $G(x,x')$ 的对称性.

这样, Sturm-Liouville 方程 (27.9),(29.10) 的解能通过单独一个积分方程或函数方程 (27.21) 的解而找到, 该积分方程的核满足有关的边界条件. (27.19) 的非平凡解 $X_1(x), X_2(x), \cdots, X_n(x), \cdots$ 与参数的确定值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ 相联系; 这些称为该积分方程的本征函数和本征值, 而且与其 Sturm-Liouville 方程的对应部分恰好一致.

容易得到这种等价性的特殊情形的证明; 例如, 给出方程

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda X = 0, \quad a < x < b,$$
$$X(a) = 0, \quad X(b) = 0$$

的本征函数

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a}, \quad n \text{ 为整数}$$

和本征值

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$$

以及 Green 函数 (27.16), 简单地积分给出

$$\begin{aligned}
&\lambda_n \int_a^b G(x,x')X_n(x')dx' \\
&= \frac{(n\pi)^2}{(b-a)^2}\left[\int_a^x \frac{(x'-a)(b-x)}{b-a}\sin\frac{n\pi(x'-a)}{b-a}dx'\right. \\
&\quad \left. + \int_x^b \frac{(x-a)(b-x')}{b-a}\sin\frac{n\pi(x'-a)}{b-a}dx'\right] \\
&= \frac{(n\pi)^2}{(b-a)^3}(b-x)\int_0^{x-a}\zeta\sin\frac{n\pi\zeta}{b-a}d\zeta \\
&\quad + \frac{(n\pi)^2}{(b-a)^3}(x-a)(-1)^{n+1}\int_0^{b-x}\eta\sin\frac{n\pi\eta}{b-a}d\eta \\
&= \frac{n\pi}{(b-a)^2}(b-x)\left[-(x-a)\cos\frac{n\pi(x-a)}{b-a} + \frac{b-a}{n\pi}\sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right] \\
&\quad + (-1)^{n+1}\frac{n\pi}{(b-a)^2}(x-a)\left[-(b-x)\cos\frac{n\pi(b-x)}{b-a} + \frac{b-a}{n\pi}\sin\frac{n\pi(b-x)}{b-a}\right].
\end{aligned}$$

由于

$$\cos\frac{n\pi(b-x)}{b-a}=\cos\frac{n\pi}{b-a}(b-a-(x-a))=(-1)^n\cos\frac{n\pi(x-a)}{b-a},$$
$$\sin\frac{n\pi(b-x)}{b-a}=\sin\frac{n\pi}{b-a}(b-a-(x-a))=(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a},$$

由此得出

$$\lambda_n\int_a^b G(x,x')X_n(x')dx'=\left(\frac{b-x}{b-a}+\frac{x-a}{b-a}\right)\sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a}=\sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a},$$

正如所要求的那样.

非齐次常微分方程

$$L[X]+\lambda q(x)X(x)=f(x),\quad a<x<b \tag{27.23}$$

和边界条件

$$X(a)=0,\quad X(b)=0 \tag{27.24}$$

所组成的方程有一个等价的非齐次积分方程, 即

$$\Phi(x)=\lambda\int_a^b K(x,x')\Phi(x')dx'-\sqrt{q(x)}\int_a^b G(x,x')f(x')dx'; \tag{27.25}$$

而且如果 $\lambda\neq\lambda_m$, 则上式存在唯一解. 当参数等于本征值时, 例如说, $\lambda=\lambda_m$, 则对 $y=X(x)$ 和满足

$$L[X_m]=0,\quad a<x<b,\quad X_m(a)=X_m(b)=0$$

的 $z=X_m(x)$ 用 Green 公式, 提供了对方程 (27.23),(27.24) 的解的存在性的一个必要条件, 即

$$\int_a^b f(x)X_m(x)dx=0. \tag{27.26}$$

从积分方程观点看, 非齐次型

$$\Phi(x)=\lambda\int_a^b K(x,x')\Phi(x')dx'-F(x) \tag{27.27}$$

有解只要

$$\int_a^b F(x)\Phi_m(x)dx=0, \tag{27.28}$$

这里 $\Phi_m(x)$ 是对应齐次方程的一个本征函数; 从 (27.25) 所取的特殊表示式

$$F(x)=\sqrt{q(x)}\int_a^b G(x,x')f(x')dx',$$

利用 $G(x,x')$ 的对称性条件 (27.28) 变成

$$\begin{aligned}0 &= \int_a^b \sqrt{q(x)}\Phi_m(x)\int_a^b G(x,x')f(x')dx'dx\\&= \int_a^b \frac{f(x')dx'}{\sqrt{q(x')}}\int_a^b \sqrt{q(x)}G(x,x')\sqrt{q(x')}\Phi_m(x)dx\\&= \int_a^b \frac{f(x')dx'}{\sqrt{q(x')}}\int_a^b K(x',x)\Phi_m(x)dx = \frac{1}{\lambda_m}\int_a^b \frac{f(x')}{\sqrt{q(x')}}\Phi_m(x')dx'\\&= \frac{1}{\lambda_m}\int_a^b f(x')X_m(x')dx',\end{aligned}$$

因而证实了 (27.26).

类似结果适用于其他边界条件, 虽然对一般型边界条件 (24.5) 中的系数的任意值, Green 函数的对称性并不成立. 一般来说, 积分方程并不比微分方程更容易解; 然而它们为理论和实践两者的目的有效地提供了一种补充形式. 关于本征函数和本征值的各种各样命题通过应用积分方程能容易地建立; 例如, 关于 (27.21) 中的对应于不同本征值 λ_m, λ_n 的本征函数 $\Phi_m(x), \Phi_n(x)$ 的正交性的一个证明需要在其各自对应方程中用积 $\lambda_n\Phi_n(x), \lambda_m\Phi_m(x)$ 交错相乘再相减, 首先得出

$$\begin{aligned}(\lambda_m-\lambda_n)\Phi_m(x)\Phi_n(x) = \lambda_m\lambda_n\Bigg[&\int_a^b K(x,x')\Phi_n(x)\Phi_m(x')dx'\\&-\int_a^b K(x,x')\Phi_m(x)\Phi_n(x')dx'\Bigg],\end{aligned}$$

其次, 对 x 积分后

$$\begin{aligned}(\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b \Phi_m(x)\Phi_n(x)dx = \lambda_m\lambda_n\Bigg[&\int_a^b\int_a^b K(x,x')\Phi_n(x)\Phi_m(x')dx'dx\\&-\int_a^b\int_a^b K(x,x')\Phi_m(x)\Phi_n(x')dx'dx\Bigg].\end{aligned}$$

右边两个二重积分中的变量 x, x' 替换成 x', x 且用 $K(x,x')$ 的对称性后, 推出右边的值为零; 所以, 如果 $\lambda_m \neq \lambda_n$, 相应的本征函数是正交的, 即

$$\int_a^b \Phi_m(x)\Phi_n(x)dx = 0, \quad m \neq n.$$

实对称核的本征值都是实的这一事实能从积分方程的初始形式

$$u(x)+iv(x) = (\alpha+i\beta)\int_a^b K(x,x')(u(x')+iv(x'))dx'$$

推演出, 它显然容许有复值本征函数和本征值. 于是其共轭方程

$$u(x) - iv(x) = (\alpha - i\beta) \int_a^b K(x, x')(u(x') - iv(x'))dx'$$

则从第一个本征函数确定了与其不同的第二个本征函数, 而前面的正交关系式要求

$$\int_a^b (u(x) + iv(x)) \cdot (u(x) - iv(x))dx = \int_a^b (u^2(x) + v^2(x))dx = 0,$$

即 $u = v = 0$, 且积分方程的带有复本征值的非平凡本征函数不存在.

本征值的性质显然被核函数的性质所决定, 且对*平方可积型核*, 即满足

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, x')dxdx' = \text{有限数} \tag{27.29}$$

的核, 可以得到最完满的详细描述.

假设对称核的 N 个线性无关 (不必正交) 本征函数 $\Phi_1^*(x), \cdots, \Phi_N^*(x)$ 有公共本征值 λ. 即

$$\Phi_i^*(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x, x')\Phi_i^*(x')dx', \quad i = 1, \cdots, N; \tag{27.30}$$

则有标准程序确定具有以下性质的另一集合 $\Phi_1(x), \cdots, \Phi_N(x)$:

i) Φ_i 是 $\Phi_j^*(x), j = 1, \cdots, N$ 的线性组合;

ii) $\Phi_i, 1 \leqslant i \leqslant N$ 是线性无关的;

iii) $\Phi_i, 1 \leqslant i \leqslant N$ 构成正交集, 即:

$$\int_a^b \Phi_i(x)\Phi_j(x)dx = 0, \quad i \neq j; \tag{27.31}$$

iv) Φ_i 是规范化的

$$\int_a^b \Phi_i^2(x)dx = 1, \quad i = 1, \cdots, N. \tag{27.32}$$

引入基于核函数和上述集合中各函数的量, 即

$$c_i(x') = \int_a^b K(x, x')\Phi_i(x)dx = \int_a^b K(x', x)\Phi_i(x)dx \tag{27.33}$$

且观察到作为 (27.31) – (27.33) 的结果,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_a^b \left[K(x,x') - \sum_{i=1}^N c_i(x')\Phi_i(x)\right]^2 dx \\
&= \int_a^b K^2(x,x')dx - 2\sum_{i=1}^N c_i(x')\int_a^b K(x,x')\Phi_i(x)dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N c_i(x')c_j(x')\int_a^b \Phi_i(x)\Phi_j(x)dx \\
&= \int_a^b K^2(x,x')dx - 2\sum_{i=1}^N c_i^2(x') + \sum_{i=1}^N c_i^2(x') \\
&= \int_a^b K^2(x,x')dx - \sum_{i=1}^N c_i^2(x') \geqslant 0,
\end{aligned}
$$

所以

$$\sum_{i=1}^N c_i^2(x') \leqslant \int_a^b K^2(x,x')dx. \tag{27.34}$$

给定对 $a<x<b$ 中的所有 x', (27.34) 成立和由 (27.30),(27.33) 得出的规定

$$c_i(x') = \frac{\Phi_i(x')}{\lambda_0}, \quad i=1,\cdots,N, \tag{27.35}$$

对 x' 积分的结果

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_0^2}\int_a^b \Phi_i^2(x')dx' = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_0^2} = \frac{N}{\lambda_0^2} \leqslant \int_a^b\int_a^b K^2(x,x')dx\, dx',$$

这里也用到规范化等式 (27.32). 因此, 对于对称的和平方可积的核, 只有有限多个线性无关本征函数能有同一本征值, 且这种本征函数的个数的一个上界由下式给出:

$$N \leqslant \lambda_0^2 \int_a^b\int_a^b K^2(x,x')dx\, dx'.$$

以下, 假设在区间

$$-\Lambda \leqslant \lambda \leqslant \Lambda$$

中总共有 p 个本征值出现; 对这些本征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$ 的每一个, 至少有一个本征函数 $\Phi_i(x), i=1,\cdots,p$ 且其特征化式

$$c_i(x') = \frac{\Phi_i(x')}{\lambda_i}, \quad i=1,\cdots,p \tag{27.36}$$

适用. 因此, (27.34) 给出

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\Phi_i^2(x')}{\lambda_i^2} \leqslant \int_a^b K^2(x,x')dx$$

或者对 x' 积分后有

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i^2} \leqslant \int_a^b \int_a^b K^2(x,x')dx\, dx'. \tag{27.37}$$

(27.37) 的左边可换成 p/Λ^2 由于

$$\frac{1}{\Lambda^2} \leqslant \frac{1}{\lambda_i^2}, \quad i=1,\cdots,p,$$

因而在任一有界区间内可能的本征值的个数是有限的.

也必须观察到其定义方程包括齐次边界条件的 Green 函数也能用来直接求解对应边界条件是非齐次边界条件的问题. 作为例子, 考虑方程组

$$\begin{aligned} &L[y] = f(x), \quad a < x < b, \\ &y(a) = A, \quad y(b) = B \end{aligned} \tag{27.38}$$

和带有表示式 (27.14) 的 Green 函数 (27.11), 它满足条件 $G(a,x')=0, G(b,x')=0, a<x<b$. 设在修正的 Green 公式 (27.4) 中选取 $y=X(x), z=G(x,x')$, 如果 X 处处有连续导数而 G 在 $x=x'$ 处有不连续导数, 即

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x'-0}^{x=x'+0} = \frac{1}{p(x')},$$

则该式变成

$$\begin{aligned} &\int_a^b \{G(x,x')L[X] - X(x)L[G(x,x')]\}dx \\ &= -y(x') + p(x)\left[G\frac{dX}{dx} - X\frac{dG}{dx}\right]\Bigg|_{x=a}^{x=b}. \end{aligned} \tag{27.39}$$

考虑到对 $X(x)$ 和 $G(x,x')$ 的各种规定, 得到 (27.39) 的更简单形式, 即

$$\begin{aligned} &\int_a^b G(x,x')f(x)dx + y(x') \\ &= -p(b)B\,\frac{\partial}{\partial x}G(x,x')\bigg|_{x=b} - p(a)A\,\frac{\partial}{\partial x}G(x,x')\bigg|_{x=a}, \end{aligned}$$

利用 G 的对称性, 能重新写成

$$y(x) = -\int_a^b G(x,x')f(x')dx' + Ap(a)\left.\frac{\partial}{\partial x'}G(x,x')\right|_{x'=a}$$
$$-Bp(b)\left.\frac{\partial}{\partial x'}G(x,x')\right|_{x'=b}. \tag{27.40}$$

方程组 (27.38) 的解的上面的这个表示式的明显性值得注意, 它带有定义方程中出现的每个非齐次度量的分别的贡献.

为体会在一特例中 Green 函数更广的作用, 考虑偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \tag{27.41}$$

且在区域的矩形边界两个部分上满足非齐次边界条件 (见图 41), 即:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \quad 0 < x < a, \\ u(0,y) &= g(y), \quad 0 < y < b \end{aligned} \tag{27.42}$$

的解.

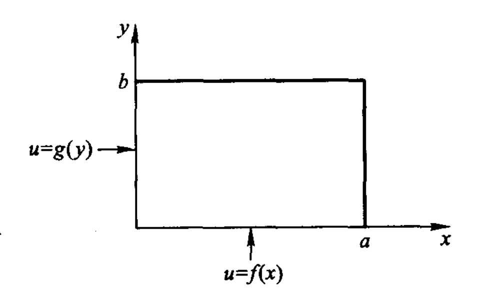


图 41

采用对 $u(x,y)$ 沿 x 方向以有关本征函数 $\sin\dfrac{n\pi x}{a}, n = 1, 2, \cdots$ 为项的级数, 即

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y)\sin\frac{n\pi x}{a}, \tag{27.43}$$

这里

$$Y_n(y) = \frac{2}{a}\int_0^a u(x,y)\sin\frac{n\pi x}{a}dx, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{27.44}$$

由此导出对这些单变量函数的以下方程组

$$\frac{d^2Y_n}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y_n = -\frac{2n\pi}{a^2}g(y), \quad 0 < y < b,$$
$$Y_n(0) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx \tag{27.45}$$

和

$$Y_n(b) = 0.$$

一个适当的 Green 函数 $G_n(y,y')$ 满足关系式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]G_n(y,y') = 0, \quad y \neq y', \tag{27.46}$$

$$G_n(0,y') = 0, \quad G_n(b,y') = 0, \left.\frac{\partial}{\partial y}G_n\right|_{y=y'-0}^{y=y'+0} = 1,$$

且其表示式

$$G_n(y,y') = \begin{cases} \dfrac{a}{n\pi} \dfrac{\sinh \dfrac{n\pi y}{a} \sinh \dfrac{n\pi}{a}(b-y')}{\sinh \dfrac{n\pi b}{a}}, & 0 \leqslant y \leqslant y' < b, \\ \dfrac{a}{n\pi} \dfrac{\sinh \dfrac{n\pi y'}{a} \sinh \dfrac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh \dfrac{n\pi b}{a}}, & y' \leqslant y \leqslant b, \end{cases} \tag{27.47}$$

按照对一般形式 (27.14) 所概述的方式容易找到. 这样, 按照 (27.40), 方程组 (27.45) 的解表成

$$\begin{aligned} Y_n(y) &= Y_n(0) \left.\frac{\partial}{\partial y'} G_n(y,y')\right|_{y'=0} + \int_0^b G_n(y,y') \frac{2n\pi}{a^2} g(y') dy' \\ &= Y_n(0) \frac{\sinh \dfrac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh \dfrac{n\pi b}{a}} + \int_0^b G_n(y,y') \frac{2n\pi}{a^2} g(y') dy', \end{aligned}$$

原来方程组 (27.41),(27.42) 的解表成

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(0) \frac{\sinh \dfrac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh \dfrac{n\pi b}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^b G_n(y,y') \frac{2n\pi}{a^2} \sin \frac{n\pi x}{a} g(y') dy' \\ &= \frac{2}{a} \int_0^a f(x') \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x'}{a} \frac{\sinh \dfrac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh \dfrac{n\pi b}{a}} dx' \\ &\quad + \frac{2}{a} \int_0^b g(y') \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{a} \frac{\sinh \dfrac{n\pi y_<}{a} \sinh \dfrac{n\pi}{a}(b-y_>)}{\sinh \dfrac{n\pi b}{a}} dy', \end{aligned} \tag{27.48}$$

这里 $y_<, y_>$ 分别表示 y, y' 的较小者和较大者.

(27.48) 中的两个积分, 与分别的边界数据相关联, 可从一个公共函数导出, 如下式所显示

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^a f(x') \left.\frac{\partial}{\partial y'} \mathcal{G}(x,y;x',y')\right|_{y'=0} dx' \\ &\quad + \int_0^b g(y') \left.\frac{\partial}{\partial x'} \mathcal{G}(x,y;x',y')\right|_{x'=0} dy', \end{aligned} \tag{27.49}$$

其中

$$\mathcal{G}(x,y;x',y') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{n\pi x'}{a} \frac{\sinh\frac{n\pi}{a}y_< \sinh\frac{n\pi}{a}(b-y_>)}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}, \quad (27.50)$$

这提示了 (以后将要描述) 多维 Green 函数的作用.

习 题 27

1. 用两种不同方法决定一个 Green 函数 $G(x,x')$ 使得

$$L[G(x,x')] = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2\right) G(x,x') = 0, \quad x \neq x',\ k>0,\ 0<x<l,$$

$$G(0,x') = 0, \quad G(l,x') = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}G\bigg|_{x=x'-0}^{x=x'+0} = 1;$$

一个根据表示式 (27.6),(27.7), 而另一个根据表示式 (27.14). 考察 $k \to 0$ 的极限情形且与 (27.16) 作比较.

2. 对问题 1 中的微分算子 L, 给出边界条件

$$G(0,x') = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha\right) G(x,x') = 0, \quad x = l,$$

求其 Green 函数, 且分别讨论 $\alpha = \infty, \alpha = 0$ 的极限情形.

3. 导出与非齐次常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(2x - \frac{1}{x}\right)\frac{dy}{dx} = -f(x), \quad 1<x<2,$$

相关联的 Green函数, 使得

$$y(x) = \int_1^2 G(x,x')f(x')dx'$$

和

$$y(1) = y(2) = 0.$$

4. 如果 $G(x,x')$ 表示具有定义关系式

$$L[G(x,x')] = \frac{\partial^2}{\partial x^2}G + \lambda G = 0, \quad 0<x,x'<1,$$

$$G(0,x') = 0, \quad G(l,x') = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}G\bigg|_{x=x'-0}^{x=x'+0} = 1$$

的 Green 函数, Green 叠函数

$$\mathcal{G}(x,x') = \int_0^1 G(x,x'')G(x'',x')dx''?$$

有哪些性质?

5. 给出齐次方程组

$$L[y] + \lambda q(x)y = \frac{d^2y}{dx^2} + \lambda q(x)y = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$y(0) = 0, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=l} = 0, \quad q(x) > 0;$$

按照定义

$$z(x) = \frac{dy}{dx}$$

将 $y(x)$ 换成 $z(x)$, 且验证变换后的方程组, 即

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{q(x)}\frac{dz}{dx}\right) + \lambda z = 0, \\ &\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0} = 0, \quad z(l) = 0 \end{aligned} \tag{$*$}$$

保持自伴性质. 构造一个 Green 函数 $G(x,x')$ 其定义方程组是

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{q(x)}\frac{\partial G}{\partial x}\right] = 0, \quad x \neq x',$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad G(l,x') = 0,$$

它作为齐次积分方程

$$z(x) = \lambda\int_0^l G(x,x')z(x')dx'$$

中的核出现, 构成 Sturm–Liouville 方程 $(*)$ 的等价的重新公式化表示.

6. 借助于一个 Green 函数, 表示出非齐次常微分方程

$$x\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(xy(x))\right] = f(x), \quad 0 < x < 1$$

的解 $y(x)$, 且它在 $x = 0$ 有限, 在 $x = 1$ 满足条件 $\dfrac{dy}{dx} = \alpha x$.

7. 给出 $y_1 = x^{1/2}$ 是常微分方程

$$Ly = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{y}{4x^2} = 0 \tag{$*$}$$

的一个解; 令 $y = y_1(x)\cdot v(x)$ 且从 $(*)$ 求得 $\frac{dv}{dx}$ 的一阶常微分方程, 决定 $v(x)$ 从而决定 $(*)$ 的与 $y_1(x)$ 无关的第二个解. 找一个 $(*)$ 的满足边界条件

$$G(a,x') = 0, \quad G(a+1,x') = 0, \quad a > 0$$

的 Green 函数.

8. i) 常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = f(x), \quad 0 < x < \pi \tag{$*$}$$

的一个通积分可用 y 及其导数在点 $x = 0$ 的任意值来表示, 即

$$y(x) = y(0)\cos x + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} \sin x + \int_0^x \sin(x - x')f(x')dx'.$$

用此式去讨论由 $(*)$ 和边界条件 $y(0) = A, y(\pi) = B$ 构成的方程组; 且写出可实现的解的最一般形式. 在常微分方程 $(*)$ 换成

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = f(x), \quad 0 < x < \pi$$

的情形下, 对应的细节是什么?

ii) 当考虑非齐次积分方程

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= f(x) + \lambda\int_0^\pi \sin(x - x')\Phi(x')dx' \\ &= f(x) + \lambda\sin x\int_0^\pi \cos x'\Phi(x')dx' \\ &\quad -\lambda\cos x\int_0^\pi \sin x'\Phi(x')dx', \quad 0 < x < \pi\end{aligned}$$

的解的存在性时, 考察参数 λ 和指定的函数 $f(x)$ 所起的作用, 且描述可能实现的解的最一般形式.

9. 将方程组

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = f(x), \quad 0 < x < \pi,$$

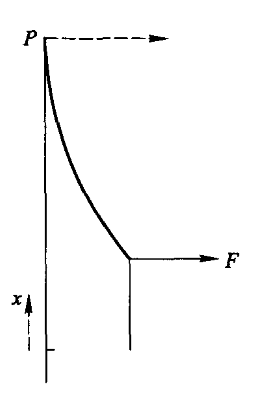
$$\frac{dy}{dx} + y = 0, \quad x = 0, \pi$$

的解表示成

$$y(x,\lambda) = \int_0^\pi G(x,x',\lambda)f(x')dx'$$

的形式, 且讨论 Green 函数 $G(x,x',\lambda)$ 作为自变量 λ 的函数的性状.

10. 考虑一长度 l 和密度 ρ 的链, 悬挂于固定点 P; 设该链的距离从下端即自由端测量. 如果一定常水平的 (或横截的) 力 F 作用在一点 $x', 0 < x < l$, 则该链的与时间无关的图形 (如图所示) 被位移函数 $y(x) = FG(x', x)$ 所确定, 这里



$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\frac{\partial G}{\partial x}\right) = 0, \quad x \neq x',$$

$$G(l, x') = 0, \quad G(0, x') \text{ 有限} \tag{$*$}$$

和

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x'-0}^{x=x'+0} = -\frac{1}{T(x')};$$

其中 $T(x) = \rho g x$ 表示该链中的张力而 g 是重力加速度.

对于在一确定平面内离垂直线的小的时间变化幅度内位移 $y(x,t)$ 适用一个线性偏微分方程, 即

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right), \quad 0 < x < l, \tag{$**$}$$

满足条件

$$y(l,t) = 0, \quad y(0,t) \text{ 有限}, \quad t > 0.$$

从 ($*$) 决定静位移函数 $G(x, x')$, 然后得到描述 ($**$) 的本征解 $y(x,t)$ 中的坐标因子 $X(x)$ 的齐次积分方程, 这本征解有一个时间周期的时间性状, 即

$$y(x,t) = X(x)\cos(\omega t - \delta).$$

这些本征函数的正交关系式是什么?

11. 设要求在环形区域 $a<r<b, -\pi<\vartheta<\pi$ 内解 Laplace 方程

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}=0,$$

给定边界条件

$$\begin{aligned} u(a,\vartheta)&=f_1(\vartheta)\\ u(b,\vartheta)&=f_2(\vartheta),\end{aligned}\qquad -\pi<\vartheta<\pi;$$

此外假设以上两函数有奇对称性, 即

$$f_1(-\vartheta)=-f_1(\vartheta);\quad f_2(-\vartheta)=-f_2(\vartheta).$$

引入反映边界数据对称性的展开式, 即

$$u(r,\vartheta)=\sum_{n=1}^{\infty}R_n(r)\sin n\vartheta,$$

其系数函数

$$R_n(r)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(r,\vartheta)\sin n\vartheta d\vartheta,\quad n=1,2,\cdots$$

满足齐次常微分方程

$$L[R_n]=\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_n}{dr}\right)-\frac{n^2}{r}R_n=0,\quad a<r<b, n=1,2,\cdots \tag{*}$$

且服从要求

$$R_n(a)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(\vartheta)\sin n\vartheta d\vartheta, \tag{**}$$

$$R_n(b)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(\vartheta)\sin n\vartheta d\vartheta.$$

构造合适的 Green 函数 $G(r,r')$, 且将 (*), (**) 的解表成形式

$$\begin{aligned}R_n(r)=&\frac{b}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(\vartheta')\ \frac{\partial}{\partial r'}G_n(r,r')\bigg|_{r'=b}\sin n\vartheta' d\vartheta'\\ &-\frac{a}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(\vartheta')\ \frac{\partial}{\partial r'}G_n(r,r')\bigg|_{r'=a}\sin n\vartheta' d\vartheta',\end{aligned}$$

它蕴涵

$$u(r,\vartheta)=b\int_{-\pi}^{\pi}f_2(\vartheta')\frac{\partial}{\partial\vartheta'}\mathcal{G}_{r'=b}d\vartheta'-a\int_{-\pi}^{\pi}f_1(\vartheta')\frac{\partial}{\partial\vartheta'}\mathcal{G}_{r'=a}d\vartheta'$$

就是所提出的问题的解, 其中

$$\mathcal{G}(r,\vartheta;r',\vartheta')=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}G_n(r,r')\sin n\vartheta\sin n\vartheta'.$$

研究 $a\to 0$ 的极限情形且与第十七章中所得到的解相比较.

12. 线性弹性理论 (根据 Hooke 定律即应力与应变之间成比例的性质) 提供均匀圆棱柱中扭转状态的简单描述, 该柱在一端面 (上面的平面) 受一个扭矩的作用而另一 (下) 端面保持固定. 如果后者位于 x, y 平面上而 ωz 度量其中高度为 z 的横截面处的相对旋转, 在 x, y, z 方向的三个位移分别是

$$u = -\omega z y, \quad v = \omega z x, \quad w = z\varphi(x, y), \tag{i}$$

它们定义一个内应变结构, 对这种静位移结构的相容性要求满足方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{ii}$$

如果母线平行于 z 轴该柱的弯曲表面是无应力的, 则沿每个横截面的平面边界曲线 Γ 的有关边界条件是

$$x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dy}{ds} = 0,$$

这里 ds 表示 Γ 上的弧长元素; 它具有一个用共轭于 $\varphi(x, y)$ 的函数 $\psi(x, y)$ 来表示的直接可积形式

$$x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} - \left[\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right] = 0,$$

其中 $\psi(x, y)$ 由

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

定义, 结果是

$$\psi = \frac{x^2 + y^2}{2} + C, \text{ 在 } \Gamma \text{ 上}. \tag{iii}$$

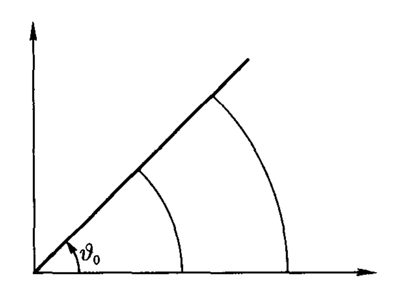
这样, ψ 是 Laplace 方程 (ii) 的一个解且它有边界的确定值 (iii); 在求解这个方程组或其等价方程组 (如下) 后,

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -2, \\ \Psi = 0, \text{ 在 } \Gamma \text{ 上}, \end{gathered} \tag{iv}$$

这里

$$\Psi = \psi - \frac{x^2 + y^2}{2} - C,$$

直接计算该柱中的切应力成为可能, 偏微分方程 (iv) 称为 Poisson 方程. 作为一个起说明作用的例子, 考虑这样一个柱, 其横截面的边界曲线由两条径向直线和两条圆弧构成, 则 (iv) 中条件有四个互补表示式



$$\begin{aligned}&\Psi(a,\vartheta)=0,\\&\Psi(b,\vartheta)=0,\quad 0<\vartheta<\vartheta_0\end{aligned}\tag{v}$$

和

$$\Psi(r,0)=0,\quad \Psi(r,\vartheta_0)=0,\quad a<r<b.\tag{vi}$$

利用应力函数 Ψ 的分离变量展开式, 即

$$\Psi(r,\vartheta)=\sum_{n=1}^{\infty}R_n(r)\sin\mu_n\vartheta,\quad \mu_n=\frac{n\pi}{\vartheta_0},\tag{vii}$$

它满足条件 (vi) 且验证系数函数

$$R_n(r)=\frac{2}{\vartheta_0}\int_0^{\vartheta_0}\Psi(r,\vartheta)\sin\mu_n\vartheta d\vartheta,\quad n=1,2,\cdots$$

服从常微分方程

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_n}{dr}\right)-\frac{1}{r}\mu_n^2R_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ -\dfrac{8r}{n\pi}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}\tag{viii}$$

用一个 Green 函数去求解 (viii) 连同由 (v) 给出的要求

$$R_n(a)=0,\quad R_n(b)=0;$$

证实其结果为

$$\Psi(r,\vartheta)=\sum_{n\text{ 为奇数}}\left[A_nr^{\mu_n}+B_nr^{-\mu_n}+\frac{8r^2}{n\pi(\mu_n^2-4)}\right]\sin\mu_n\vartheta,$$

这里

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{8[b^2a^{-\mu_n}-a^2b^{-\mu_n}]}{n\pi(\mu_n^2-4)[a^{\mu_n}b^{-\mu_n}-b^{\mu_n}a^{-\mu_n}]},\\ B_n&=\frac{8[a^2b^{\mu_n}-b^2a^{\mu_n}]}{n\pi(\mu_n^2-4)[a^{\mu_n}b^{-\mu_n}-b^{\mu_n}a^{-\mu_n}]}.\end{aligned}$$

考察特殊情形 $\vartheta_0=\pi$ 及其与前面问题的关系.

13. 考虑一个有均匀密度 ρ 的拉紧的弦, 在两端点 $x=0,l$ 固定, 它有质量或负载 M 附加在点 $x=\xi$ 处; 描述具有离直线平衡位置的横向位移 $y(x,t)$ 的小振幅运动的线性方程组为

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\quad x\gtrless\xi, \tag{i}$$

$$y(0,t)=0,\quad y(\xi-0,t)=y(\xi+0,t),\quad y(l,t)=0 \tag{ii}$$

和

$$M\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(\xi,t)=T\left[\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=\xi+0}-\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=\xi-0}\right],\quad t>0. \tag{iii}$$

(ii) 蕴涵弦曲线的连续性, 而在负载点斜率的不连续性在 (iii) 中显示,(iii) 构成了 M 的运动方程. 在时间周期运动的情形, 表示式

$$y(x,t)=X(x)\cos(\omega t-\delta)$$

容许将方程组 (i) – (iii) 换成带常导数的方程组, 即

$$\frac{d^2X}{dx^2}+k^2X=0,\quad x\gtrless\xi,\quad k=\omega\sqrt{\frac{\rho}{T}},$$

$$X(0)=0,\quad X(\xi-0)=X(\xi+0),\quad X(l)=0 \tag{iv}$$

和

$$-M\frac{k^2}{\rho}X(\xi)=\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=\xi-0}^{x=\xi+0}.$$

(iv) 中最后的关系式与相关联的 Green 函数的关系式集合

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=0,\quad x\neq x',$$

$$G(0,x')=0,\quad G(l,x')=0 \tag{v}$$

和

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x'-0}^{x=x'+0}=1$$

中的对应部分不同, 后者的 Green 函数的导数的不连续性有一个固定的量, 而本征函数 X 的对应的量与 X 在此负载点的量成比例且也包括振动频率, 这两者还是未知的.

把 Green 公式用到函数 X,G, 且对 X 建立一个积分方程

$$X(x)=\frac{M}{\rho}k^2X(\xi)G(x,\xi)+k^2\int_0^l G(x,x')X(x')dx',\quad 0<x<l.$$

找出决定本征频率

$$\omega = k\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

的方程.

14. 与高阶微分算子相联系的 Green 函数仍有重大意义与关系; 涉及三阶组的一个具体例子有助于启发定义 Green 函数的合适条件. 为此, 考虑具有非齐次边界条件的方程组

$$L[y] = \frac{d^3y}{dx^3} + q(x)y = 0, \quad a < x < b, \tag{i}$$

$$U_1[y] = y(a) = A, \quad U_2[y] = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = B, \quad U_3[y] = y(b) = 0,$$

引进一个辅助常微分方程:

$$\frac{d^3z}{dx^3} = 0; \tag{ii}$$

从 (i) 和 (ii) 得到两个函数 $y(x), z(x)$ 之间的关系式

$$\frac{d}{dx}\left[z\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dz}{dx}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2}y\right] + q(x)yz = 0. \tag{iii}$$

设 $z_1(x), z_2(x)$ 分别表示在 $a < x < c, c < x < b$ 中不同的一对函数, 且在对应的互补区间上积分 (iii), 考虑到 (i) 中的边界条件; 这得出

$$z_1(c)\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=c} - z_1(a)\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=a} - \left.\frac{dz_1}{dx}\right|_{x=c}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c} + \left.\frac{dz_1}{dx}\right|_{x=a}\cdot B$$

$$+ \left.\frac{d^2z_1}{dx^2}\right|_{x=c} y(c) - \left.\frac{d^2z_1}{dx^2}\right|_{x=a}\cdot A + \int_a^c q(x')z_1(x')y(x')dx', \tag{iv}$$

$$z_2(b)\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=b} - z_2(a)\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=c} - \left.\frac{dz_2}{dx}\right|_{x=b}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=b} + \left.\frac{dz_2}{dx}\right|_{x=c}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c}$$

$$- \left.\frac{d^2z_2}{dx^2}\right|_{x=c} y(c) + \int_c^b q(x')z_2(x')y(x')dx'. \tag{v}$$

由于端点值

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=a}, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=b}, \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=b}$$

未确定, 为从 (iv),(v) 中消去它们附加要求

$$z_1(a) = 0, \quad z_2(b) = 0, \quad \left.\frac{dz_2}{dx}\right|_{x=b} = 0.$$

其次, 采用连接条件

$$z_1(c) = z_2(c), \quad \left.\frac{dz_1}{dx}\right|_{x=c} = \left.\frac{dz_2}{dx}\right|_{x=c},$$
$$\left.\frac{d^2 z_1}{dx^2}\right|_{x=c} - \left.\frac{d^2 z_2}{dx^2}\right|_{x=c} = -1,$$

它们推断出由 $z_1(x), z_2(x)$ 表示的函数 $z(x)$ 直到二阶导数的处处连续性, 且证实 (iv),(v) 联合起来提供了方程组 (i) 的解的一个积分方程, 即

$$y(x) = B \left.\frac{dz_1}{dx}\right|_{x=a} - A \left.\frac{d^2 z_1}{dx^2}\right|_{x=a} + \int_a^b G(x,x')q(x')y(x')dx', \qquad \text{(vi)}$$

这里

$$G(x,x') = \begin{cases} z_1(x'), & a < x' < x < b, \\ z_2(x'), & x < x' < b \end{cases}$$

起到 Green 函数的作用. 决定它的组成部分即函数 z_1, z_2 的显式表达式, 且验证 (vi) 确实构成方程组 (i) 的等价形式.

15. 由上述问题中的发现的引导, 方程组

$$L[y] = p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x)y = 0, \quad a < x < b,$$
$$U_1[y] = 0, U_2[y] = 0, \cdots, U_n[y] = 0$$

的 Green 函数的描述方程包括:

i) $G(x,x')$ 是其自变量的连续函数且对 $a < x, x' < b$ 有直到 $n-2$ 阶的连续导数;

ii)

$$\left.\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=x'-0}^{x=x'+0} = \frac{1}{p_0(x')};$$

iii)

$$L[G] = 0, \quad x \neq x';$$

iv)

$$U_i[G] = 0, \quad i = 1, \cdots, n.$$

如果一个有相同横截面的均匀弹性杆, 它的一个端点 $(x = 0)$ 固定而另一端 $(x = l)$ 自由, 受一个横向负载力 $f(x)$ 支配, 作为其结果的静位移 $y(x)$

服从一个方程组

$$L[y] = \frac{d^4y}{dx^4} = -f(x), \quad 0 < x < l,$$

$$U_1[y] = y(0) = 0, \quad U_2[y] = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$$

和

$$U_3[y] = \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=l} = 0, \quad U_4[y] = \left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=l} = 0.$$

相关联的 Green 函数是什么?

16. 借助于 Green 函数分析方程组

$$L[y] = \frac{d^2}{dx^2}\left(\alpha\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \rho\omega^2 y = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$U_1[y] = y(0) = 0, \quad U_2[y] = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0,$$

$$U_3[y] = \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=l} = 0, \quad U_4[y] = \left.\frac{d}{dx}\left(\alpha\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right|_{x=l} + M\omega^2 y(l) = 0,$$

它描述一个一端 $(x = 0)$ 固定另一端 $(x = l)$ 有连接质量 M 的梁中的频率为 ω 的时间周期性的位移 $y(x, t)$.

第二十八章

Green 函数及其推广

第二十七章中有关处理适合于自伴方程组的具有对称性的 Green 函数的论述, 现在必须进一步扩大其处理问题的范围, 既要考虑非自伴组, Green 函数和本征函数之间的关系, 也要考虑 Green 函数与初值问题联系在一起时所起的作用.

首先, 考虑 Green 函数 $G(x, x')$ 的形式表示, 用它能将方程组

$$L[y] = \frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y = -f(x), \quad a < x < b, \tag{28.1}$$
$$U_1[y] = 0, \quad U_2[y] = 0$$

的解表成一个定积分, 即

$$y(x) = \int_a^b G(x, x')f(x')dx'. \tag{28.2}$$

设 $y_1(x), y_2(x)$ 表示齐次常微分方程 $L[y] = 0$ 的任一对线性无关解, 且设

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \tag{28.3}$$

作为 (28.1) 中的非齐次常微分方程的解. 用参数变异法, 对未知函数 $C_1(x)$, $C_2(x)$ 加上要求

$$\frac{d}{dx}C_1 \cdot y_1(x) + \frac{d}{dx}C_2 \cdot y_2(x) = 0,$$

注意另一要求从 (28.1) 即可得到, 即

$$\frac{d}{dx}C_1\frac{d}{dx}y_1 + \frac{d}{dx}C_2\frac{d}{dx}y_2 = -f(x).$$

这样 $\frac{dC_1}{dx}$ 和 $\frac{dC_2}{dx}$ 可用 y_1, y_2 显式地确定, 即

$$\frac{dC_1}{dx} = \frac{f(x)y_2(x)}{\Delta}, \quad \frac{dC_2}{dx} = -\frac{f(x)y_1(x)}{\Delta},$$

这里 Wronski 行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} \end{vmatrix}$$

有非零常数值.

对 $C_1(x), C_2(x)$ 的分别的一阶常微分方程的不同的积分是

$$C_1(x) = \frac{1}{\Delta}\int_a^x f(x')y_2(x')dx' + A_1,$$
$$C_2(x) = -\frac{1}{\Delta}\int_a^x f(x')y_1(x')dx' + A_2$$

和

$$C_1(x) = -\frac{1}{\Delta}\int_x^b f(x')y_2(x')dx' + B_1,$$
$$C_2(x) = \frac{1}{\Delta}\int_x^b f(x')y_1(x')dx' + B_2,$$

带有任意常数 A_1, A_2, B_1, B_2; 且从 (28.3) 得到的 (28.1) 的对应通解证明是

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \frac{1}{\Delta}\int_a^x f(x')[y_1(x)y_2(x') - y_2(x)y_1(x')]dx',$$
$$y(x) = \beta_1 y_1(x) + \beta_2 y_2(x) - \frac{1}{\Delta}\int_x^b f(x')[y_1(x)y_2(x') - y_2(x)y_1(x')]dx'.$$

上面两式相加再除以 2, 构成通解的另一形式, 即

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y^*(x), \tag{28.4}$$

这里 C_1, C_2 表示任意常数,

$$y^*(x) = \int_a^b \mathcal{G}(x, x')f(x')dx' \tag{28.5}$$

且

$$\mathcal{G}(x, x') = \frac{1}{2\Delta}[y_1(x_>)y_2(x_<) - y_2(x_>)y_1(x_<)], \tag{28.6}$$

其中记号

$x_>$ 为 x, x' 两者中的较大者,

$x_<$ 为 x, x' 两者中的较小者.

当 (28.1) 中的边界条件加到 (28.4) 上时, 结果得到决定常数 C_1, C_2 的一对线性方程组, 即

$$C_1U_1[y_1] + C_2U_1[y_2] + U_1[y^*] = 0,$$
$$C_1U_2[y_1] + C_2U_2[y_2] + U_2[y^*] = 0,$$

如果

$$D = \begin{vmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{vmatrix} \neq 0, \tag{28.7}$$

则唯一地确定 C_1, C_2. 如果以上要求得到满足, 由

$$y(x) = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y^*(x) \\ U_1[y_1] & U_1[y_2] & U_1[y^*] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & U_2[y^*] \end{vmatrix} \tag{28.8}$$

确定的函数 $y(x)$ 就表示方程组 (28.1) 的解, 因为行列式按其子式展开和行列式的两行相同时其值为零这个事实使 $y(x)$ 是解变得很清楚. 边值问题的解的积分形式 (28.2) 中的 Green 函数 $G(x,x')$ 的对应表示式是

$$G(x,x') = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \mathcal{G}(x,x') \\ U_1[y_1] & U_1[y_2] & U_1[\mathcal{G}] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & U_2[\mathcal{G}] \end{vmatrix}, \tag{28.9}$$

这里算子 U_1, U_2 作用在 $\mathcal{G}(x,x')$ 中的变量 x 上.

考虑一个具有特殊的规定的例子:

$$L[y] = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad a < x < b, \tag{28.10}$$
$$U_1[y] = y(a) = 0, \quad U_2[y] = y(b) = 0$$

和

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = x, \quad \Delta = 1,$$

所以

$$\mathcal{G}(x,x') = \frac{1}{2}(x_< - x_>);$$

由于 $D = b - a$, 表示式 (28.9) 成为

$$G(x,x') = \frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} 1 & x & \dfrac{x_< - x_>}{2} \\ 1 & a & \dfrac{a-x'}{2} \\ 1 & b & \dfrac{x'-b}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} a & \dfrac{a-x'}{2} \\ b & \dfrac{x'-b}{2} \end{vmatrix} - \frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{a-x'}{2} \\ 1 & \dfrac{x'-b}{2} \end{vmatrix} + \frac{1}{2}(x_< - x_>)$$

$$= \frac{1}{2(b-a)}[a(x'-b) - b(a-x') - x\{x'-b-(a-x')\} + (b-a)(x_< - x_>)]$$

$$= \frac{1}{2(b-a)}[(a+b)(x+x') - 2ab - 2xx' + (b-a)(x_< - x_>)]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(x-a)(b-x')}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant x', \\ \dfrac{(x'-a)(b-x)}{b-a}, & x' \leqslant x \leqslant b \end{cases}$$

和 (27.16) 中的完全一样.

其次, 假设 (28.10) 中的边界条件换成

$$U_1[y] = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = 0, \quad U_2[y] = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=b} = 0,$$

y_1, y_2 和 $\mathcal{G}$ 的显式细节不需作任何改变; 则从 (28.9) 得到的

$$G(x,x') = \frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} 1 & x & \dfrac{x_< - x_>}{2} \\ 0 & 1 & \dfrac{a-x'}{2} \\ 0 & 1 & \dfrac{x'-b}{2} \end{vmatrix} = \frac{2x' - (a+b)}{b-a}$$

与 x 无关.

上述两问题之间的不同处在于这样的事实: 后者的齐次方程的边值问题存在非平凡解, 即方程组

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad a < x < b, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad x = a, b$$

容许有解 $y_1(x) = 1$; 在这种情形, 非齐次方程组

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -f(x), \quad a < x < b, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad x = a, b$$

的解不唯一, 而且为了展示所有解对任意函数 $f(x)$ 的依赖性就要求一个修正 Green 函数.

设 $y_0(x)$ 表示方程组

$$L[y] = \frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y = 0, \quad a < x < b, \tag{28.11}$$
$$U_1[y] = 0, \quad U_2[y] = 0$$

的一个非平凡解且满足规范化

$$\int_a^b y_0^2(x)dx = 1; \tag{28.12}$$

如以前所指出的, 为了对应的非齐次方程组 (28.1) 有解, 要求满足条件

$$\int_a^b y_0(x)f(x)dx = 0. \tag{28.13}$$

由于 y_0 的任意常数倍数加上非齐次方程组 (28.1) 的解 $y(x)$ 仍然是 (28.1) 的解, 所以要附加条件

$$\int_a^b y(x)y_0(x)dx = 0 \tag{28.14}$$

以得到唯一解, 这个条件表示 y 和 y_0 的正交性.

构造修正 Green 函数的那些方程中, 方程对

$$L[G] = \left(\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right)G(x,x') = -y_0(x)y_0(x'), \quad x \gtrless x' \tag{28.15}$$

和

$$\int_a^b G(x,x')y_0(x)dx = 0 \tag{28.16}$$

没有类似于前面的等价方程. 另外的方程与对普通 Green 函数的以前的方程是相同的, 即假设 G 在 (a,b) 上关于 x, x' 连续地变化,

$$U_1[G] = 0, \quad U_2[G] = 0 \tag{28.17}$$

和

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x'-0}^{x=x'+0} = 1.$$

对 $G(x,x')$ 和如 (28.1) 所确定的 $y(x)$ 用 Green 公式, 得出

$$y(x')\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x'-0}^{x=x'+0} = y(x') = \int_a^b [G(x,x')f(x) + y_0(x)y_0(x')y(x)]dx$$
$$= \int_a^b G(x,x')f(x)dx, \tag{28.18}$$

这里利用了条件 (28.14); 这样, 假定存在广义 Green 函数, 就得到了方程组 (28.1) 的解的一个积分表示.

借助于三个不同函数 $y_0(x), y_1(x)$ 和 $Y(x)$, 一个广义 Green 函数的实际构造是可能的; 这里前两个函数是齐次常微分方程: $L[y]=0$ 的解, 而第三个满足非齐次常微分方程:

$$L[y] = -y_0(x)y_0(x').$$

假设 $y_0(x), y_1(x)$ 按 (28.12) 规范化且有关系式

$$\begin{vmatrix} y_0(x) & y_1(x) \\ \dfrac{dy_0}{dx} & \dfrac{dy_1}{dx} \end{vmatrix} = 1, \tag{28.19}$$

而 $Y(x)$ 的确定形式是用一对初始条件来选出, 例如给定 $Y(a)$ 和 $\left.\dfrac{dY}{dx}\right|_{x=a}$. 由假设

$$U_1[y_0]=0, \quad U_2[y_0]=0,$$

考虑到 y_0, y_1 的线性无关性, 所以

$$U_1[y_1]\neq 0, \quad U_2[y_1]\neq 0,$$

此外, 一般有

$$U_1[Y]\neq 0, \quad U_2[Y]\neq 0.$$

修正 Green 函数除了遵从一个常微分方程外, 必须满足四个要求, 即处处连续性和 (28.17) 的三个条件, 为了得到其表示式, 引入互补表示式

$$G(x,x') = \begin{cases} Y(x) + C_0 y_0(x) + C_1 y_1(x), & x < x', \\ Y(x) + \overline{C}_0 y_0(x) + \overline{C}_1 y_1(x), & x > x', \end{cases} \tag{28.20}$$

它包含同样个数的可自由支配的常数.

加边界条件以得到 C_1 和 $\overline{C}_1$ 的唯一确定值, 由于它们的系数在线性方程组

$$\begin{aligned} U_1[Y] + C_1 U_1[y_1] &= 0, \\ U_2[Y] + \overline{C}_1 U_2[y_1] &= 0 \end{aligned} \tag{28.21}$$

中不为零. 在 $x=x'$ 处 G 的连续性要求和其导数的不连续性, 产生一对方程

$$(\overline{C}_0 - C_0)y_0(x') + (\overline{C}_1 - C_1)y_1(x') = 0$$

和

$$(\overline{C}_0 - C_0)\left.\frac{dy_0}{dx}\right|_{x=x'} + (\overline{C}_1 - C_1)\left.\frac{dy_1}{dx}\right|_{x=x'} = 1,$$

由此用约定 (28.19), 得到

$$\begin{aligned}\overline{C}_0 - C_0 &= -y_1(x'),\\ \overline{C}_1 - C_1 &= y_0(x').\end{aligned} \tag{28.22}$$

从它们之中, (28.21) 和 (28.22) 确定 (28.20) 中的所有四个系数; 再改写正交性条件 (28.14), 即

$$\int_a^b G(x,x')y_0(x)dx = 0, \tag{28.23}$$

完成修正 Green 函数的唯一确定.

考虑简单情形, 其中

$$L[y] = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad U_1[y] = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = 0, \quad U_2[y] = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=b} = 0,$$

且式子

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{b-a}}, \quad y_1 = \sqrt{b-a}x, \quad Y(x) = -\frac{x^2}{2(b-a)} + Ax$$

是适合的. 这样

$$G(x,x') = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2(b-a)} + Ax + \dfrac{C_0}{\sqrt{b-a}} + C_1\sqrt{b-a}x, & a \leqslant x \leqslant x' < b,\\ -\dfrac{x^2}{2(b-a)} + Ax + \dfrac{\overline{C}_0}{\sqrt{b-a}} + \overline{C}_1\sqrt{b-a}x, & a < x \leqslant x' \leqslant b, \end{cases} \tag{28.24}$$

且条件 (28.21),(28.22) 成为

$$\begin{aligned} &\left(A + C_1\sqrt{b-a}\right) = \frac{a}{b-a},\\ &\left(A + \overline{C}_1\sqrt{b-a}\right) = \frac{b}{b-a},\\ &\overline{C}_0 - C_0 = -x'\sqrt{b-a},\\ &(\overline{C}_1 - C_1)\sqrt{b-a} = 1, \end{aligned} \tag{28.25}$$

这里最后的式子显然和前两个相容. 借助于后面的一对重写 (28.24), 即

$$G(x,x') = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2(b-a)} + \dfrac{ax}{b-a} + \dfrac{C_0}{\sqrt{b-a}}, & a \leqslant x \leqslant x' < b,\\ \dfrac{x^2}{2(b-a)} + \dfrac{ax}{b-a} + \dfrac{\overline{C}_0}{\sqrt{b-a}}, & a < x' \leqslant x \leqslant b, \end{cases} \tag{28.26}$$

且利用正交性条件 (28.23), 由此得出

$$\int_a^{x'} \left[-\frac{x^2}{2(b-a)} + \frac{ax}{b-a} + \frac{C_0}{\sqrt{b-a}}\right] dx + \int_{x'}^b \left[-\frac{x^2}{2(b-a)} + \frac{bx}{b-a} + \frac{\overline{C}_0}{\sqrt{b-a}}\right] dx = 0$$

或

$$C_0(b-x')+C_0(x'-a)=\frac{x'^2}{2}\sqrt{b-a}-\frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{\sqrt{b-a}}. \tag{28.27}$$

根据线性方程组 (28.25) 和 (28.27) 决定 C_0 和 $\overline{C}_0$ 后, 代入 (28.26), 修正 Green 函数最后是

$$G(x,x')=\begin{cases}-\dfrac{x^2+x'^2}{2(b-a)}+\dfrac{ax+bx'}{b-a}-\dfrac{1}{3}\dfrac{b^2+ab+a^2}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant x'<b,\\ -\dfrac{x^2+x'^2}{2(b-a)}+\dfrac{ax'+bx}{b-a}-\dfrac{1}{3}\dfrac{b^2+ab+a^2}{b-a}, & a<x'\leqslant x\leqslant b,\end{cases} \tag{28.28}$$

清晰地显示出它的对称性

$$G(x,x')=G(x',x).$$

如果 Green 函数常微分方程包含一个参数 λ 且此参数作为自变量出现, 如记号 $G(x,x',\lambda)$ 所显示的; 以前描述的构造程序仍然可用, 例如, 得出表示式

$$G(x,x',\lambda)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x_<-a)\sin\sqrt{\lambda}(b-x_>)}{\sin\sqrt{\lambda}(b-a)}, \tag{28.29}$$

与定义方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda\right)G(x,x',\lambda)=0,\quad x\neq x',\quad a<x<b,$$
$$G(a,x',\lambda)=0,\quad G(b,x',\lambda)=0 \tag{28.30}$$

和

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x'-0}^{x=x'+0}=1$$

相结合. 作为参数 λ 的函数, G 的奇点通过关系式

$$\sin\sqrt{\lambda}(b-a)=0,\quad \lambda\neq 0$$

确定, 由此得出一个序列

$$\sqrt{\lambda_n}=\frac{n\pi}{b-a},\quad n=\pm1,\pm2,\cdots \tag{28.31}$$

它也刻画由

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda\right)y=0,\quad a<x<b, \tag{28.32}$$
$$y(a)=0,\quad y(b)=0$$

描述的齐次边值问题的本征值.

对 Green 函数 (28.29) 有借助于 (28.32) 的本征函数

$$y_n(x) = \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a}$$

和本征值 λ_n 来表示的另一个表示式. 为推断出它的具体形式, 注意根据 Taylor 展式有估计

$$\begin{aligned}\sin\sqrt{\lambda}(b-a) &= \sin n\pi + (\lambda-\lambda_n)\cdot\frac{b-a}{2\sqrt{\lambda_n}}\cos n\pi + \cdots \\ &= (\lambda-\lambda_n)\cdot\frac{(-1)^n}{2\sqrt{\lambda_n}}(b-a) + 0((\lambda-\lambda_n)^3), \quad \lambda\to\lambda_n\end{aligned}$$

和得到的极限

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda-\lambda_n)G &= \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(x_< - a)\sin\sqrt{\lambda_n}(b-x_>)}{\frac{b-a}{2}(-1)^n} \\ &= \frac{\sin\frac{n\pi}{b-a}(x_< - a)\sin\frac{n\pi}{b-a}(b-x_>)}{\frac{b-a}{2}(-1)^n} \\ &= \frac{\sin\frac{n\pi}{b-a}(x_< - a)\sin\frac{n\pi}{b-a}(x_> - a)}{\frac{b-a}{2}},\end{aligned}$$

它引出一个表示式

$$\begin{aligned}G(x,x',\lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\sin\frac{n\pi}{b-a}(x'-a)}{\frac{b-a}{2}(\lambda-\lambda_n)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(x')}{(\lambda-\lambda_n)},\end{aligned} \tag{28.33}$$

这里

$$\varphi_n(x) = \frac{\sin\frac{n\pi}{b-a}(x-a)}{\sqrt{\frac{b-a}{2}}}$$

表示规范化的本征函数, 即

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = 1, \quad n = 1, 2, \cdots$$

考虑以下的齐次方程组

$$L[y]=\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0,\quad 0<x<1,$$

$$U_1[y]=y(0)=0,\quad U_2[y]=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}-y(1)=0 \tag{28.34}$$

其中第二个边界条件是混合的, 即包含两个端点坐标. 有非平凡解, 即本征函数, 它们有形式

$$y(x)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$$

且对应本征值 λ_n, 满足

$$\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}}=1.$$

显然 $\lambda_0=0$ 是一个本征值, 相应的本征函数为

$$y_0(x)=x.$$

其他的本征值有无穷多个, 是复值的, 即

$$\sqrt{\lambda_n}=\mu_n+i\nu_n;$$

由于

$$\sin\sqrt{\lambda_n}=\sin\mu_n\cosh\nu_n+i\cos\mu_n\sinh\nu_n,$$

从

$$\sin\mu_n\cosh\nu_n=\mu_n,\quad \cos\mu_n\sinh\nu_n=\nu_n$$

确定 μ_n,ν_n, 且可以验证其渐近估计为

$$\sqrt{\lambda_n}\sim\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi-\frac{\ln 2n\pi}{n\pi}\pm i\ln 2n\pi,\quad n\gg 1.$$

实本征函数 $y_0(x)$ 和复值本征函数 $y_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}x$ 不构成正交集这一事实可能和所述边值问题 (28.34) 的非自伴性质有关. 应用 Green 公式和 y 的边界条件得出关系式

$$\begin{aligned}\int_0^1\left[z\frac{d^2y}{dx^2}-y\frac{d^2z}{dx^2}\right]dx&=z(1)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}-z(0)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}\\&\quad-y(1)\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=1}+y(0)\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0}\\&=z(1)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}-\left[\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=1}+z(0)\right]y(1),\end{aligned}$$

所以伴随边界条件证明是

$$z(1)=0, \quad \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=1}+z(0)=0.$$

用方程组

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda\right)\widetilde{G}=0, \quad x\neq x', \quad 0<x,x'<1,\\ \widetilde{G}(1,x',\lambda)=0, \quad \left.\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{G}(x,x',\lambda)\right|_{x=1}+\widetilde{G}(0,x',\lambda)=0, \\ \left.\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{G}\right|_{x=x'-0}^{x=x'+0}=1\end{gathered} \tag{28.35}$$

定义伴随 Green 函数 $\widetilde{G}(x,x',\lambda)$, 这里 λ 是一个任意参数; 且引入复合形式

$$\widetilde{G}=\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}|x-x'|\right)}{2\sqrt{\lambda}}+A(x')\cos\left(\sqrt{\lambda}(1-x)\right)+B(x')\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}(1-x)\right)}{\sqrt{\lambda}},$$

其中第一项在 $x=x'$ 处关于 x 的导数有间断 1, 而后面两项都是由算子 $L=\frac{d^2}{dx^2}+\lambda$ 构成的齐次常微分方程的光滑解. 加上边界条件就可确定系数函数 $A(x'),B(x')$ 且得出确定的表示式

$$\begin{aligned}\widetilde{G}(x,x',\lambda)=&\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left[\sin\left(\sqrt{\lambda}|x-x'|\right)-\sin\left(\sqrt{\lambda}(x-x')\right)\right]\\&+\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}(1-x)\right)}{\sqrt{\lambda}}\frac{\sin\sqrt{\lambda}x'}{\sqrt{\lambda}}\frac{1}{1-\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}};\end{aligned}$$

这样 $\widetilde{G}$ 不是 x,x' 的对称函数, 且作为 λ 的函数, 其奇点出现在使

$$1-\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}}=0$$

的点 λ_n 处, 即在 λ 平面上本征值 λ_n 的位置上.

如果 $\lambda\neq\lambda_n$, 方程组

$$\begin{gathered}\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda\right)y=-f(x), \quad 0<x<1,\\ y(0)=A, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}-y(1)=B\end{gathered} \tag{28.36}$$

有由

$$y(x')=\int_0^1\widetilde{G}(x,x',\lambda)f(x)dx+B\widetilde{G}(0,x',\lambda)-A\left.\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{G}\right|_{x=0} \tag{28.37}$$

或

$$y(x)=\int_0^1 G(x,x',\lambda)f(x')dx'+BG(x,0,\lambda)-A\frac{\partial}{\partial x'}G\bigg|_{x'=0}$$

表示的唯一解. 这里

$$G(x,x',\lambda)=\widetilde{G}(x',x,\lambda) \tag{28.38}$$

且

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda\right)G=0,\quad x\neq x',\\ G(0,x',\lambda)=0,\quad \frac{\partial}{\partial x}G\bigg|_{x=0}-G(0,x',\lambda)=0,\\ \frac{\partial}{\partial x}G\bigg|_{x=x'-0}^{x=x'+0}=1.\end{gathered} \tag{28.39}$$

在现在情形下, 与所属的微分算子和边界条件的对称 Green 函数和本征函数/本征值之间的关系式 (28.33) 有一个对应部分; 这样就涉及具有共同本征值集合的原来的方程组及其伴随方程组的本征函数. 为揭示这种关系, 注意 Maclaurin (麦克劳林, 1698 — 1746) 展开式

$$1-\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}=\lambda\frac{d}{d\lambda}\left(1-\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)\bigg|_{\lambda=0}+0(\lambda^2)=\frac{\lambda}{6}+0(\lambda^2),$$

及其推论

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda\widetilde{G}=\frac{x'(1-x)}{6},$$

这里

$$z_0=1-x \tag{28.40}$$

是伴随方程组

$$\begin{gathered}\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda\right)z(x)=0,\quad 0<x<1,\\ z(1)=0,\quad \frac{dz}{dx}\bigg|_{x=1}+z(0)=0\end{gathered} \tag{28.41}$$

的一个本征函数. 引用 Taylor 展开式

$$\begin{aligned}1-\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}&=-(\lambda-\lambda_n)\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)_{\lambda=\lambda_n}+0((\lambda-\lambda_n)^2)\\ &=\frac{\lambda-\lambda_n}{2\sqrt{\lambda_n}}\left(1-\cos\sqrt{\lambda_n}\right)+0((\lambda-\lambda_n)^2),\end{aligned}$$

由此推导出

$$\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda-\lambda_n)\widetilde{G}=\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(1-x)\sin\sqrt{\lambda_n}x'}{\frac{1}{2}(1-\cos\sqrt{\lambda_n})},$$

这里

$$z_n(x)=\sin\left(\sqrt{\lambda_n}(1-x)\right) \tag{28.42}$$

是方程组 (28.41) 的一个本征函数.

具有同一定义方程的不同的边值问题 (28.34),(28.41) 的成对的本征函数

$$y_0(x)=x,\quad z_0(x)=1-x$$

和

$$y_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}x,\quad z_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}(1-x)$$

是互相正交的, 即

$$\int_0^1 y_n(x)z_m(x)dx=0,\quad n\neq m,$$

且规范化积分有值

$$\int_0^1 y_0(x)z_0(x)dx=\frac{1}{6}=N_0,$$

$$\int_0^1 y_n(x)z_n(x)dx=\frac{1}{2}(1-\cos\sqrt{\lambda_n})=N_n,\quad n\neq 0;$$

所以可推断出表示式

$$\widetilde{G}(x,x',\lambda)=\frac{z_0(x)y_0(x')}{\lambda N_0}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z_n(x)y_n(x')}{(\lambda-\lambda_n)N_n}. \tag{28.43}$$

方程组

$$L[y]=\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda_m\right)y=-f(x),\quad 0<x<1;$$

$$U_1[y]=y(0)=0,\quad U_2[y]=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}-y(1)=0$$

容许有解, 如果相容性条件

$$\int_0^1 f(x)z_m(x)dx=0$$

成立; 而适用于刻画满足非齐次边界条件的解的伴随 Green 函数是

$$\widetilde{G}(x,x'\lambda_m)=\frac{z_0(x)y_0(x')}{\lambda_m N_0}+\sum_{n\neq m}^{\infty}\frac{z_n(x)y_n(x')}{(\lambda_m-\lambda_n)N_n}. \tag{28.44}$$

描述伴随方程组的共同特征是有启发性的, 例如, 一对带有非混合边界条件的伴随方程组

$$
\begin{aligned}
L[y] &= p_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0,\\
\widetilde{L}[z] &= \frac{d^2}{dx^2}(p_0(x)z(x)) - \frac{d}{dx}(p_1(x)z(x)) + p_2(x)z(x) = 0,\\
&\quad p_0(x) \neq 0, a < x < b,\\
U_1[y] &= \alpha y(a) + p_0(a)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = 0, \qquad (28.45)\\
V_1[z] &= \left.\frac{d}{dx}(p_0(x)z(x))\right|_{x=a} + (\alpha - p_1(a))z(a) = 0,\\
U_2[y] &= \beta y(b) + p_0(b)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=b} = 0,\\
V_2[z] &= \left.\frac{d}{dx}(p_0(x)z(x))\right|_{x=b} + (\beta - p_1(b))z(b) = 0.
\end{aligned}
$$

上面两个方程组在以下意义下是对偶的: 如果一个有平凡解则另一个也如此, 反之亦然; 此外, 两者可能只有一个平凡解. 为检验这些断言, 引入函数 $y(x), z(x)$ 之间的一个关系式

$$
z(x) = \frac{y(x)}{p_0(x)}\exp\left(\int_c^x \frac{p_1(x')}{p_0(x')}dx'\right); \qquad (28.46)
$$

直接对它微分后得出

$$
\begin{aligned}
\widetilde{L}[z] &= \frac{L[y]}{p_0(x)}\exp\left(\int_c^x \frac{p_1(x')}{p_0(x')}dx'\right),\\
V_1[z] &= \frac{U_1[y]}{p_0(a)}\exp\left(\int_c^a \frac{p_1(x')}{p_0(x')}dx'\right)
\end{aligned}
$$

和

$$
V_2[z] = \frac{U_2[y]}{p_0(b)}\exp\left(\int_c^b \frac{p_1(x')}{p_0(x')}dx'\right).
$$

所以, 如果 $y(x)$ 表示由 (28.45) 定义的方程组的一个解, 则由 (28.46) 确定的 $z(x)$ 表示其伴随方程组的一个解; 反之, 如果 $z(x)$ 满足该伴随方程组, 则函数

$$
y(x) = p_0(x)z(x)\exp\left(-\int_c^x \frac{p_1(x')}{p_0(x')}dx'\right)
$$

满足原来方程组.

设原来方程组只容许有一个平凡解; 在这种情形下相应的非齐次方程组

$$\begin{aligned} L[y] &= -f(x), \quad a < x < b, \\ U_1[y] &= A, \quad U_2[y] = B \end{aligned} \tag{28.47}$$

有唯一解, 即

$$y(x) = A\widetilde{G}(a,x) - B\widetilde{G}(b,x) + \int_a^b \widetilde{G}(x',x)f(x')dx', \tag{28.48}$$

它是用一个 Green 函数 $\widetilde{G}(x,x')$ 来表示的, $\widetilde{G}$ 由

$$\begin{gathered} \widetilde{L}[\widetilde{G}] = 0, \quad x \neq x', \quad a < x, x' < b, \\ V_1[\widetilde{G}] = 0, \quad V_2[\widetilde{G}] = 0 \end{gathered} \tag{28.49}$$

和

$$\left.\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial x}\right|_{x=x'-0}^{x=x'+0} = \frac{1}{p_0(x')}$$

来确定.

为构造这个 Green 函数, 令 $z_1(x), z_2(x)$ 表示齐次方程组

$$\begin{aligned} \widetilde{L}[z_1] = 0, \quad \widetilde{L}[z_2] = 0, \\ V_1[z_1] = 0, \quad V_2[z_2] = 0 \end{aligned} \tag{28.50}$$

的一对无关解, 采用表示式

$$\widetilde{G}(x,x') = \begin{cases} \mu_1(x')z_1(x), & a \leqslant x \leqslant x', \\ \mu_2(x')z_2(x), & x' \leqslant x \leqslant b \end{cases} \tag{28.51}$$

以满足 (28.49) 中的常微分方程和边界条件. 其次按照关系式

$$\begin{gathered} \mu_1(x')z_1(x') - \mu_2(x')z_2(x') = 0, \\ \mu_1(x') \left.\frac{d}{dx}z_1\right|_{x=x'} - \mu_2(x') \left.\frac{d}{dx}z_2\right|_{x=x'} = -\frac{1}{p_0(x')} \end{gathered}$$

来选取 $\mu_1(x'), \mu_2(x')$, 它保证了 $\widetilde{G}$ 的处处连续及其导数在 $x = x'$ 处所约定的不连续; 然后就确定了

$$\mu_1(x') = \frac{z_2(x')}{p_0(x')W(z_1,z_2)_{x=x'}}, \quad \mu_2(x') = \frac{z_1(x')}{p_0(x')W(z_1,z_2)_{x=x'}}, \tag{28.52}$$

这里

$$W(z_1(x), z_2(x)) = z_1(x)\frac{dz_2}{dx} - z_2(x)\frac{dz_1}{dx}$$

是 z_1, z_2 的 Wronski 行列式.

如果函数 z_1, z_2 通过关系式 (28.46) 与来自其伴随方程组的一对函数 y_1, y_2 相联系, 则关系式

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} \tag{28.53}$$

或

$$\frac{d}{dx} \ln \frac{y_2}{y_1} = \frac{d}{dx} \ln \frac{z_2}{z_1}$$

产生一个包含其 Wronski 行列式的关系式, 即

$$\frac{W(y_1, y_2)}{y_1 y_2} = \frac{W(z_1, z_2)}{z_1 z_2}. \tag{28.54}$$

由于规范化形式

$$W(y_1, y_2) = \exp\left(-\int_c^x \frac{p_1(x')}{p_0(x')} dx'\right), \quad W(y_1(c), y_2(c)) = 1$$

适用于常微分方程 $L[y] = 0$ 的线性无关解 y_1, y_2, (28.46) 的随之得出的变化形式

$$z_1(x) = \frac{y_1(x)}{p_0(x) W(y_1, y_2)}, \quad z_2(x) = \frac{y_2(x)}{p_0(x) W(y_1, y_2)}$$

通过 (28.54) 得到等式

$$\frac{W(z_1, z_2)}{z_1 z_2} = \frac{1}{p_0 y_1 z_2} = \frac{1}{p_0 y_2 z_1};$$

所以 (28.52) 能简化, 即:

$$\mu_1(x') = y_2(x'), \quad \mu_2(x') = y_1(x').$$

所以

$$\widetilde{G}(x, x') = \begin{cases} y_2(x') z_1(x) = \dfrac{y_2(x') y_1(x')}{p_0(x') W(y_1, y_2)|_{x=x'}}, & a \leqslant x \leqslant x', \\ y_1(x') z_2(x) = \dfrac{y_1(x') y_2(x)}{p_0(x') W(y_1, y_2)|_{x=x'}}, & x' \leqslant x \leqslant b \end{cases} \tag{28.55}$$

表示与包含伴随微分算子 $\widetilde{L}, V_1, V_2$ 的方程组 (28.49) 相应的 Green 函数, 且显然

$$G(x, x') = \widetilde{G}(x', x) = \begin{cases} y_2(x) z_1(x'), & x' \leqslant x \leqslant b, \\ y_1(x) z_2(x'), & a \leqslant x \leqslant x' \end{cases} \tag{28.56}$$

刻画与算子 L, U_1 和 U_2 相应的 Green 函数.

当 (28.45) 的两个齐次方程组有非平凡解时, 其本身呈现不同情况, 例如 $y_0(x)$ 和 $z_0(x)$ 是具有形如 (28.46) 的关系的非平凡解; 则

$$\int_a^b y_0(x)z_0(x)dx = \int_a^b \frac{y_0^2(x)}{p_0(x)} \exp\left(\int_c^x \frac{p_1(x')}{p_0(x')}dx'\right) dx \neq 0 \tag{28.57}$$

由于第二个被积函数保持固定符号. (28.57) 是证明特殊的非齐次方程组

$$L[y] = y_0(x), \qquad \widetilde{L}[z] = z_0(x), \tag{28.58}$$
$$U_1[y] = 0, \quad U_2[y] = 0, \quad V_1[z] = 0, \quad V_2[z] = 0$$

不存在非平凡解的关键; 为此, 用 Green 公式

$$\int_a^b \left[zL[y] - y\widetilde{L}[z]\right]dx = zU[y] - yV[z]\Big|_{x=a}^{x=b},$$

选取

$$y = y_0(x), \quad z = z(x),$$

这里

$$L[y_0] = 0, \quad \widetilde{L}[z] = z_0(x),$$

利用分别的齐次边界条件, 得出

$$\int_a^b y_0(x)z_0(x)dx = 0,$$

它与 (28.57) 矛盾. 取

$$y = y(x), \quad z = z_0(x)$$

满足

$$L[y] = y_0(x), \quad \widetilde{L}[z_0] = 0,$$

以后可得到同样的结论.

鉴于上面的发现, 去寻求 (28.58) 中两个方程组的具有像一阶导数在 (a, b) 中单独一个点 x' 失去连续性那样的较少正则性的解是合适的, 具体说, 伴随方程组的这样一个解或广义 Green 函数 $\widetilde{G}$ 的条件包括

$$\widetilde{L}[\widetilde{G}] = -\frac{y_0(x')z_0(x)}{N}, \quad x \neq x' \quad a < x, x' < b,$$
$$N = \int_a^b y_0(x)z_0(x)dx, \quad V_1[\widetilde{G}] = 0, \quad V_2[\widetilde{G}] = 0, \tag{28.59}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{G}\Big|_{x=x'-0}^{x=x'+0} = \frac{1}{p_0(x')}$$

和

$$\int_a^b \widetilde{G}(x,x')z_0(x)dx = 0.$$

注意上述常微分方程的非齐次项与当有自伴性质 $L=\widetilde{L}$ 时广义 Green 函数 (28.15) 中的非齐次项的形式相同. 构造方程组 (28.59) 的解的问题留作后面的习题.

Green 函数将会出现在本书的后面部分, 且不仅是用常微分算子定义的那些; 不过随后的观察将使人们很好地感受到与偏微分方程问题相联系的 Green 函数的变体的重要性. 设 $y(x,t), t>0$ 表示对变量 t 有 Laplace 变换式的一个函数, 即

$$Y(x,p) = \int_0^\infty e^{-pt} y(x,t)dt, \quad \mathrm{Re}\, p > c.$$

把这个积分变换应用于 $y(x,t)$ 的一个线性偏微分方程 (当方程的系数是常数时, 确实) 给出了 $Y(x,p)$ 的关于 x 的一个常微分方程, 其中 p 是参数, 非齐次项由 $y(x,t)$ 及其关于 t 的导数在 $t=0$ 的指定值确定. 所以这常微分方程的解可借助于一个适当的 Green 函数 $G(x,x',p)$ 表出, 此后原偏微分方程的解从反演积分得出, 即

$$y(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int e^{pt} Y(x,p)dp,$$

这里的积分围线在 p 平面中适当地选取.

习 题 28

1. 求满足以下条件的 Green 函数 $G(\rho,\rho')$ 的显式表达式:

$$\left[\frac{\partial}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right]G = 0, \quad \rho\neq\rho', \quad b<\rho,\rho'<a,$$

$$G(b,\rho')=0, \quad G(a,\rho')=0 \tag{i}$$

和

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}G\Big]_{\rho=\rho'-0}^{\rho=\rho'+0} = -1.$$

将变量 ρ,ρ' 或 $\rho_>,\rho_<$ 换成另一对 σ,σ' 使得

$$\rho_> = a[1-\sigma_<], \quad \rho_< = a[1-\sigma_>], \tag{ii}$$

验证幂级数表示式

$$G = \sum_{n=1}^\infty \frac{\sigma_<^n}{n} + \frac{1}{\ln[1-\epsilon]}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sigma^n}{n}\sum_{m=1}^\infty \frac{\sigma'^m}{m}, \tag{iii}$$

这里

$$\epsilon = 1 - \frac{b}{a},$$

且用到了关系式

$$\ln[1-z] = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1.$$

在一长共轴圆柱 $(b < \rho < a)$ 内被一固定压力梯度所驱赶的黏性流体的定常轴向速度 $u(\rho)$ 满足方程组

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right] u = -A, \tag{iv}$$

$$u(b) = 0, \quad u(a) = 0,$$

这里后面一对是无滑边界条件. 用 Green 函数 (iii) 去确定

$$\begin{aligned} u(\sigma) &= Aa^2 \int_0^{\epsilon} G(\sigma,\sigma')(1-\sigma')d\sigma' \\ &= Aa^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{\sigma^{n+1}}{n+1} - \frac{\sigma^{n+2}}{n+2}\right] + Aa^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^n}{n}\left[\epsilon - \sigma - \frac{1}{2}\epsilon^2 + \frac{1}{2}\sigma^2\right] \\ &\quad + \frac{Aa^2}{\ln(1-\epsilon)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^n}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left[\frac{\epsilon^{m+1}}{m+1} - \frac{\epsilon^{m+2}}{m+2}\right] \end{aligned} \tag{v}$$

且考察分别的极限情形

$$\sigma = 0 \quad (\rho = a), \quad \sigma = \epsilon \quad (\rho = b).$$

当 $b \to 0$ 和圆柱形流区域只有外边界时导出 $u(\sigma)$ 和 $u(\rho)$ 的式子.

直接求解 (iv) 提供了一个简单解析结果

$$u(\rho) = \frac{A}{4}\left[a^2 - \rho^2 + (a^2 - b^2)\frac{\ln \dfrac{a}{\rho}}{\ln \dfrac{b}{a}}\right],$$

然而如果 $\epsilon = 1 - \dfrac{a}{b} \to 0$, 它本身不容易提供精细的近似式, 因而这里结果 (v) 证明是有好处的.

2. 假设与自伴线性算子

$$L = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x) \tag{i}$$

和一对边界算子 U_1, U_2 相关联的普通 Green 函数不能找到, 由于齐次方程组

$$L[y] = 0, \quad a < x < b, \qquad U_1[y] = 0, \quad U_2[y] = 0 \tag{ii}$$

存在具有连续一阶导数的非平凡光滑解, 例如说 $y = y_0(x)$. 考虑非线性常微分方程

$$L[G] = -y_0(x)y_0(x'), \tag{iii}$$

用来定义一个修正 Green 函数 $G(x, x')$; 且回顾以下关系式 (参看 (27.4)), 对算子 L 的齐次常微分方程的任一对解 y, z, 若它们在 (a, b) 内的分别点 x', x'' 处有不连续的一阶导数, 则有

$$\begin{aligned}\int_a^b [zL[y] - yL[z]]dx = p(x)\left[z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right]_{x=a}^{x=b} \\ -p(x')z(x')\left[\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x'+0} - \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x'-0}\right] \\ +p(x'')z(x'')\left[\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x''+0} - \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x''-0}\right].\end{aligned} \tag{iv}$$

特别地, 选取

$$y = G(x, x'), \quad z = y_0(x),$$

且假设

$$p(x)\left[z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right]_{x=a}^{x=b} = 0; \tag{v}$$

如果

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x'-0}^{x=x'+0} = \frac{1}{p(x')},$$

由 (iv) 能推断出关于 $y_0(x)$ 的什么条件?

当条件

$$\int_a^b G(x, x')y_0(x)dx = 0$$

成立时, 用 (iv) 去推演出 G 的对称性.

3. 考虑方程组

$$L[y] = \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad -1 < x < 1,$$

$$U_1[y] = y(-1) - y(1) = 0, \quad U_2[y] = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} - \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=+1} = 0,$$

它包括了周期边界条件. 证明存在一个修正 Green 函数, 即

$$G(x,x') = \frac{x-x'}{2} + \frac{(x-x')^2}{4} + \frac{1}{6};$$

列举它的具体性质并证明所有这些被满足.

4. 二阶常微分方程

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] = (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} = 0, \quad -1 < x < 1 \qquad \text{(i)}$$

有自伴形式且有一个令人感兴趣的特征, 它起源于最高阶导数的系数函数 $p(x) = 1 - x^2$ 在区间的两端点 $x = \pm 1$ 处为零这一事实; 这样

$$(1-x^2)\left[z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right]_{x=-1}^{x=+1} = 0$$

且边界项对连结一对解 y, z 的关系式 (见问题 1 中的 (iv)) 无贡献. 取代显式边界条件, 要求解在 $x = \pm 1$ 的正则性或有限性就足够了, 因而得到一个完全的自伴方程组. $x = \pm 1$ 是常微分方程 $L[y] = 0$ 的奇点反映在一对基本解

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \ln\frac{1+x}{1-x}$$

中, 即 y_2 在 $x = \pm 1$ 处变成无穷.

验证: 选取非齐次常微分方程

$$L[y] = -\frac{1}{2}$$

且用其特解

$$y = \frac{1}{4}\ln(1-x^2)$$

来构造一个修正 Green 函数

$$G(x,x') = \frac{1}{2} - \ln\ 2 + \frac{1}{2}\ln[(1-x_<)(1+x_>)] \qquad \text{(ii)}$$

使得

$$\int_{-1}^{+1} G(x,x')dx = 0.$$

5. 前一问题中考虑的这种类型的微分算子 L 与旋转弦的运动有关, 假设有均匀密度 ρ 和长度 l 的弦在一端被缚牢到一刚性支柱上且绕后者以均匀角速度 Ω 旋转; 如果重力和空气摩擦力忽略不计, 有一运动的平衡态, 在那里该弦以线性形式在一确定平面内旋转. 从这平衡曲线的偏离是可行的, 特别是,

可包括沿旋转平面的法向的位移. 设作为时间 t 和离支撑点的距离 x 的函数 $y(x,t)$ 表示离旋转平衡线的位移. 在位于 x 和 $x+dx$ 之间的一个质量元素 ρdx 上有离心力 $\rho\Omega^2 xdx$, 所以弦中的纯张力 $T(x)$ 由离支点 (x,l) 的所有元素上的力相加得出, 等于

$$T(x)=\rho\Omega^2\int_x^l xdx=\frac{1}{2}\rho\Omega^2(l^2-x^2).$$

当这表示式用到小幅度弦位移的运动方程

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

上, 得出

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(l^2-x^2)\frac{\partial y}{\partial x}\right]=\frac{2}{\Omega^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{i}$$

与密度无关. 分别根据比例尺度 $l,\dfrac{\sqrt{2}}{\Omega}$ 用无量纲变量 x,t 表示, 动力学方程 (i) 变成

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial y}{\partial x}\right]=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},\quad 0<x<1. \tag{ii}$$

(ii) 的分离变量和时间周期解

$$y(x,t)=X(x)\cos\omega t \tag{iii}$$

与满足常微分方程

$$L[x]=\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dX}{dx}\right]=-\lambda X,\quad \lambda=\omega^2,\quad 0<x<1 \tag{iv}$$

的坐标因子 $X(x)$ 相结合, 该方程是前面问题中方程的变体, 因为现在有一个参数 λ. 给定与该弦振动有关的边界条件

$$X(0)=0,\quad X(l)\ \text{有限}, \tag{v}$$

对由方程组

$$LG=0,\quad x\neq x',$$

$$G(0,x')=0,\quad G(1,x')\ \text{有限},$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x'-0}^{x=x'+0}=\frac{1}{1-x'^2}$$

定义的 Green 函数, 导出互补的表示式

$$G(x,x')=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}, & 0\leqslant x\leqslant x',\\[2mm] \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x'}{1+x'}, & x'\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}\tag{vi}$$

注意积分方程

$$X_n(x)=\lambda_n\int_0^1 G(x,x')X_n(x')dx',$$

它刻画容许振动的本征函数和本征值 (或固有频率 $\lambda_n=\omega_n^2$) 两者.

6. 通过直接分析证明方程组

$$\frac{d^2G}{dx^2}=0,\quad x\neq x',\quad 0<x,x'<1,\tag{i}$$

$$\left.\frac{dG}{dx}\right|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{dG}{dx}\right|_{x=1}=0,\quad \left.\frac{dG}{dx}\right|_{x=x'-0}^{x=x'+0}=1$$

无解, 即没有按通常定义方式的 Green 函数.

参照一个物理问题使这种情形易于理解. 为此, 考虑有均匀横截面 A 和弹性模量 E 的一根均匀复合直杆; 且假设一个瞬时作用力导致杆内平面横截面的轴向或纵向位移. 如 $y(x,t)$ 确定在 x 的离其静止位置的一个截面的位移, 初始位于 x 和 $x+dx$ 之间的物质薄片作为内运动的结果得到一个宽度

$$\left(1+\frac{\partial y}{\partial x}\right)dx;$$

因此

$$\frac{\partial y}{\partial x}$$

确定在 x 的局部应变. 分别给出在截面 $x, x+dx$ 的法向力 $F(x,t)$ 和 $F(x,t)+\dfrac{\partial F}{\partial x}dx$, 它们的合力

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx$$

进入被包围物质的运动方程, 即

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.\tag{ii}$$

Hooke 定律表示应变 $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ 和应力 (每单位面积的) 之间的比例关系, 即

$$F=AE\frac{\partial y}{\partial x}$$

使得 (ii) 可重写成 $y(x,t)$ 的偏微分方程, 即

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},\quad c^2=E/\rho. \tag{iii}$$

当杆的两端无应力时边界条件

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=1}=0 \tag{iv}$$

适用, 采用

$$y(x,t)=X(x)\cos\omega t \tag{v}$$

作为解的形式, 从 (iii) 得出 $X(x)$ 满足常微分方程

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\lambda X=0,\quad 0<x<1,\quad \lambda=\frac{\omega^2}{c^2} \tag{vi}$$

带有未知的参数 λ, 且边界条件 (iv) 推断出

$$\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=1}=0. \tag{vii}$$

显然, 对 X 的一个常数值, 它对应于该杆的一个平移, 在静止或零频率极限 (即 $\omega=0$) 情况下满足 (vi), (vii).

对 Green 函数的方程 (i) 指出这样一个静位移类型, 它可归因于带自由端的杆的内点 $x=x'$ 处的局部化力; 然而这些是不相容的特征, 由于该力会使得整个杆处于不定常平移运动中.

将 (i) 中的常微分方程换成另一个, 即

$$\frac{d^2G}{dx^2}=-1,\quad x\neq x'$$

而同时保持该方程组的所有另外的方程, 一个修正 Green 函数能被确定; 如果 $x'=2/3$, 用后者去表示杆内的整个位移和应变曲线. 试证明修正 Green 函数的方程组是自相容的, 具有局部化力和沿整个杆的一个均匀作用力之间的相互平衡或均衡.

7. 包含一个参数的常微分方程

$$L[y]=\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]=-\lambda y,\quad -1<x<1$$

的一个解的处处正则性能得到当且仅当

$$\lambda=-n(n+1),\quad n=0,1,\cdots$$

且当这些解是 n 次多项式 $P_n(x)$ 时, 称为 Legendre 多项式. 问题 3 的修正 Green 函数在其定义方程中包含此算子 L 且有形式

$$G(x,x')=\frac{1}{2}-\ln 2+\frac{1}{2}\ln[(1-x_<)(1+x_>)],$$

它是积分方程

$$P_n(x)=n(n+1)\int_{-1}^{1}G(x,x')P_n(x')dx' \tag{i}$$

的核, Legendre 多项式满足该方程. 为证实这个性质, 引入辅助函数

$$F_n(x)=\int_{-1}^{x}P_n(x')dx'$$

且注意由此直接得到的它的特殊值

$$F_n(-1)=0. \tag{ii}$$

其次, 在 -1 和 x 之间积分常微分方程

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right]+n(n+1)P_n=0$$

得到关系式

$$(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}+n(n+1)F_n(x)=0, \tag{iii}$$

它推断出

$$F_n(1)=0,\quad n>0.$$

借助于 (iii) 的归约式

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{x}\ln(1\mp x')P_n(x')dx'\\&=\pm\ln(1\mp x)F_n(x)-\frac{1}{n(n+1)}[(1\pm x)P_n\mp F_n(x)],\end{aligned}$$

计算

$$\int_{-1}^{1}G(x,x')P_n(x')dx'$$

并验证 (i).

8. 考虑一个双线性展开式

$$G(x,x')=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x\sin n\pi x'}{n^2\pi^2}, \tag{i}$$

它是用由

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 1,$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

确定的齐次边值问题的规范化本征函数

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x, \quad \int_0^1 \varphi_n^2(x) dx = 1$$

和本征值

$$\lambda_n = (n\pi)^2$$

形成的.

断言: (i) 表示一个相伴的 Green 函数, 即

$$G(x, x') = x_<(1 - x_>) \tag{ii}$$

具有性质

$$\frac{d^2G}{dx^2} = 0, \quad x \neq x',$$
$$G(0, x') = 0, \quad G(1, x') = 0$$

和

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x'-0}^{x=x'+0} = -1,$$

作为以上断言的一个检验, 选取 $x = x' = \frac{1}{2}$ 且从 (i) 得到熟知的数值级数

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \pi^2/8,$$

它由给定关系式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}$$

推断出另一个

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

决定定义方程为

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 1,$$
$$y(0) = 0, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0$$

的齐次边值问题的本征函数和本征值, 且构成相关的 Green 函数 $G(x,x')$ 的双线性展开式. 当 $x=x'=\dfrac{1}{2}$ 时, 从这展开式可得出什么推论?

9. 求齐次方程组

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\lambda}{(x+c)^2}y=0,\quad a<x<b,$$
$$y(a)=0,\quad y(b)=0,\quad x+x'\neq 0 \text{ 在 } (a,b) \text{ 内}$$

的本征函数和本征值, 然后得出关于算子 $L=\dfrac{d^2}{dx^2}$ 的 Green 函数的双线性展开式.

10. 决定由方程组

$$\left(\frac{d^2}{d\vartheta^2}-\lambda^2\right)G(\vartheta,\vartheta',\lambda)=0,\quad \vartheta\neq\vartheta',\quad 0<\vartheta,\vartheta'<2\pi,$$
$$G(0,\vartheta',\lambda)=G(2\pi,\vartheta',\lambda),$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial\vartheta}G\right|_{\vartheta=0}=\left.\frac{\partial}{\partial\vartheta}G\right|_{\vartheta=2\pi},\qquad \left.\frac{\partial G}{\partial\vartheta}\right|_{\vartheta=\vartheta'-0}^{\vartheta=\vartheta'+0}=-1$$

规定的带有周期边界条件的一个 Green 函数 $G(\vartheta,\vartheta',\lambda)$, 且给出它的双线性展开式. 证明这展式和用离散的余弦函数来表示一般余弦函数的展式, 即

$$\cos ax=2a\sin a\left[\frac{1}{2a^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos n\pi x}{n^2\pi^2-a^2}\right]$$

一致.

11. 考虑常微分方程

$$L[y]=\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)-(1+x)y=f(x),\quad 0<x<1 \tag{*}$$

且假设解满足条件

$$|y(0)|<\infty,\quad y(1)=0. \tag{**}$$

给出齐次方程 $L[y]=0$ 的通解

$$y(x)=e^x\left[C_1+C_2\int^x\frac{e^{-2\sigma}}{\sigma}d\sigma\right],$$

为求解 (*), (**), 导出一个合适的 Green 函数.

12. 什么是可直接得到的方程组

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -f(x), \quad 0 < x < 1,$$
$$y(0) = 0, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} - y(1) = 0$$

的解的 Green 函数的合适的规定? 得出此 Green 函数的双线性展开式并检验之.

13. 当没有外力作用时, 具有两自由端的均匀弹性杆的横向位移 $y(x,t)$ 由以下方程组所刻画:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + D\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad 0 < x < l,$$
$$\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=l} = 0, \quad \left.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right|_{x=l} = 0.$$

引入适合于自由周期振动的解的形式

$$y(x,t) = X(x)\cos\omega t,$$

坐标因子 $X(x)$ 的方程组是

$$\frac{d^4X}{dx^4} - \lambda X = 0, \quad 0 < x < l, \quad \lambda = \frac{\omega^2}{D}, \tag{i}$$
$$\left.\frac{d^2X}{dx^2}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{d^3X}{dx^3}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{d^2X}{dx^2}\right|_{x=l} = 0, \quad \left.\frac{d^3X}{dx^3}\right|_{x=l} = 0.$$

当 $\lambda = 0$ 时, 一对无关的非平凡解立即可确定, 即

$$X_1 = 1, \quad X_2 = x - \alpha,$$

且如果 $\alpha = l/2$, 这两者是正交的, 即

$$\int_0^l X_1X_2dx = 0;$$

此外, 显然 $X_1^* = 1$ 和 $X_2^* = x - \dfrac{l}{2}$ 分别描述均匀横位移和绕该杆中点的旋转. 鉴于以上所述, 讨论如何去找与方程组 (i) 的本征函数和非零本征值相结合的 Green 函数.

当杆的两端点固定且 (i) 中边界条件换成

$$X(0) = 0, \quad \left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=0} = 0, \quad X(l) = 0, \quad \left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=l} = 0$$

时, 研究对小横位移的类似问题. 证明在这种情况下本征值方程

$$\cos\left(\frac{\omega l^2}{D}\right)\cosh\left(\frac{\omega l^2}{D}\right)=1$$

决定振动的固有频率 ω.

14. 给出方程组

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=\begin{cases}1, & 0<x<1/2,\\ -1, & 1/2<x<1,\end{cases} \tag{i}$$

$$y(0)=y(1)=0$$

和包含任意常数 C_1, C_2 的表示式

$$\begin{aligned} y_1(x)&=\frac{1}{\lambda}\left(1-\cos\sqrt{\lambda}x\right)+C_1\sin\sqrt{\lambda}x, \quad 0<x<1/2,\\ y_2(x)&=-\frac{1}{\lambda}\left(1-\cos\sqrt{\lambda}(1-x)\right)+C_2\sin\sqrt{\lambda}(1-x), \quad 1/2<x<1,\end{aligned}$$

它们每一个满足合适的常微分方程连同一个单独的边界条件. 证明 C_1 和 C_2 可通过对 y_1, y_2 及其一阶导数在 $x=1/2$ 的连续拟合的要求来确定; 刻画不可能用这样的方法来确定 C_1, C_2 的 λ 的例外值. 详细阐述对方程组 (i) 的 Green 函数方法且与前面的分析作比较.

15. 验证由关系式

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}&=-f(x), \quad 0<x<l,\\ \frac{dy}{dx}&=0, \quad x=0,l,\end{aligned}$$

规定的非齐次边值问题的解的存在性的必要条件为

$$\int_0^l f(x)dx=0,$$

且这解能表示成形式

$$y(x)=y(0)+\int_0^x (x'-x)f(x')dx', \tag{i}$$

其中 $y(0)$ 可取任意值. 验证 (i) 与借助于对称修正 Green 函数 $G(x,x')$ 的表示式

$$y(x)=\frac{1}{l}\int_0^l y(x)dx+\int_0^l G(x,x')f(x')dx'$$

之间的等价性, 其中 $G(x,x')$ 满足方程组

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\frac{1}{l}, \quad x \neq x', \quad 0 < x, x' < l,$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \quad \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x'-0}^{x=x'+0} = 1$$

和

$$\int_0^l G(x,x')dx = 0;$$

证实并应用矩量公式

$$\int_0^l xf(x)dx = y(l) - y(0), \quad \int_0^l x^2 f(x)dx = 2ly(l) - 2\int_0^l ydx.$$

16. 解常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lambda p(x)y + q(x), \quad a < x < b, \tag{i}$$

带边界条件

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = 0, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=b} = 0, \tag{ii}$$

有一种方法是求助于较简单的比较方程组

$$\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dx^2} = q(x), \quad a < x < b, \\ &\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = 0, \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=b} = 0, \end{aligned} \tag{iii}$$

使后一问题受 (现在熟悉的) 约束, 即

$$\int_a^b q(x)dx = 0; \tag{iv}$$

且如果这一条件满足, 则存在 (iii) 的一族解, 即

$$y(x) = \int_a^b K(x,x')q(x')dx' + C, \tag{v}$$

这里

$$K(x,x') = \begin{cases} x - x', & x > x', \\ 0, & x < x'. \end{cases}$$

当 (iv) 不成立时, 另一种方法用到这样的事实, 即 (i), (ii) 的每一个解必须满足类似关系式

$$\lambda\int_a^b p(x)y(x)dx + \int_a^b q(x)dx = 0; \tag{vi}$$

此外, 在 (v) 中将 $q(x)$ 换成 $q(x)+\lambda p(x)y$ 后, 由此得出这种解也满足积分方程

$$y(x)=\int_a^b K(x,x')p(x')y(x')dx'+\int_a^b K(x,x')q(x')dx'+C. \tag{vii}$$

详细描述如何能从 (vi), (vii) 中消去常数 C, 导出由 (i), (ii) 确定的函数 $y(x)$ 的一个确切的积分方程, 如果

$$\int_a^b p(x)dx\neq 0,$$

且在 $p(x)=1$ 的特殊情形下给出这个积分方程的具体形式.

17. 考虑常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x),\quad 0<x<l \tag{i}$$

和补充条件

$$y(0)=y(l),\quad \int_0^l ydx=0, \tag{ii}$$

其中一个有积分表示式. 检验 (i) 的通解

$$y(x)=\int_0^x (x-x')f(x')dx'+C_1x+C_2$$

能通过适当选择常数 C_1, C_2 而满足条件 (ii), 然后可表示为

$$y(x)=\int_0^l K(x,x')f(x')dx', \tag{iii}$$

这里

$$K(x,x')=\begin{cases}\dfrac{x'(x-l)}{l}+\dfrac{x'(l-x')}{2l}, & x>x',\\[2mm] \dfrac{x(x'-l)}{l}+\dfrac{x'(l-x')}{2l}, & x<x'\end{cases} \tag{iv}$$

是其自变量的非对称函数且具有所要求的性质

$$K(0,x')=K(l,x')$$

和

$$\int_0^l K(x,x')dx=0.$$

用直接方法且用 (iv) 验证齐次积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^l K(x,x')\varphi(x')dx' \tag{v}$$

的解满足关系式

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \lambda\varphi(x) \quad 0 < x < l, \\
&\varphi(l) = \varphi(0), \quad \int_0^l \varphi(x)dx = 0.
\end{aligned}
\tag{vi}
$$

由于最后这个积分条件和该常微分方程联合起来推断出

$$
\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=l},
$$

(vi) 的所有解必须是周期函数, 即

$$
\cos\frac{2n\pi x}{l}, \quad \sin\frac{2n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \cdots
$$

且对应的本征值是

$$
\lambda_n = -\left(\frac{2n\pi}{l}\right)^2.
$$

其次, 将 (v) 中的积分方程换成另一个带对称核的积分方程, 即

$$
\varphi(x) = \lambda\int_0^l G(x, x')\varphi(x')dx', \tag{vii}
$$

这里

$$
\begin{aligned}
G(x, x') &= K(x, x') + \frac{x(l-x)}{2l} \\
&= \frac{(x_> - x_<)(l - x_> + x_<)}{2l},
\end{aligned}
\tag{viii}
$$

由此导出关系式

$$
\int_0^l \varphi(x')dx'\left[1 - \lambda\int_0^l \frac{x(l-x)}{2l}dx\right] = 0.
$$

如果 $\lambda \neq 12/l^2$, 关于积分方程 (v), (vii) 中的 $\varphi(x)$ 能引出什么结论? 又如果 $\lambda = 12/l^2$, 什么样的齐次常微分方程描述 $\varphi(x)$? 在后面的情形下, 证明存在常数解 $\varphi(x) = 1$, 它显然符合条件

$$
\varphi(0) = \varphi(l), \quad \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=l}.
$$

对照两个函数 $G(x, x')$ 和 $K(x, x')$ 的本征函数和本征值, 证明 $G(x, x')$ 有周期 Green 函数且给出它的双线性展开式.

18. 常微分方程

$$
L[y] = x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - \lambda y = 0 \tag{i}
$$

及其伴随方程

$$\widetilde{L}[z]=x^2\frac{d^2z}{dx^2}+3x\frac{dz}{dx}+(1-\lambda)z=0$$

两者能用带有可自由支配的常数 α,β 的幂函数

$$y(x)=x^{\alpha},\quad z(x)=x^{\beta}$$

显式解出; 当 $1<x<2$ 且适用分别的边界条件

$$\begin{aligned}&1)\ \ y(1)=0,\quad y(2)=0,\\&2)\ \ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=0,\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}=0\end{aligned}$$

时, 导出算子 $L,\widetilde{L}$ 的 Green 函数. 如果有限性条件加在端点 $x=0$ 上, 找出在区间 $0<x<1$ 上的对应 Green 函数.

19. 提出用一种 Green 函数方法与非齐次常微分方程

$$L[y(t)]=f(t),\quad t>0 \tag{i}$$

相联系, 这时通过指定初始 (而非边界) 条件来选解, 即当 y 及其 t 导数在自变量的一个值, 如在 (时间) $t=0$ 给定时. 例如, 考虑算子

$$L=m\frac{d^2}{dt^2}+2\mu\frac{d}{dt}+k,$$

其伴随算子是

$$\widetilde{L}=m\frac{d^2}{dt^2}-2\mu\frac{d}{dt}+k;$$

如果 $\mu,k>0$, 则 (i) 表示具有质量 m 的衰减线性振子的运动方程, 且条件

$$y(0)=y_0,\quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=v_0 \tag{ii}$$

分别确定初位移和初速度.

利用恒等式

$$zL[y]-y\widetilde{L}[z]=\frac{d}{dt}\left[m\left(z\frac{dy}{dt}-y\frac{dz}{dt}\right)+2\mu yz\right]$$

连同选择

$$y=y(t),\quad z=\widetilde{G}(t,t'),$$

在 $t=0$ 和 $t=t^*$ 之间积分, 由此推导出: 如果

$$\widetilde{L}[\widetilde{G}]=0,\quad t\neq t' \tag{iii}$$

和

$$\left.\frac{\partial\widetilde{G}}{\partial t}\right|_{t=t'-0}^{t=t'+0}=\frac{1}{m},$$

则

$$\int_0^{t^*}\widetilde{G}(t,t')f(t)dt-y(t')$$

$$=m\left(\widetilde{G}\frac{dy}{dt}-y\frac{\partial\widetilde{G}}{\partial t}\right)+2\mu y\widetilde{G}\Big]_{t=0}^{t=t^*},\quad t'<t^*.\tag{iv}$$

一对指定值 $y(0)$, $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}$ 能直接代入 (iv) 中; 由于

$$y(t^*)\quad 和\quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t^*}$$

的值未知, (iv) 中的对应项通过加在 $\widetilde{G}$ 上的条件, 即

$$\widetilde{G}(t^*,t')=0,\quad \left.\frac{\partial\widetilde{G}}{\partial t}\right|_{t=t^*}=0,\quad t^*>t'\tag{v}$$

而消去, 接着将 t^* 换成 $t(t>t')$ 后, 结果得到 (i),(ii) 的解的一个表示式

$$y(t')=\int_0^{t'}\widetilde{G}(t,t')f(t)dt+mv_0\widetilde{G}(0,t')-my_0\left.\frac{\partial\widetilde{G}}{\partial t}\right|_{t=0}+2\mu y_0\widetilde{G}(0,t').\tag{vi}$$

证明由方程组

$$\widetilde{L}[\widetilde{G}]=0,\quad t\neq t',\quad t,t'>0,$$

$$\widetilde{G}(t,t')=0,\quad t\geqslant t'\tag{vii}$$

和

$$\left.\frac{\partial\widetilde{G}}{\partial t}\right|_{t=t'-0}=-\frac{1}{m}$$

(这里最后的等式是由 (v) 中约定的性质所规定的 (iii) 中等式的一个修改) 所定义的伴随 Green 函数 $\widetilde{G}(t,t')$ 有显式

$$\widetilde{G}(t,t')=\begin{cases}0, & t>t'\\ -\dfrac{1}{m}\dfrac{e^{\mu(t-t')/m}}{\sqrt{\dfrac{k}{m}-\left(\dfrac{\mu}{m}\right)^2}}\sin\left\{\sqrt{\dfrac{k}{m}-\left(\dfrac{\mu}{m}\right)^2}(t-t')\right\}, & t<t'.\end{cases}\tag{viii}$$

$\widetilde{G}$ 中交换自变量所得到的与其相联系的函数, 即

$$G(t',t'') = \widetilde{G}(t'',t')$$

定义算子 L 的 Green 函数, 其显式表示是

$$G(t-t') = \begin{cases} \dfrac{1}{m}\dfrac{e^{-\mu(t-t')/m}}{\sqrt{\dfrac{k}{m}-\left(\dfrac{\mu}{m}\right)^2}}\sin\left\{\sqrt{\dfrac{k}{m}-\left(\dfrac{\mu}{m}\right)^2}(t-t')\right\}, & t>t', \\ 0, & t<t', \end{cases} \tag{ix}$$

这里的记号强调 G 对自变量之差的依赖性.

如果方程组 (i),(ii) 的解 (vi) 用后面的 (或原来的) Green 函数改写, 则

$$y(t) = \int_0^t G(t-t')f(t')dt' + mv_0 G(t) - mv_0 \left.\frac{\partial G}{\partial t'}\right|_{t'=0} + 2\mu y_0 G(t); \tag{x}$$

在 (ix) 的基础上, 估计在 (x) 中依赖于初始数据的贡献且证实这样得到的解的性质.

第二十九章

偏微分方程、Green 函数和积分方程

早先有关 Green 函数和积分方程的论述是由于它们和本书的主题 —— 偏微分方程 —— 密切相关而促成的. 因此, 在继续讲述正交函数和相关的 (例如 Fourier) 展开的技术细节之前来说明一下这种概念和公式化表述的直接作用是值得的.

考虑端点固定的均匀拉紧弦由按时间周期性的且沿弦的长度变化的外力作用造成的运动; 在线性或小振幅运动的近似下, 其支配方程是

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(x)\cos\omega t, \quad 0 < x < l, \tag{29.1}$$

$$y(0,t) = 0, \quad y(l,t) = 0, \quad t > 0,$$

这里 $y(x,t)$ 表示横向位移 (平行于外力方向). 周期响应

$$y(x,t) = X(x)\cos\omega t \tag{29.2}$$

刻画了坐标因子 $X(x)$ 的特征, 即满足

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda X = -\frac{1}{c^2}f(x), \quad 0 < x < l, \quad \lambda = \frac{\omega^2}{c^2} \tag{29.3}$$

和

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

利用 Green 函数 (回顾 (27.16))

$$G(x,x') = \frac{x_<(l-x_>)}{l}, \quad \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x'-0}^{x=x'+0} = -1, \tag{29.4}$$

(29.3) 能换成关于函数 $X(x)$ 的函数方程或积分方程, 即

$$X(x) = g(x) + \lambda \int_0^l G(x,x')X(x')dx', \tag{29.5}$$

这里系数 λ 和函数

$$g(x) = \frac{1}{c^2}\int_0^l G(x,x')f(x')dx' \tag{29.6}$$

两者通过外力来具体确定是已知的.

有一种一般方法去解如 (29.5) 这样的非齐次线性积分方程, 它是由 E. Schmidt (施密特, 1876 — 1959) 于 1907 年开创的, 本质上依赖于其对称核 $G(x,x')$ 的本征函数 $\varphi_n(x)$ 及相关的双线性展开式; 对特别的代表 (29.4), 其规范化本征函数

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

满足

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi_n + \lambda_n\varphi_n = 0, \quad 0 < x < l,$$
$$\varphi_n(0) = 0, \quad \varphi_n(l) = 0,$$

和本征值

$$\lambda_n = (n\pi/l)^2$$

一起出现于齐次积分方程

$$\varphi_n(x) = \lambda_n \int_0^l G(x,x')\varphi_n(x')dx' \tag{29.7}$$

中, 且双线性展开式

$$G(x,x') = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(x')}{\lambda_n} \tag{29.8}$$

成立.

应该指出形如 (29.5) 的非齐次积分方程不必总有解; 这样一种情况出现于有关的方程

$$\varphi_n(x) = X(x) - \lambda_n \int_0^l G(x,x')X(x')dx' \tag{29.9}$$

之中, 其中给定的函数 $g(x)$ 是一个本征函数而其系数等于相联系的本征值. 这样, 用 $\varphi_n(x)$ 乘 (29.9) 式且在 $x=0$ 和 $x=l$ 之间积分, 利用 G 的对称性和关系式 (29.7) 后, 求得

$$\begin{aligned}1 &= \int_0^l X(x)\varphi_n(x)dx - \lambda_n \int_0^l \int_0^l \varphi_n(x)G(x,x')X(x')dxdx' \\ &= \int_0^l X(x)\varphi_n(x)dx - \lambda_n \int_0^l X(x)dx \int_0^l G(x,x')\varphi_n(x')dx' \\ &= \int_0^l X(x)\varphi_n(x)dx - \int_0^l X(x)\varphi_n(x)dx = 0.\end{aligned}$$

由于上述矛盾依赖于选择 $\lambda=\lambda_n$, 以后假设

$$\lambda \neq \lambda_n \quad n=1,2,\cdots \tag{29.10}$$

是合适的.

特殊的积分方程

$$\varphi_n(x) = X(x) - \lambda \int_0^l G(x,x')X(x')dx' \tag{29.11}$$

能通过假设

$$X(x) = c\varphi_n(x)$$

且再次利用 (29.7) 来求解, 由于常数 c 的唯一的值可得到, 即

$$c = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda},$$

鉴于 (29.10), 它是一个有限量. 线性性质可用来支持以下结论, 即当

$$g(x) = \sum_{n=1}^{m} c_n \varphi_n(x)$$

时,

$$X(x) = \sum_{n=1}^{m} c_n \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(x)$$

满足 (29.5), 且系数完全是任意的.

其次, 从上面的有限多项求和式到无穷级数表示式

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{29.12}$$

的推广表明这里的系数由

$$c_n = \int_0^l g(x)\varphi_n(x)dx, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{29.13}$$

所规定, 用 $\varphi_m(x)$ 乘 (29.12) 且在右边逐项积分且考虑到正交性质

$$\int_0^l \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0, \quad m \neq n$$

即可推出. 对一大类函数的 (29.12) 型展开式的细节和验证将在以后几章中详细表出, 这里只需指出表示式

$$X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda}\varphi_n(x)$$

是该积分方程的一个解且注意该式的重排

$$\begin{aligned} X(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x) + \lambda\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \lambda}\varphi_n(x) \\ &= g(x) + \lambda\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \lambda}\varphi_n(x), \end{aligned} \tag{29.14}$$

这里最后的式子显然依赖于 (29.12).

为了支持上述论点, 令

$$F(x) = X(x) - \lambda\int_0^l G(x, x')X(x')dx', \tag{29.15}$$

为证明

$$F(x) - g(x) = 0,$$

把 (29.14) 代入 (29.15); 因此, 从 (29.14),(29.15) 有

$$F(x) - g(x) = \lambda\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \lambda}\varphi_n(x) - \int_0^l G(x, x')\left[g(x') + \lambda\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \lambda}\varphi_n(x')\right]dx'\right\}$$

这里必须的简化依赖于 $G(x, x')$ 的一对特征式 (29.7),(29.8).

形式上继续进行, 利用定义 (29.13) 后出现

$$\int_0^l G(x, x')g(x')dx' = \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(x')}{\lambda_n} g(x')dx' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n}\varphi_n(x); \tag{29.16}$$

也有

$$\begin{aligned} \int_0^l G(x, x')\lambda\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \lambda}\varphi_n(x')dx' &= \lambda\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \lambda}\int_0^l G(x, x')\varphi_n(x')dx' \\ &= \lambda\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(\lambda_n - \lambda)\lambda_n}\varphi_n(x), \end{aligned} \tag{29.17}$$

因此

$$\int_0^l G(x,x')\left[g(x')+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\lambda_n-\lambda}\varphi_n(x')\right]dx'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\lambda_n-\lambda}\varphi_n(x),$$

所以, 正如所要求的那样

$$F(x)-g(x)=0.$$

如果有关级数是一致收敛的, 运算的倒转或互换次序, 即前面关系式 (29.16), (29.17) 中的积分和求和运算的互换是合法的, 这一问题现在不详述. 假使那样的话, 承认积分方程的对称核 $G(x,x')$ 有一致收敛的双线性展开式 (29.8) 和 (29.14) 中的级数也是一致收敛的, 则上述积分方程有解, 表示成 (29.14), 其中系数 c_n 称为 $g(x)$ 关于该核的规范正交本征函数系的 Fourier 系数. 对非齐次积分方程 (29.5) 的 Schmidt 解 (29.14) 的更广的可应用性, 不再以其核函数 $G(x,x')$ 的双线性展开式的一致收敛性为条件, 能借助于引入并利用原核函数的迭代来建立. 当参数 λ 不同于每一个本征值 λ_n 时, 表示式 (29.14) 构成唯一解; 然而, 如果 $\lambda=\lambda_m$ 且存在仅有一个相关的本征函数 $\varphi_m(x)$, 在方程

$$g(x)=X(x)-\lambda_m\int_0^l G(x,x')X(x')dx' \tag{29.18}$$

中乘以 $\varphi_m(x)$ 且对 x 积分, 其结果

$$c_m=\int_0^l X(x)\varphi_m(x)dx-\lambda_m\int_0^l\int_0^l \varphi_m(x)G(x,x')X(x')dxdx'=0 \tag{29.19}$$

提供了 (29.18) 的解存在的一个必要条件. 此外, 当 (29.19) 成立或

$$\int_0^l g(x)\varphi_m(x)dx=0$$

时,(29.18) 的解取形式

$$\widehat{X}(x)=g(x)+\lambda_m\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{\infty}\frac{c_n\varphi_n(x)}{\lambda_n-\lambda_m}. \tag{29.20}$$

显然不能断言 $\widehat{X}(x)$ 是唯一的解, 因为

$$X^*(x)=\widehat{X}(x)+\alpha\varphi_m(x),\quad \alpha\text{任意} \tag{29.21}$$

确定了解的单参数族; 在几个 (无关的) 本征函数 $\varphi_m(x),\varphi_{m+1}(x),\cdots,\varphi_{m+p}(x)$ 对应于同一本征值 λ_m 的情况下, (29.20),(29.21) 的对应部分是

$$\begin{aligned}X^*(x)=g(x)+\lambda_m&\sum_{\substack{n=1\\n\neq m,m+1,\cdots,m+p}}^{\infty}\frac{c_n\varphi_n(x)}{\lambda_n-\lambda_m}\\&+\alpha_1\varphi_m(x)+\alpha_2\varphi_{m+1}(x)+\cdots+\alpha_{p+1}\varphi_{m+p}(x),\end{aligned} \tag{29.22}$$

带有任意常数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{p+1}$.

回到原来 (29.1),(29.2) 所规定的弦运动问题, 然后用积分方程 (29.5),(29.6) 重写, 立刻得到强迫响应, 即

$$\widehat{y}(x,t) = \left[g(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{c_n \sin \frac{n\pi x}{l}}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{l}\right)^2} \right] \cos \omega t \tag{29.23}$$

和

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad g(x) = \frac{1}{c^2} \int_0^l \frac{x_<(l - x_>)}{l} f(x') dx'.$$

如果

$$\omega \neq \omega_n = \left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \cdots$$

描述该弦运动的方程组的通解是

$$y(x,t) = y(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{29.24}$$

这个级数包含齐次或不受力的偏微分方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l$$

的特解

$$\sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi ct}{l}, \quad \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi ct}{l}.$$

给定条件

$$y(x,0) = 0, \quad \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < l,$$

它规定弦的零初始位移和零初速度, 因此从 (29.24) 推导出合适的解是

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2} \{\cos \omega t - \cos \omega_n t\} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{29.25}$$

当 $\omega \to \omega_m$, (29.25) 中的一项占主导地位, 因为

$$\lim_{\omega \to \omega_m} \frac{\cos \omega t - \cos \omega_m t}{\omega_m^2 - \omega^2} = \left. \frac{\frac{d}{d\omega}(\cos \omega t - \cos \omega_m t)}{\frac{d}{d\omega}(\omega_m^2 - \omega^2)} \right|_{\omega = \omega_m} = \frac{t}{2\omega_m} \sin \omega_m t,$$

所以得出估计

$$y(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2l}} c_m \omega_m t \sin \omega_m t \sin \frac{n\pi x}{l};$$

上式预示随着时间的无限制和不切实际的增长, 它反映了通过线性偏微分方程对该弦运动的原来的公式化描述中的不足之处. 当 $c_m = 0$ 时, (29.25) 仍成立且在 $t \to \infty$ 的极限情形下避免共振突变, $c_m = 0$ 意味着所加的力 $f(x)$ 正交于特定的本征函数 $\varphi_m(x)$.

以下考虑一个非齐次扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)\cos\omega t, \quad 0 < x < l, \tag{29.26}$$

它的源项按时间周期地变化, 其齐次边界条件为

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0. \tag{29.27}$$

引入复合表示式

$$u(x,t) = X(x)\cos\omega t + Y(x)\sin\omega t \tag{29.28}$$

且由 (29.26) 推导出 X, Y 的耦合常微分方程组是

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{\omega}{k}Y = -\frac{q(x)}{k}, \quad \frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{\omega}{k}X = 0. \tag{29.29}$$

回忆以前利用过的对算子 $L = \dfrac{d^2}{dx^2}$ 且在 $x = 0, l$ 为零的 Green 函数 (29.4), 方程组 (29.29) 能换成一对耦合积分方程

$$X(x) = -\frac{\omega}{k}\int_0^l G(x,x')Y(x')dx' + f(x) \tag{29.30}$$

和

$$Y(x) = \frac{\omega}{k}\int_0^l G(x,x')X(x')dx',$$

其中

$$f(x) = \frac{1}{k}\int_0^l G(x,x')q(x')dx'. \tag{29.31}$$

用消去法容易得到 X, Y 各自的方程, 即

$$X(x) = -\left(\frac{\omega}{k}\right)^2\int_0^l G^{(2)}(x,x')X(x')dx' + f(x) \tag{29.32}$$

和

$$Y(x) = -\left(\frac{\omega}{k}\right)^2\int_0^l G^{(2)}(x,x')Y(x')dx' + g(x),$$

这里

$$G^{(2)}(x,x') = \int_0^l G(x,x'')G(x'',x')dx'' \tag{29.33}$$

称为核函数 $G(x,x')$ 的首次迭代, 且

$$g(x)=\frac{\omega}{k^2}\int_0^l G^{(2)}(x,x')q(x')dx'. \tag{29.34}$$

这样, 利用解的 Schmidt 形式 (29.14) 到 (29.32) 型的积分方程, 结果是

$$X(x)=f(x)-\left(\frac{\omega}{k}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n\varphi_n(x)}{\lambda_n^2+\left(\frac{\omega}{k}\right)^2}\quad c_n=\int_0^l f(x)\varphi_n(x)dx \tag{29.35}$$

和

$$Y(x)=g(x)-\left(\frac{\omega}{k}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n\varphi_n(x)}{\lambda_n^2+\left(\frac{\omega}{k}\right)^2},\quad d_n=\int_0^l g(x)\varphi_n(x)dx,$$

其中对由

$$\varphi_n(x)=\lambda_n\int_0^l G(x,x')\varphi_n(x')dx',$$
$$\varphi_n(x)=\lambda_n^2\int_0^l G^{(2)}(x,x')\varphi_n(x')dx'$$

所刻画的 $G(x,x'),G^{(2)}(x,x')$ 的所有公共本征函数 $\varphi_n(x)$ 求和; 显式地有

$$\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l},\quad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad n=1,2,\cdots$$

如以前给出的那样. 能够得出结论: 对 ω 的任意值, 由于对所有 $n,\lambda_n^2+(\omega/k)^2\neq 0$, 表示式 (29.35) 提供了两个分别的积分方程 (29.32) 的唯一解. 用双线性展开式

$$G(x,x')=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(x')}{\lambda_n},\quad G^{(2)}(x,x')=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(x')}{\lambda_n^2}$$

连同 $f(x),g(x)$ 用 $\varphi_n(x)$ 表示的展开式, 得到

$$c_n=\frac{1}{k\lambda_n}\int_0^l q(x)\varphi_n(x)dx,\quad d_n=\frac{1}{k\lambda_n^2}\int_0^l q(x)\varphi_n(x)dx,$$

(29.35) 的简化形式随之得出, 即

$$\begin{aligned}X(x)&=\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n\varphi_n(x)}{\lambda_n^2+\left(\frac{\omega}{k}\right)^2}\int_0^l q(x')\varphi_n(x')dx',\\ Y(x)&=\frac{\omega}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n^2+\left(\frac{\omega}{k}\right)^2}\int_0^l q(x')\varphi_n(x')dx'.\end{aligned} \tag{29.36}$$

和式

$$u(x,t) = X(x)\cos\omega t + Y(x)\sin\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\varphi_n(x)e^{-k\lambda_n^2 t} \tag{29.37}$$

合在一起就能保证满足初始条件, 例如说

$$u(x,0) = h(x), \quad 0 < x < l;$$

由于 $\varphi_n(x)$ 的正交性, 逐个确定构成非齐次扩散方程解的级数中系数 A_n 是可行的, 即

$$A_n = \int_0^l (h(x) - X(x))\varphi_n(x)dx, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{29.38}$$

对包含一个参数的非齐次方程组如

$$\begin{gathered} L[y] = \frac{d^2y}{dx^2} + (p(x) + \lambda q(x))y = f(x), \quad a < x < b, \\ U_1[y] = 0, \quad U_2[y] = 0 \end{gathered} \tag{29.39}$$

作一些注记是适当的, 且特别地考虑其解作为参数 λ 的函数的性状. 考虑解的积分形式

$$y(x,\lambda) = \int_a^b G(x,x',\lambda)f(x')dx', \tag{29.40}$$

它来源于能分解成两部分的一个适当的 Green 函数 (回顾 (28.7),(28.8)), 即

$$G(x,x',\lambda) = G_1(x,x',\lambda) + \frac{G_2(x,x',\lambda)}{D(\lambda)}; \tag{29.41}$$

这里 G_1 和 G_2 是 λ 的正则 (或解析) 函数, 关系式

$$D(\lambda) = 0 \tag{29.42}$$

刻画与相应的齐次方程组 ($f = 0$) 的非平凡解相关联的本征值. 由于本征值是离散的且不在 λ 的任何有限值附近聚集, G 的奇点是孤立的且位于 (29.42) 的根 λ_m 处; 用复变量术语, G 是 λ 的亚纯函数, 在每个本征值 λ_m 附近带有极点型奇异因子, 即

$$(\lambda - \lambda_m)^{-n}, \quad n \text{ 为正整数}.$$

显然由 (29.40) 可以得出, $y(x,\lambda)$ 相对于变量 λ 的奇点正好是该 Green 函数的奇点且有同样的局部性状. 对自伴常微分方程, 如在 (29.39) 中的, $y(x,\lambda)$ 和 $G(x,x',\lambda)$ 的极点是单极点 (或一阶的,$n = 1$) 且位于 λ 平面的实轴上.

习 题 29

1. 对没有位移和速度的初始状态的弦，当沿其整个长度作用一时间周期外力时，证实其运动表示式为 (29.25).

2. 给定描述受与速度 $\dfrac{\partial y}{\partial t}$ 成比例的阻尼力影响的弦运动的线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\epsilon\frac{\partial y}{\partial t}-c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=f(x)\cos\omega t,\quad \epsilon>0,\quad 0<x<l. \tag{i}$$

记

$$y(x,t)=X(x)\cos\omega t+Y(x)\sin\omega t, \tag{ii}$$

验证复值函数

$$Z(x)=X(x)+iY(x) \tag{iii}$$

满足常微分方程

$$\frac{d^2 Z}{dx^2}+\Lambda Z=-\frac{1}{c^2}f(x), \tag{iv}$$

其中复值参数为

$$\Lambda=\frac{\omega^2+i\omega\epsilon}{c^2}=\lambda+i\mu. \tag{v}$$

采用零位移边界条件

$$y(0,t)=0,\quad y(l,t)=0,\quad t>0, \tag{vi}$$

(iv) 所需要的解必须满足

$$Z(0)=0,\quad Z(l)=0. \tag{vii}$$

求 $Z(x)$ 所满足的积分方程且利用对其非齐次项例如说核 $G(x,x')$ 的本征函数 $\varphi_n(x)$ 的展开式建立表示式

$$Z(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n\lambda_n}{\lambda_n-\Lambda}\varphi_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n\lambda_n}{\lambda_n-(\lambda+i\mu)}\varphi_n(x), \tag{viii}$$

这里

$$c_n=\frac{1}{c^2}\int_0^l\int_0^l\varphi_n(x)G(x,x')f(x')dxdx'. \tag{ix}$$

令

$$\begin{aligned}\lambda_n-\lambda&=r_n\cos\delta_n,\\ \mu&=r_n\sin\delta_n,\end{aligned} \tag{x}$$

因此

$$r_n = \sqrt{(\lambda_n - \lambda)^2 + \mu^2}, \quad \tan\delta_n = \frac{\mu}{\lambda_n - \lambda}, \tag{xi}$$

从 (ii),(viii) 推导出该弦的强迫运动可表示成

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \lambda_n}{r_n} \varphi_n(x) \cos(\omega t - \delta_n) \\ &= \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \omega_n^2 \frac{\sin\dfrac{n\pi x}{l} \cos(\omega t - \delta_n)}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (\omega\epsilon)^2}}, \end{aligned} \tag{xii}$$

其中

$$\lambda_n = \frac{\omega_n^2}{c^2}.$$

讨论后者的结果，特别要讨论当外加频率 ω 和本征频率 ω_n 中的一个相等时发生的共振情形；用加上相应的齐次方程 ($f(x) = 0$) 的所有解的方法求满足边界条件 (vi) 的偏微分方程 (i) 的通解.

3. 用 Green 函数和积分方程详细研究扩散型偏微分方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v\frac{\partial u}{\partial x} + q(x)\cos\omega t, \quad 0 < x < l$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0.$$

说明能附加什么样的初始条件

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < l.$$

4. 按照与上述问题相似的方式展开分析使得以下的方程组能求解:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2}\right) + f(r)\cos\omega t, \quad 0 < r < a,$$

$$u(0,t) \text{ 有限}, \quad u(a,t) = 0, \quad t > 0$$

和

$$u(r,0) = g(r), \quad 0 < r < a.$$

5. 考虑耦合方程组 (其三维变体与电解溶液中的瞬时过程有关),

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha(u - v), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \alpha(v - u), \quad 0 < x < l, \end{aligned}$$

它刻画一对函数 $u(x,t), v(x,t)$ 的特征; 求满足初始条件

$$u(x,0)=A, \quad v(x,0)=A$$

和极限 $t\to\infty$ 时的条件

$$u(x,\infty)=A(1-f(x)), \quad v(x,\infty)=A(1+f(x))$$

的解.

6. 给定常微分方程组

$$L[y]=\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=0, \quad a<x<b, \tag{i}$$

$$\widehat{L}[y]=L[y]+\lambda^2 y=0, \tag{ii}$$

这里 λ 是一个任意常数; 如果 $G(x,x')$ 和 $\widehat{G}(x,x')$ 分别表示 (i) 和 (ii) 的 Green 函数, 验证

$$G(x,x')-\widehat{G}(x,x',\lambda)=-\lambda^2\int_a^b G(x,x'')\widehat{G}(x'',x',\lambda)dx'. \tag{iii}$$

回顾关于弦运动的非齐次方程组

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=f(x)\cos\omega t, \quad 0<x<l,$$

$$y(0,t)=0, \quad y(l,t)=0, \quad t>0$$

及其对应的积分方程

$$X(x)=g(x)+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\int_0^l G(x,x')X(x')dx', \tag{iv}$$

这里

$$y(x,t)=X(x)\cos\omega t,$$

$$g(x)=\frac{1}{c^2}\int_0^l G(x,x')f(x')dx', \tag{v}$$

其中

$$G(x,x')=\frac{x_<(l-x_>)}{l} \tag{vi}$$

是一个无参数的 Green 函数, 满足

$$L[G]=\frac{d^2}{dx^2}G=0, \quad x\neq x',$$

$$G(0,x')=0, \quad G(l,x')=0$$

和

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x'-0}^{x=x'+0} = -1.$$

把 (iv) 的解写作如下形式

$$X(x) = g(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \int_0^l \Gamma\left(x, x', \frac{\omega}{c}\right) g(x')dx',$$

或利用 $g(x)$ 的定义 (v) 后

$$X(x) = \frac{1}{c^2}\int_0^l f(x'')\left[G(x, x'') + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \int_0^l \Gamma\left(x, x', \frac{\omega}{c}\right) G(x', x'')dx'\right] dx'';$$

其次, 与 (iii) 比较推断出

$$X(x) = \frac{1}{c^2}\int_0^l \widehat{G}\left(x, x', \frac{\omega}{c}\right) f(x')dx', \tag{vii}$$

这里

$$\widehat{G}\left(x, x', \frac{\omega}{c}\right) = \Gamma\left(x, x', \frac{\omega}{c}\right)$$

满足方程组

$$\begin{aligned} \widehat{L}[\widehat{G}] = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right)\widehat{G} = 0, \quad x \neq x', \\ \widehat{G}\left(0, x', \frac{\omega}{c}\right) = 0, \quad \widehat{G}\left(l, x', \frac{\omega}{c}\right) = 0 \end{aligned} \tag{viii}$$

和

$$\left.\frac{\partial \widehat{G}}{\partial x}\right|_{x=x'-0}^{x=x'+0} = -1.$$

求 $\widehat{G}$ 的显式表示式, 且用这个表示式和 G 的表示式去证明表示式 (iii) 的正确性, 可以观察到当 $\widehat{G}$ 已知时, (iii) 构成决定 G 的一个积分方程. 利用 $\widehat{G}$ 的双线性展开式重写 (vii) 且将其结果与本书中以前的结论联系起来.

7. 给出积分方程

$$X(x) = g(x) + \lambda\int_a^b G(x, x')X(x')dx'$$

和展开式

$$X(x) - g(x) = h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c}_n\varphi_n(x), \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$$

的存在性, 这里系数由

$$\overline{c}_n = \int_a^b h(x)\varphi_n(x)dx, \quad c_n = \int_a^b g(x)\varphi_n(x)dx$$

确定; 找出 $\overline{c}_n$ 和 c_n 之间的关系, 从而得到该积分方程解的 Schmidt 形式.

8. 设

$$y(x,\lambda)=\int_a^b G(x,x',\lambda)f(x')dx' \tag{i}$$

表示方程组

$$L[y]=\frac{d^2y}{dx^2}+(p(x)+\lambda)y=f(x), \tag{ii}$$

$$U_1[y]=0,\quad U_2[y]=0,\quad a<x<b$$

的解, 且假设它在 $\lambda=\lambda^*$ 有一奇点, 必须具有极点特征, 因此对接近于 λ^* 的 λ 有,

$$y(x,\lambda)=\frac{\psi_m(x)}{(\lambda-\lambda^*)^m}+\frac{\psi_{m-1}(x)}{(\lambda-\lambda^*)^{m-1}}+\cdots+\frac{\psi_1(x)}{(\lambda-\lambda^*)}+\cdots \tag{iii}$$

记

$$L=\widehat{L}+\lambda^*+(\lambda-\lambda^*),\quad \widehat{L}=\frac{d^2}{dx^2}+p(x), \tag{iv}$$

用算子的后一形式去表示 (iii), 则

$$\frac{\widehat{L}[\psi_m]+\lambda^*\psi_m}{(\lambda-\lambda^*)^m}+\frac{\widehat{L}[\psi_{m-1}]+\lambda^*\psi_{m-1}+\psi_m}{(\lambda-\lambda^*)^{m-1}}+\cdots=f(x), \tag{v}$$

这里已合并左边的有同样 $\lambda-\lambda^*$ 的倒数幂的项. 由于右边不依赖于 λ 这个事实得出 $\lambda-\lambda^*$ 的各次幂的系数必须分别为零的结论, 且特别地得出结果

$$\widehat{L}[\psi_m]+\lambda^*\psi_m=0. \tag{vi}$$

此外, 由于边界算子 U_1,U_2 (由假设) 不包含 λ, 把它们用到 (iii) 得出

$$U_1[\psi_m]=0,\quad U_2[\psi_m]=0, \tag{vii}$$

揭示这样的事实:ψ_m 是 $\widehat{L}$ 的本征函数, 带有本征值 λ^*.

应用 (vi),(v) 的进一步推论

$$\widehat{L}[\psi_{m-1}]+\lambda^*\psi_{m-1}+\psi_m=0,$$

和 Green 恒等式导致结论

$$\int_a^b \psi_m^2(x)dx=0,$$

这意味着它推断出该极点是一阶极点即 $m=1$ 的单极点. 可以推出邻近一个奇点 $\lambda=\lambda_1$ 处 Green 函数的类似性状

$$G(x,x',\lambda)=\frac{G_1(x,x')}{\lambda-\lambda_1}+\cdots,\quad \lambda\to\lambda_1;$$

如果有单独一个规范化本征函数 φ_1 对应于本征值 λ_1, 即

$$L[\varphi_1]=\frac{d^2}{dx^2}\varphi_1+p(x)\varphi_1+\lambda_1\varphi_1=0,$$

$$U_1[\varphi_1]=0,\quad U_2[\varphi_1]=0$$

且

$$\int_a^b \varphi_1^2(x)dx=1,$$

在证实关系式

$$\varphi_1(x')=\int_a^b G(x,x',\lambda)L[\varphi_1]dx$$

成立后, 验证

$$G_1(x,x')=\varphi_1(x)\varphi_1(x').$$

9. Green 函数提供了表示非齐次线性常或偏微分方程的特解的直接方法; 且它们确实是描述非齐性局部化型的方程的解. 这样, 质点运动的一个方程

$$m\frac{dv}{dt}+rv=f(t),\quad t>0 \tag{i}$$

对应的 Green 函数等同于持续时间极短的作用力的那个解; 它描述了直线型的具有张力 T 的弦的静载挠度的方程

$$T\frac{d^2y}{dx^2}=-f(x),\quad 0<x<l, \tag{ii}$$

其相关的 Green 函数确定从具有点样性质的负载函数 $f(x)$ 造成的曲线图形. 一旦 Green 函数已知,(i),(ii) 的解分别由积分形式

$$v(t)=\int_0^t G(t-t')f(t')dt'$$

和

$$y(x)=\int_0^l G(x,x')f(x')dx'$$

给出; 这些适宜于推广到激发型或有源类型.

为详细叙述上面的注记, 考虑常微分方程 (i), 它支配具有质量 m 的一个质点在两个分别的力影响下的单向速度或速率 $v(t)$, 其中一个力 $f(t)$ 一般随时间变化, 另一个力与速度成比例, 即 $-rv(t),r>0$, 代表该运动的阻力. 假设对外力 $f(t)$ 的局部化性状, 即

$$当\ \tau<t<\tau+\Delta\tau,\quad \Delta\tau\ll 1\ 时,\quad f(t)\neq 0;$$

且假设该质点以前是静止的, 即

$$v = 0, \quad 0 < t < \tau.$$

在力停止作用后运动方程 (i) 变成

$$m\frac{dv}{dt} = -rv$$

且有解

$$v(t) = Ve^{-(r/m)t}, \quad t > \tau + \Delta\tau,$$

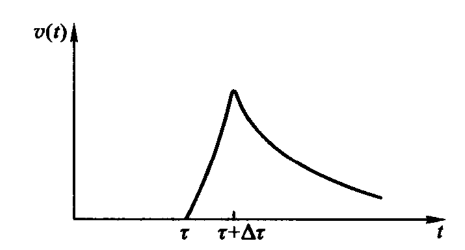
带有未确定的标量因子 V. 为了确定 V, (i) 式在 τ 和 $\tau + \Delta\tau$ 之间积分, 得出

$$m[v(\tau + \Delta\tau) - v(\tau)] = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} f(t)dt - r\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} v(t)dt. \qquad \text{(iii)}$$

第二个积分当 $\Delta\tau \to 0$ 时趋于零, 如对速率 $v(t)$ 的附图所示. 此外, 由于 $v(\tau) = 0$ 和估计式

$$v(\tau + \Delta\tau) = Ve^{-(r/m)(\tau+\Delta\tau)} = Ve^{-(r/m)\tau}, \quad \Delta\tau \ll 1$$

适用, 关系式 (iii) 表明



$$mVe^{-(r/m)\tau} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} f(t)dt = I,$$

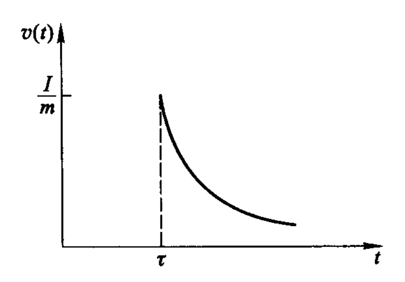
这里 I 表示由于持续时间极短而相应的力大所引起的脉冲. 表示式

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ \dfrac{I}{m}e^{-(r/m)(t-\tau)}, & t > \tau \end{cases}$$

随之得出, 且如草图所示, 归因于和脉冲成比例的速度的初始值为

$$v(\tau + 0) = \frac{I}{m}.$$

当大小为 $I_1, I_2, \cdots$ 的相继的脉冲作用在时刻 $\tau_1, \tau_2, \cdots$ 时, 讨论该质点的



运动; 然后推断出连续力的极限情形, 它在时间 τ 附近引起无穷小脉冲

$$dI = f(\tau)d\tau.$$

验证表示式

$$v(t) = \int_0^t G(t-t')f(t')dt'$$

且提出刻画 Green 函数 G 的关系式.

10. Green 函数能用有关的线性微分方程组, 例如一对一阶方程

$$c_1\frac{du_1}{dt} = k(u_2-u_1)+q_1(t),$$
$$c_2\frac{du_2}{dt} = k(u_1-u_2)+q_2(t), \quad t>0$$

来定义它与金属杆和它的水外罩之间的热交换有关, 其分别的温度为 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$; 函数 $q_1(t), q_2(t)$ 与两物质中给定的热源相联系. 假设 u_1, u_2 初始时为零, 即

$$u_1(0)=0, \quad u_2(0)=0,$$

建立表示式

$$u_1(t) = \int_0^t G_{11}(t-t')q_1(t')dt' + \int_0^t G_{12}(t-t')q_2(t')dt',$$
$$u_2(t) = \int_0^t G_{21}(t-t')q_1(t')dt' + \int_0^t G_{22}(t-t')q_2(t')dt',$$

这里

$$G_{11}(t) = \frac{1}{c_1+c_2} + \frac{c_2}{c_1(c_1+c_2)}e^{-\gamma t},$$
$$G_{12}(t) = \frac{1}{c_1+c_2}(1-e^{-\gamma t}) = G_{21}(t),$$
$$G_{22}(t) = \frac{1}{c_1+c_2} + \frac{c_1}{c_2(c_1+c_2)}e^{-\gamma t}, \quad t>0,$$

其中

$$\gamma = k\frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2}.$$

将 $G_{ij}(t), i, j = 1, 2$ 看成对称 Green 函数矩阵的元素是合适的; 它们的解析性质是什么?

为得到 Green 函数与局部化激发之间的一般联系, 令 $q_2 = 0$, 且假设 q_1 有在 $t = 0$ 的瞬时源性质, 即

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{\epsilon} q_1(t) dt = Q;$$

则

$$u_1(t) = QG_{11}(t), \quad u_2(t) = QG_{12}(t),$$

这两确定式可推导出

$$c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) = Q,$$

它也可从对 u_1, u_2 的原方程直接推断出.

11. 考虑在一端 $(x = 0)$ 具有附属质量的弦运动, 它被以下方程组

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + f(x)\cos(\omega t - \delta), \quad 0 < x < l \tag{i}$$

和

$$\left(M\frac{d^2 y}{dt^2} + \mu\frac{dy}{dt} + M\omega_0^2 y\right)\bigg|_{x=0} = T\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x=0}, y(l, t) = 0 \tag{ii}$$

所支配. 第一个是非齐次方程, 反映沿弦长各点处的时间周期性激发, 第二个是对质量 M 的运动方程, 考虑了有弹性力和非弹性力以及弦张力的作用.

设

$$y(x, t) = X(x)\cos\omega t\cos\delta + Y(x)\sin\omega t\sin\delta \tag{iii}$$

表示 (i) 的一个解, 证明函数 X, Y 满足一个公共的常微分方程, 即

$$L[X] = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\right) X = -\frac{1}{c^2} f(x), \quad 0 < x < l \tag{iv}$$

连同边界条件

$$\frac{dX}{dx} + \sigma X\bigg|_{x=0} = \frac{\mu\omega}{\rho c^2} Y(0)\tan\delta, \quad X(l) = 0, \tag{v}$$

$$\frac{dY}{dx} + \sigma Y\bigg|_{x=0} = -\frac{\mu\omega}{\rho c^2} X(0)\cot\delta, \quad Y(l) = 0,$$

其中

$$\sigma = \frac{M}{\rho c^2}(\omega^2 - \omega_0^2), \tag{vi}$$

$$\nu = \frac{\mu\omega}{\rho c^2};$$

这里 $c^2 = T/\rho$ 表示弦密度 ρ 及其张力 T 之间的比例关系.

引入由以下方程组定义的 Green 函数 $G(x, x')$:

$$L[G] = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\right) G = 0, \quad x \neq x', \tag{vii}$$

$$U_1[G] = \frac{\partial G}{\partial x} + \sigma G\bigg|_{x=0} = 0, \quad U_2[G] = G(l, x') = 0,$$

建立联系 X, Y 的联立方程组

$$X(x) = g(x) - \nu G(x, 0) Y(0) \tan\delta, \tag{viii}$$

$$Y(x) = g(x) + \nu G(x, 0) X(0) \cot\delta,$$

其中

$$g(x) = \frac{1}{c^2}\int_0^l G(x, x') f(x') dx'. \tag{ix}$$

从 (viii) 决定 $X(0), Y(0)$ 且证实所得的 $y(x,t)$ 的表示式为

$$y(x,t) = \left[g(x) - \nu^2 \frac{G(x,0)G(0,0)}{1+\nu^2 G^2(0,0)} g(0)\right]\cos(\omega t - \delta)$$

$$+ \frac{G(x,0)g(0)}{1+\nu^2 G^2(0,0)} \sin(\omega t - \delta). \tag{x}$$

注意关系式

$$T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\bigg|_{x=0} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}M\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}M\omega_0^2 y^2\right] + \mu\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\bigg|_{x=0},$$

它是用 $\left(\dfrac{dy}{dt}\right)_{x=0}$ 乘以质量 M 的运动方程 (ii) 且重新整理后得出的; 验证结果: 作用在该弦上的周期为 $2\pi/\omega$ 的外力传递到该质量 M 的平均能量为

$$\left\langle T\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x=0}\right\rangle = \frac{\mu\omega^2}{2}\frac{g^2(0)}{1+\nu^2 G^2(0,0)}.$$

找出这个 Green 函数的显式表示式并证明

$$\left\langle T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\bigg|_{x=0}\right\rangle = \frac{\mu\omega^2}{2}\frac{\left[\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\frac{\omega}{c}(l-x)dx\right]^2}{\left[\dfrac{M}{\rho}(\omega^2-\omega_0^2) - \omega c\cot\dfrac{\omega l}{c}\right]^2 + \left(\dfrac{\mu\omega}{\rho}\right)^2}. \tag{xi}$$

12. 参照第十九章中对闭圆环内局部热源的讨论且对表示式

$$u(x,t)=\int_{-L}^{L}\int_{0}^{t}G(x,x',t)f(x')Q(t')dx'dt',\quad -L<x<L,t>0$$

补充细节, 它确定由对位置和时间变量有分离依赖性的一个非局部热源所得到的温度; 描述 Green 函数或源函数 G 的性质.

13. 由方程组

$$L[y]=\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda\right)y=0,\quad 0<x<1,\tag{i}$$

$$U_1[y]=\lambda y(0)+k\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0,\quad U_2[y]=y(1)=0$$

所表示的齐次边值问题属于特殊的一类, 由于参数 λ 同时进入了常微分方程和一个边界条件中; 这种情况反映在对应本征解

$$y_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}(1-x)\tag{ii}$$

的非正交性上, 该本征解与满足条件

$$\sqrt{\lambda_n}\sin\sqrt{\lambda_n}-k\cos\sqrt{\lambda_n}=0,\quad n=0,1,\cdots\tag{iii}$$

的本征值 λ_n 相结合. 事实上, 简单的计算揭示

$$\int_0^1\sin\sqrt{\lambda_m}(1-x)\sin\sqrt{\lambda_n}(1-x)dx$$
$$=\begin{cases}-\dfrac{\sin\sqrt{\lambda_n}\sin\sqrt{\lambda_m}}{k}, & m\neq n,\\[2ex] -\dfrac{\sin^2\sqrt{\lambda_n}}{k}+\dfrac{k+\sin^2\sqrt{\lambda_n}}{2k}, & m=n.\end{cases}$$

考虑非齐次常微分方程

$$L[y]=\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda\right)y=f(x),\quad 0<x<1\tag{iv}$$

连同 (i) 中的齐次边界条件, 且假设要借助于 Green 函数来求解, 即

$$y(x,\lambda)=\int_0^1 G(x,x',\lambda)f(x')dx'.\tag{v}$$

验证这个 Green 函数的合适形式, 即:

$$G(x,x',\lambda)=\frac{\left[\sin\sqrt{\lambda}x_<-\dfrac{k}{\sqrt{\lambda}}\cos\sqrt{\lambda}x_>\right]\sin\sqrt{\lambda}(1-x_>)}{k\cos\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}$$

和由此得到的推论

$$\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda-\lambda_n)G=-2k\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(1-x)\sin\sqrt{\lambda_n}(1-x')}{k+\sin^2\sqrt{\lambda_n}},$$

它引出 (v) 的详细形式

$$y(x,\lambda)=-2k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(1-x)}{(\lambda-\lambda_n)(k+\sin^2\sqrt{\lambda_n})}\int_0^1 f(x')\sin\sqrt{\lambda_n}(1-x')dx'. \quad \text{(vi)}$$

值得注意的是: 通过 Green 函数导出 (vi) 并没有遇到来自本征函数非正交性引起的复杂化. 对偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,t),\quad 0<x<1,\quad t>0,$$

满足

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}-k\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\quad u(1,t)=0,\quad t>0$$

和

$$u(x,0)=0,\quad 0<x<1$$

的解有对应的展开, 这样

$$u(x,t)=\int_0^1\int_0^t G(x,x',t-t')f(x',t')dx'dt',$$

其中

$$G(x,x',t-t')=-2k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(1-x)\sin\sqrt{\lambda_n}(1-x')}{k+\sin^2\sqrt{\lambda_n}}e^{-\lambda_n(t-t')}.$$

第三十章

奇异和无限区间问题

当定义常微分方程如

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + \lambda q(x)y = 0, \quad 0 < x < l$$

包括的系数函数 $p(x)$ 在一端点 $x = 0$ 为零或当区间是无限的和 $l = \infty$ 时, 边值问题属于*奇异类*. 这样的问题需要作特殊的考虑, 而且要特别注意合适的边界条件; 此外, 一般来说其本征值谱具有连续而非离散的性质, 因而前面的 Fourier 型级数展开需要换成相应的积分. 所以一些简单的和导引性的细节可以预示这样的特征.

考虑偏微分算子

$$L = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\ \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}$$

和由分离变量法提出的相伴的常微分算子

$$L_1 = \frac{d^2}{d\vartheta^2} + \lambda,$$
$$L_2 = \frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right) - \frac{\mu}{r};$$

在上两式中选两不同的 (分离) 常数 λ, μ 的动机在于两个单变量算子能用于决

定 L 的 Green 函数 $G(r,\vartheta,r',\vartheta')$. 为此, 用方程组

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}+\lambda\right)G_1(\vartheta,\vartheta',\lambda)=0,\quad \vartheta\neq\vartheta',$$
$$G_1(0,\vartheta',\lambda)=G_1(2\pi,\vartheta',\lambda) \tag{30.1}$$

和

$$\left.\frac{\partial}{\partial\vartheta}G_1\right|_{\vartheta=0}=\left.\frac{\partial}{\partial\vartheta}G_1\right|_{\vartheta=2\pi}$$

定义一个 Green 函数 $G(\vartheta,\vartheta')$, 边界条件是周期型的. 给出不连续性要求.

$$\left.\frac{\partial}{\partial\vartheta}G_1\right|_{\vartheta=\vartheta'-0}^{\vartheta=\vartheta'+0}=-1,$$

显式表示随之得出, 即

$$G_1(\vartheta,\vartheta',\lambda)=-\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda}(|\vartheta-\vartheta'|-\pi)\right)}{2\sqrt{\lambda}\sin\pi\sqrt{\lambda}}; \tag{30.2}$$

G_1 作为参数 λ 的函数的奇点位于点 $\lambda=0,1^2,2^2,\cdots,n^2,\cdots$ 处, 由于

$$\lim_{\lambda\to n^2}(\lambda-n^2)G_1=\text{有限},$$

这些都是单极点.

其次,用以下方程

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}G_2\right)-\frac{\mu}{r}G_2=0,\quad r\neq r',\quad 0\leqslant r,r'<1 \tag{30.3}$$

和

$$G_2(1,r',\mu)=0$$

定义另一单变量 Green 函数 $G_2(r,r',\mu)$, 同时规定在此常微分方程的奇点 $r=0$ 处, G_2 保持有限.令

$$G_2(r,r',\mu)=\begin{cases}Cr^{\nu}\left[r'^{\nu}-\dfrac{1}{r'^{\nu}}\right], & r\leqslant r',\\[2ex] Cr'^{\nu}\left[r^{\nu}-\dfrac{1}{r^{\nu}}\right], & r\geqslant r',\end{cases}\qquad \nu=\sqrt{\mu},$$

且 G_2 在 $r=r'$ 的连续性和在 $r=1$ 的边界条件得到保证; 当

$$\mathrm{Re}\nu=\mathrm{Re}\sqrt{\mu}>0$$

时, G_2 的正则性即得出. 条件

$$r\frac{\partial}{\partial r}G_2\Big|_{r=r'-0}^{r=r'+0} = -1$$

用来确定标量因子 C 并得到表示式

$$\begin{aligned} G_2(r,r',\mu) &= \frac{1}{2\sqrt{\mu}}\left[\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{\sqrt{\mu}} - (rr')^{\sqrt{\mu}}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mu}}e^{-\sqrt{\mu}\ln(1/r_<)}\sinh\sqrt{\mu}\ln\frac{1}{r_>}. \end{aligned} \tag{30.4}$$

G_1 能表示成两个仅包含 λ 的整数幂的级数之比, 函数 G_2 不像 G_1, 它没有仅包含 μ 的整数幂的级数表示; G_2 的奇性证明是沿复 μ 平面的整个正实轴的一条分支线或割线 (见图 42), 在这里 $\sqrt{\mu}$ 是不连续的.

$\sqrt{\mu}=\sqrt{|\mu|}$

$\sqrt{\mu}=-\sqrt{|\mu|}$

图 42

应用变换

$$\rho = \ln\frac{1}{r}$$

得出 G_2 的较简单方程, 即

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \mu\right)G_2 = 0, \quad \rho \neq \rho',$$

且条件

$$G_2(0,\rho',\mu) = 0$$

取代以前在 $r=1$ 的条件; 然而变量 ρ 的变化范围按对应关系

$$0 < r < 1 \to \infty > \rho > 0$$

是无限的, 从 (30.4) 的转换形式

$$G_2(\rho,\rho',\mu) = \frac{1}{\sqrt{\mu}}e^{-\sqrt{\mu}\rho_>}\sinh\sqrt{\mu}\rho_<$$

得出 G_2 在极限 $\rho\to\infty$ 时的有限性.

与在单位圆

$$0 \leqslant r, r' < 1, \quad 0 \leqslant \vartheta, \vartheta' \leqslant 2\pi$$

内偏微分方程

$$L[G] = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 G}{\partial\vartheta^2} = 0, \quad r\neq r', \quad \vartheta\neq\vartheta' \tag{30.5}$$

相结合且满足

$$G(1,\vartheta,r',\vartheta')=0,\quad 0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi \tag{30.6}$$

而且

$$G(0,\vartheta,r',\vartheta')=\text{有限}$$

的 Green 函数 $G(r,\vartheta,r',\vartheta')$ 能利用两函数 G_1,G_2 之积的适当积分形式得到; 特别地,

$$\begin{aligned}G(r,\vartheta,r',\vartheta')&=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma G_2(r,r',\lambda)G_1(\vartheta,\vartheta',\lambda)d\lambda\\&=-\frac{1}{2\pi}\ln\ r_>+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos n(\vartheta-\vartheta')\left[\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^n-(rr')^n\right],\end{aligned} \tag{30.7}$$

这里该级数表示来源于 G_1 的奇点对沿 Γ 的积分的贡献, 而这些奇点位于沿 λ 平面的实轴的点 $\lambda=0,1^2,\cdots,n^2,\cdots$ 处.

要注意的是 (30.7) 中对两个因子 G_1,G_2 的公共参自变量 λ; 替代表示

$$\begin{aligned}G(r,\vartheta,r',\vartheta')&=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^*}G_2(r,r',\mu)G_1(\vartheta,\vartheta',\mu)d\mu\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{d\zeta}{\zeta\sinh\pi\zeta}\cosh[\zeta(|\vartheta-\vartheta'|-\pi)]\\&\quad\cdot\left[\cos\left(\zeta\ln\frac{r_<}{r_>}\right)-\cos(\zeta\ln rr')\right]\end{aligned} \tag{30.8}$$

利用了沿复 μ 平面的正实轴上对 G_2 的分支割线的两条边所取的路径 Γ^* 的积分. 引用结果

$$\frac{\cosh[\zeta|\vartheta-\vartheta'|-\pi]}{\sinh\zeta\pi}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-\zeta[|\vartheta-\vartheta'|+2m\pi]},\quad \zeta>0$$

和

$$\int_0^\infty(1-\cos qx)e^{-px}\frac{dx}{x}=\ln\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{p},\quad p>0,$$

从 (30.8) 得出表示式

$$\begin{gathered}G(r,\vartheta,r',\vartheta')=-\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\ln\left[\frac{(\rho-\rho')^2+(\vartheta-\vartheta'+2m\pi)^2}{(\rho+\rho')^2+(\vartheta-\vartheta'+2m\pi)^2}\right]^{1/2},\\ \rho=\ln\frac{1}{r},\quad \rho'=\ln\frac{1}{r'},\end{gathered} \tag{30.9}$$

它自身就有助于检验它是下述问题的解 (见图 43).

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}+\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}\right)G=0, \quad \rho\neq\rho', \quad \vartheta\neq\vartheta',$$
$$G(0,\vartheta,\rho',\vartheta')=0$$

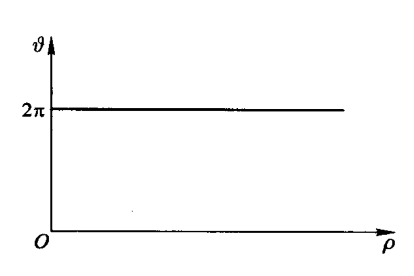


图 43

和

$$G \text{ 按 } \vartheta \text{ 以 } 2\pi \text{ 为周期}.$$

本征值分布和本征函数的另一特征由参照 Green 函数

$$G_l(x,x',\lambda)=\frac{\sin\lambda x_< \sin\lambda(l-x_>)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l} \tag{30.10}$$

引出, 其性质包括

$$L[G]=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda\right)G=0, \quad x\neq x', \quad 0<x,x'<l,$$
$$G(0,x',\lambda)=0, \quad G(l,x',\lambda)=0$$

和

$$\frac{\partial}{\partial x}G\bigg|_{x=x'-0}^{x=x'+0}=-1.$$

除位于 λ 平面的实轴上的正数值 $\lambda_n=(n\pi/l)^2$ 的离散集外这一函数对所有 λ 的 (复) 值有确切定义, λ_n 是单极点. 为研究 $l\to\infty$ 的极限情形, 回忆对所有 x 的实值和复数值

$$2i\sin x=e^{ix}-e^{-ix},$$

且注意 (30.10) 中因子的比值所得依赖于 l 的一对表示式, 即:

$$\frac{\sin\sqrt{\lambda}(l-x_>)}{\sin\sqrt{\lambda}l}=\begin{cases}\dfrac{e^{2i\sqrt{\lambda}l-i\sqrt{\lambda}x_>}-e^{i\sqrt{\lambda}x_>}}{e^{2i\sqrt{\lambda}l}-1},\\[2ex] \dfrac{e^{-i\sqrt{\lambda}x_>}-e^{-2i\sqrt{\lambda}l+i\sqrt{\lambda}x_>}}{1-e^{-2i\sqrt{\lambda}l}}.\end{cases} \tag{30.11}$$

当 λ 是复值时, 例如说

$$\lambda=\alpha+i\beta=|\lambda|e^{i\arg\lambda},$$

其中

$$|\lambda|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \quad \arg\lambda=\tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha},$$

显然有

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda} &= \sqrt{|\lambda|}e^{\frac{i}{2}\arg\lambda}\\ &= \sqrt{|\lambda|}\left\{\cos\left(\frac{1}{2}\arg\lambda\right)+i\sin\left(\frac{1}{2}\arg\lambda\right)\right\}.\end{aligned}$$

这样,如果

$$0<\arg\lambda<2\pi \tag{30.12}$$

当 $l\to\infty$ 时, 函数

$$e^{2i\sqrt{\lambda}l}=e^{2i\sqrt{|\lambda|}l\cos\left(\frac{1}{2}\arg\lambda\right)}e^{-2\sqrt{|\lambda|}l\sin\left(\frac{1}{2}\arg\lambda\right)}$$

的极限为零; 反之, 如果

$$-2\pi<\arg\lambda<0,$$

则

$$e^{2i\sqrt{\lambda}l}\to\infty,\quad \text{当}\quad l\to\infty.$$

此外, 如果

$$-2\pi<\arg\lambda<0, \tag{30.13}$$

则

$$e^{-2i\sqrt{\lambda}l}\to 0,\quad \text{当}\quad l\to\infty.$$

不等式 (30.12) 或 (30.13) 加上另一个不等式 $|\lambda|>0$ 描述 λ 平面中除了沿一半直线, 即正实轴外的所有点, 而在正实轴上

$$|\lambda|>0,\quad \arg\lambda=0;$$

"割开平面" 这个术语用来表示只有沿一半直线 (不管什么方向) 的那些点被排除的平面. 与一割开平面相联系, 确切地定义 λ 的多值函数, 例如双值函数 $\sqrt{\lambda}$, 是可能的; 由于如果点 λ 能穿过割口, 则在返回出发点得到 $\sqrt{\lambda}$ 的一个反号值.

这样, 当 $l\to\infty$ 时, 得到 G_l 的两个极限形式, 即

$$G_+(x,x',\lambda)=\lim_{l\to\infty}G_l(x,x',\lambda)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}x_<}{\sqrt{\lambda}}e^{i\sqrt{\lambda}x_>},\quad 0<\arg\lambda<2\pi \tag{30.14}$$

和

$$G_-(x,x',\lambda)=\lim_{l\to\infty}G_l(x,x',\lambda)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}x_<}{\sqrt{\lambda}}e^{-i\sqrt{\lambda}x_>},\quad -2\pi<\arg\lambda<0, \tag{30.15}$$

具有共同性质

$$G_\pm\to 0,\quad \text{当}\ x_>\to\infty.$$

换一种说法, 当 λ 在各割开平面中有任意值时, 存在 Green 函数, 其规定包括

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda\right)G_\pm=0,\quad x\neq x',\quad 0<x,x'<\infty,$$

$$G_\pm(0,x',\lambda)=0, \tag{30.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}G_\pm\bigg|_{x=x'-0}^{x=x'+0}=-1$$

和

$$G_\pm\to 0,\quad 当\quad x_>\to\infty.$$

转到 $G_\pm$ 对参变量 λ 的依赖性且注意到 (由各因子的展开式得到的) 变化形式

$$G_\pm(x,x',\lambda)=\left(x_<-\frac{1}{6}\lambda x_<^3+\frac{1}{120}\lambda^2x_<^5-\cdots\right)\cdot\left(1\pm i\sqrt{\lambda}x_>-\frac{1}{2}\lambda x_>^2+\cdots\right),$$

包括 λ 的整数幂和非整数幂两者, 它显示出割口 $\arg\lambda=0,|\lambda|>0$ 显然表示所说两函数的奇线; 这样 $G_\pm$ 在被关系式

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 0_+}G_+(x,x',\lambda^*e^{i\epsilon})-G_+(x,x',\lambda^*e^{i(2\pi-\epsilon)})\\&=\frac{\sin\sqrt{\lambda^*}x}{\sqrt{\lambda^*}}\left[e^{i\sqrt{\lambda^*}x_>}-e^{-i\sqrt{\lambda^*}x_>}\right]\\&=2i\frac{\sin\sqrt{\lambda^*}x_<\sin\sqrt{\lambda^*}x_>}{\sqrt{\lambda^*}}\neq 0,\quad\lambda^*>0\end{aligned}$$

所表达的意义下沿这割口处处不连续; 对 G_- 有类似的关系式.

$G_\pm$ 的表示式 (30.14),(30.15) 对 λ 的每个实正值有确切定义; 它们满足 (30.16) 中除最后一个以外的所有关系式, 且显然

$$\lim_{x_>\to\infty}G_\pm$$

不存在. 肯定

$$G(x,x',\lambda)=\mathrm{Re}\ G(x,x',\lambda)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}x_<}{\sqrt{\lambda}}\cos\sqrt{\lambda}x_> \tag{30.17}$$

定义一个实 Green 函数是一件简单的事, 而函数

$$\mathrm{Im}\ G_\pm(x,x',\lambda)=\pm\frac{\sin\sqrt{\lambda}x_<}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}x_>$$

有连续的 x 导数, 因此从这种类型中排除.

因此, 适合于在有限区间 $0 < x < l$ 上所考虑边值问题的离散本征值谱 $\lambda_n = (n\pi/l)^2, n = 1, 2, \cdots$ 和本征函数 $\sin \dfrac{n\pi x}{l}$ 有在无穷区间 $0 < x < \infty$ 上的连续对应部分 $\lambda > 0$ 和 $\sin\sqrt{\lambda}x$. 与连续本征谱相关联的本征函数对所有 $x > 0$ 有界, 虽然它们显然在 $0 < x < \infty$ 上非平方可积; 这里不作验证地引用性质

$$\int_0^\infty \sin\sqrt{\lambda'}x \sin\sqrt{\lambda''}x dx = 0, \quad \lambda' \neq \lambda''.$$

在有界或无限区间的两端点的边界条件是必要的, 且公式化地表示在 $x = \infty$ 的合适条件要求有充分的考虑. 给定偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, t > 0, k > 0$$

和条件

$$u(0,t) = A\mathrm{Re}e^{i(\omega t - \delta)}, \quad t > 0, \omega > 0,$$

$$u(\infty, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \to 0, \quad x \to \infty.$$

寻找借助于复值函数 $X(x)$ 的形如

$$u(x,t) = A \ \mathrm{Re}\left[X(x)e^{i(\omega t - \delta)}\right] \tag{30.18}$$

的解是合适的, 其中 $X(x)$ 满足

$$L[X] = \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{i\omega}{k}X = 0, \quad x > 0$$

和

$$X(0) = 1, \quad X \to 0, \quad 当 \quad x \to \infty.$$

对 X 的常微分方程的积分表示成

$$X_\pm(x) = e^{\pm\sqrt{\frac{i\omega}{k}}x} = e^{\pm i\sqrt{\frac{\omega}{2k}}(1+i)x},$$

由于

$$\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

且特定的选择

$$X_+(x) = e^{\sqrt{\frac{\omega}{2k}}(-1+i)x}, \quad x > 0$$

满足两个边界条件.

引入 Green 函数 $G\left(x,x',\frac{i\omega}{k}\right)$ 满足

$$L[G]=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{i\omega}{k}\right)G=0,\quad x\neq x',$$

$$G\left(0,x',\frac{i\omega}{k}\right)=0$$

和

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x'-0}^{x=x'+0}=-1;$$

这里有显式表示

$$G\left(x,x',\frac{i\omega}{k}\right)=\frac{\sin\left(\sqrt{\frac{i\omega}{k}}x_<\right)}{\sqrt{\frac{i\omega}{k}}}e^{i\sqrt{\frac{i\omega}{k}}x_>},$$

当 $x_>\to\infty$ 时有零极限, 如果

$$\arg\sqrt{\frac{i\omega}{k}}=\frac{\pi}{4}.$$

应用 Green 恒等式, 即

$$\int_0^\infty[GL[X]-XL[G]]dx=G\frac{dX}{dx}-X\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=0}^{x=\infty},$$

连同 X,G 的性质, 发现

$$X(x)=X(0)\left.\frac{\partial}{\partial x'}G\right|_{x'=0}=X_+(x),\quad x>0,$$

所以解 (30.18) 成为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=A\mathrm{Re}\left[e^{\sqrt{\frac{\omega}{2k}}(-1+i)x+i(\omega t-\delta)}\right]\\&=Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2k}}x}\cos\left[\omega t-\sqrt{\frac{\omega}{2k}}x-\delta\right].\end{aligned}\tag{30.19}$$

如果加初始条件, 例如说

$$u(x,0)=0,$$

则必须采用复合形式

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t),$$

其中 u_1 由 (30.19) 确定而 u_2 满足

$$\frac{\partial}{\partial t}u_2 = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_2, \quad x>0, \quad t>0,$$
$$u_2(0,t)=0, \quad u_2 \to 0, \quad 当\ x\to\infty, \quad t>0 \tag{30.20}$$

和

$$u_2(x,0) = -u_1(x,0), \quad x>0.$$

对所有 $\lambda>0$, (30.20) 中的偏微分方程的分离变量解由

$$\sin\sqrt{\lambda}xe^{-k\lambda t}$$

给出, 且显然在 $x=0$ 处为零; 其次引入 $u_2(x,t)$ 更一般的表示式

$$u_2(x,t) = \int_0^\infty F(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}xe^{-k\lambda t}d\lambda, \tag{30.21}$$

则因子 $F(\lambda)$ 必须满足关系式

$$\int_0^\infty F(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}xd\lambda = -u_1(x,0) = -Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2k}}x}\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2k}}+\delta\right), \ x>0 \tag{30.22}$$

为了现在的目的, 只需注意进入无限坐标上边/初值问题的解表示式中的是一个 Fourier (正弦) 积分而非 Fourier 正弦级数就足够了.

考虑一维波动方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad x>0 \tag{30.23}$$

和边界条件

$$y(0,t) = A\mathrm{Re}\left[e^{i(\omega t-\delta)}\right],$$

它描述一根长弦在一端的周期位移. (30.23) 的通解已知, 即带有任意函数 f, g 的

$$y(x,t) = f\left(t-\frac{x}{c}\right) \quad 和 \quad y(x,t) = g\left(t+\frac{x}{c}\right);$$

这些表示以常速度 c 沿该弦分别按 x 的增加或减少方向行进的位移曲线. 设

$$y(x,t) = A\mathrm{Re}\left[X(x)e^{i(\omega t-\delta)}\right], \quad x>0,$$

因而对 X 的规定包括

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}X = 0, \quad x>0$$

和

$$X(0) = 1.$$

为了刻画第二个边界条件, 可以认为弦在端点 $x=0$ 的强迫振动结果导致一个扰动曲线从那里行进离去, 即朝 x 的增加方向离去; 这说明边界条件为

$$X(x) \sim e^{-i\frac{\omega}{c}x}, \quad x \to \infty,$$

由于

$$\mathrm{Re}X(x)e^{i\omega t} = \mathrm{Re}e^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)},$$

对任意 ω, 可表示离开原点移动的一个往外去的波列或曲线.

因此, 选择 Green 函数

$$G\left(x, x', \frac{\omega}{c}\right) = \frac{\sin\dfrac{\omega}{c}x_<}{\dfrac{\omega}{c}} e^{-i\frac{\omega}{c}x_>}$$

且注意边界项

$$G\frac{dX}{dx} - X\frac{\partial G}{\partial x}$$

当 $x \to \infty$ 和 x' 有限时相互消去. 如前面例子中所实现的, 确定式

$$X(x) = X(0)\left.\frac{\partial}{\partial x'}G\right|_{x'=0} = e^{-i\frac{\omega}{c}x}, \quad x > 0$$

随之得出, 且

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A\mathrm{Re}\left[e^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)-i\delta}\right] \\ &= A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)-\delta\right], \quad x > 0 \end{aligned}$$

详细描述该弦在其端点 $x=0$ 处的一个激发的周期响应.

可以从上面的论述推测: 每当边值问题与变量的无限区间相关联时就会出现连续本征值谱. 然而, Schrödinger, E. (薛定谔, 1887—1961) 于 1927 年对线性振子的量子力学问题提出的偏微分方程的以下分析揭示出一个反例:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi + \frac{m^2\omega_0^2x^2}{2}\Psi = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi, \quad -\infty < x < \infty, \tag{30.24}$$

这里 $\Psi(x,t)$ 定义具有质量 m、固有频率 ω_0 (按经典定义) 的一个振子的波函数, 且 $2\pi\hbar$ 为 Planck 常数 (普朗克, 1858—1947) 常数, 为量子论中的一个基本常数. 采取分离变量形式

$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar} \tag{30.25}$$

这里参数 E 有能量的量纲, 对 $\psi(x)$ 的与时间无关的 Schrödinger 方程成为

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m\omega_0^2x^2}{\hbar^2}\right]\psi = 0, \quad -\infty < x < \infty \tag{30.26}$$

或

$$\frac{d^2}{ds^2}\psi+(\lambda-s^2)\psi=0,\quad -\infty<s<\infty, \tag{30.27}$$

这里

$$x=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}s \tag{30.28}$$

和

$$E=\frac{1}{2}\hbar\omega_0\lambda.$$

为 (30.27) 的可接受解连同它们的导数在整个区间 $-\infty<s<\infty$ 上有限且连续, 与量子模型中的物理解释一致; 现在也可证明, 当该常微分方程的参数 λ 具有离散特征值时, 这样一种性状实现了.

由于当 s 换成 $-s$ 时常微分方程 (30.27) 保持不变, 函数 $\psi(s),\psi(-s)$ 两者都是解; 且组合

$$\psi(s)\pm\psi(-s)$$

分别有偶或奇对称性. 只需考虑一个偶对称函数 $\psi(s)$, 其曲线在 $s=0$ 有水平切线, 这里 $\dfrac{d\psi}{ds}=0$; 且只需注意限制在半区间 $s>0$ 上, 因为 $\psi(s)$ 在 $s<0$ 中对应的规定是立即可得的.

在 $|s|$ 的充分大值处, (30.27) 中的系数项的第二个占优势且修正方程

$$\frac{d^2}{ds^2}\psi-s^2\psi=0$$

容许有近似解

$$\psi(s)\sim C_1e^{s^2/2}+C_2e^{-s^2/2},\quad s\to\infty, \tag{30.29}$$

由于

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\psi&\sim C_1(s^2+1)e^{s^2/2}+C_2(s^2-1)e^{-s^2/2}\\&\sim s^2\psi,\quad 当\quad s\gg 1.\end{aligned}$$

由于从 (30.29) 得出的 $\psi(s)$ 的量, 如果 $C_1\neq 0$, 则当 $s\to\infty$ 时无限增加, 要有整体有界的解, 要求 $C_1=0$ 是必要的; 同时这也对 λ (或 E) 上加了限制. 当 $s\to\infty$ 时有零极限的本征解与 λ 的离散本征值有关.

如果在 Schrödinger 方程中的势能项

$$V(x)=\frac{m\omega_0^2x^2}{2}\quad 或\quad V(s)=\frac{1}{2}\hbar\omega_0s^2 \tag{30.30}$$

有不同的渐近性状, 即 (30.30) 的替代势能项使得

$$V(s)\to 0,\quad s\to\infty,$$

则对应的近似解

$$\psi(s) \sim C_1 e^{i\sqrt{\lambda}s} + C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}s}, \quad s \to \infty$$

连同其一阶导数当 $\lambda > 0$ 时保持处处有界. 当 $\lambda < 0$ 时存在离散本征值谱.

为了对有资格作为本征函数的特解 $\psi(s)$ 定性描述, 可以得到 (ψ, s) 平面上解曲线的不同特征的含义. 常微分方程 (30.27) 本身表示 $\dfrac{d^2\psi}{ds^2}$ 和 ψ 之间的可变化的比例关系, 按照 $\lambda \gtrless s^2$, 其比具有正或负值; 且由于该方程是齐次的, 任何偶解的非零值 $\psi(0)$ 能任意地选取. 回忆曲率与二阶导数符号之间的联系, 对 $\lambda > s^2$, 不论 $\psi \gtrless 0$, ψ 曲线当变量 s 增加时倾向于 s 轴 (见图 44); 如果 $\lambda < s^2$, 则从 s 轴离开. 在 s 轴上 ψ 为零处和由 $s^2 = \lambda$ (或 $E = V$) 决定的位置, 转向点 (turning points) 出现了.

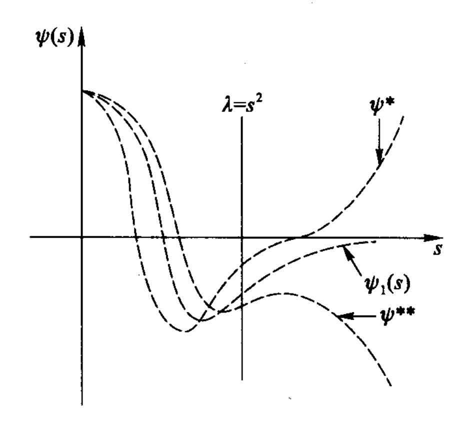


图 44

因此, 给定一个特定的参数值 λ^*, 对应的解曲线 $\psi^*(s)$ 从具有水平切线的 ψ 轴的正半轴上一点出发, 转向下且在最终以正曲率稳定上升前串过 s 轴. 与第二个参数 λ^{**} 相对应的解曲线 $\psi^{**}(s)$ 揭示在 s 的值超过 $\sqrt{\lambda}$ 后有负曲率且按数量单调递减. 由于该常微分方程的解揭示对参变量 λ 的连续依赖性, 至少有一参数 λ_1 在 λ^* 和 λ^{**} 之间, 对此 λ_1 对应解当 $s \to \infty$ 时趋于零, 且这反映渐近式 (29.30) 中系数 C_1 为零. 所以 λ_1 是一个本征值且对应解 $\psi_1(s)$ 是一个本征函数.

为得到基于分析的详细结果, 将 $\psi(s)$ 换成满足

$$\psi(s) = \varphi(s) e^{-s^2/2} \tag{30.31}$$

的另一相关函数 $\varphi(s)$ 是方便的, 由于 $\varphi(s)$ 中的代数 (或幂) 的变化当 $s \to \infty$ 时能预料. 刻画 $\varphi(s)$ 且取代 (30.27) 的方程也是变系数常微分方程, 即

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} - 2s\frac{d\varphi}{ds} + (\lambda - 1)\varphi = 0, \quad 0 < s < \infty \tag{30.32}$$

这里 λ 起参数作用. 这个方程的在 $s = 0$ 具有正则性的解可用幂级数形式找到, 即

$$\varphi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n. \tag{30.33}$$

将上式和对应的微分后的式子代入 (30.33), 得出

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)s^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n \left(n - \frac{\lambda - 1}{2}\right) s^n,$$

这里两个式子的等式是使 s 的同类幂的分别系数相合并而得到的. 这提供了一个所谓的**递推关系式**

$$a_{n+2}(n+2)(n+1) = 2a_n\left(n - \frac{\lambda-1}{2}\right), \quad n \geqslant 0, \tag{30.34}$$

它唯一地

$$\text{用} \begin{cases} a_0 \\ a_1 \end{cases} \text{决定} \begin{cases} a_{2n} \\ a_{2n+1} \end{cases}, \quad \text{对} \quad n \geqslant 1;$$

所以, 结果得到两个无关的级数解, 一个带 s 的偶次幂和一个任意标量因子 a_0, 另一个带 s 的奇次幂和一个任意标量因子 a_1. 当在一个特定的系数 a_N 后同一奇偶性 (偶或奇指标) 的后继系数全为零时得到**多项式解**, 且按 (30.34), 如果参数 λ 有值

$$\lambda - 1 = 2N$$

或

$$\lambda = 2N + 1 \tag{30.35}$$

时正是这种情形. 在这样的情形下, $\varphi_N(x)$ 表示次数为 N 的多项式解而由

$$\psi_N(s) = \varphi_N(s)e^{-s^2/2} \tag{30.36}$$

定义的相伴函数 $\psi_N(s)$ 构成该问题的可接受解或本征函数, 因为它在整个区间 $0 \leqslant s < \infty$ 上有界且当 $s \to \infty$ 时有零极限, 由于

$$\psi_N(s) \sim Cs^N e^{-s^2/2} \to 0, \quad \text{当} \quad s \to \infty.$$

该级数在有限多项以后终止或中断, 是成为本征函数的充分必要条件; 否则的话, 当取极限 $s \to \infty$ 时 $\psi(s)$ 不再保持有界.

熟知的且历史上有重大意义的 Schrödinger 量子力学振子理论中的能量本征值,

$$E_N = \hbar\omega_0\left(N + \frac{1}{2}\right), \quad N = 0, 1, \cdots \tag{30.37}$$

显然包括最小的本征值 $E_0 = \dfrac{1}{2}\hbar\omega_0$.

习 题 30

1. 构造由以下方程组定义的 Green 函数 $G(x,x',\lambda)$:

$$L[G]=\left(\frac{d^2}{dx^2}-\lambda^2\right)G=0,\quad x\neq x',\quad -L<x,x'<L,$$

$$G(-L,x',\lambda)=0,\quad G(L,x',\lambda)=0,$$

$$G\text{ 连续},\quad \frac{d}{dx}G\bigg|_{x=x'-0}^{x=x'+0}=-1,$$

其中 λ 为正实值; 验证极限形式

$$G_\infty(x-x',\lambda)=\frac{1}{2\lambda}e^{-\lambda|x-x'|},\quad -\infty<x,x'<\infty,\quad L\to\infty,$$

它依赖于变量 x,x' 之差. 其次求在 $0<x,x'<L$ 满足边界条件

$$\frac{dG}{dx}\bigg|_{x=0}=0,\quad G(L,x',\lambda)=0$$

的类似的 Green 函数, 且建立当 $L\to\infty$ 时对它的近似表示式,

$$G_\infty(x,x',\lambda)+G_\infty(x,-x',\lambda),\quad 0<x,x'<\infty.$$

上式的原始意义是什么?

用 Green 函数方法求解非齐次边值问题

$$L[y]=\left(\frac{d^2}{dx^2}-\lambda^2\right)y=f(x),\quad 0<x<L,$$

$$U_1[y]=\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0}=A,\quad U_2[y]=y(L)=0$$

且与 $L\to\infty$ 极限时成立的结果相对照.

2. 导出与偏微分算子

$$L=\frac{d^2}{dx^2}+\lambda,$$

周期边界条件

$$G(-L,x',\lambda)=G(L,x',\lambda),\quad \frac{dG}{dx}\bigg|_{x=-L}=\frac{dG}{dx}\bigg|_{x=L}$$

和惯用的要求

$$G\text{ 连续},\quad \frac{dG}{dx}\bigg|_{x=x'-0}^{x=x'+0}=-1$$

相结合的 Green 函数的显式表示

$$G(x, x', \lambda) = \frac{\cos\sqrt{\lambda}(L - |x - x'|)}{2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}L}, \quad -L < x, x' < L.$$

验证当 $0 < \arg\sqrt{\lambda} < \pi$ 时, 在 $L \to \infty$ 的极限情形下处处有界的形式

$$G_\infty(x - x', \lambda) = \frac{i}{2\sqrt{\lambda}} e^{i\sqrt{\lambda}|x - x'|}, \quad -\infty < x, x' < \infty; \qquad (*)$$

观察到当 $|x'|$ 有限, $|x| \to \infty$ 时, G_∞ 本身趋向于一个公共的极限, 而

$$\left(\frac{d}{dx} \mp i\sqrt{\lambda}\right) G_\infty = 0, \quad x \to \pm\infty. \qquad (**)$$

如果 λ 是实数, 证实

$$\mathrm{Re}G_\infty = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \sin\sqrt{\lambda}|x - x'|$$

在 $x = x'$ 处有所要求的导数的不连续性, 而 $\mathrm{Im}\, G$ 是连续可微的.

带有

$$y(x) \sim e^{\pm i\frac{\omega}{c}x}, \quad x \to \pm\infty$$

的表示式

$$Y(x, t) = \mathrm{Re}\left[y(x)e^{-i(\omega t - \delta)}\right], \quad t \text{ 为时间变量}$$

描述时间周期的波列, 它在 $x = \pm\infty$向外行进. 由于 Green 函数表示式

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_\infty\left(x - x', \frac{\omega}{c}\right) f(x')dx' \\ &= \frac{ic}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\omega}{c}|x - x'|} f(x')dx', \end{aligned}$$

坐标因子 $y(x)$ 的这种性状是显然的, 其中假设

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty;$$

这样

$$y(x) \simeq \frac{ic}{2\omega} A_\pm e^{\pm i\frac{\omega}{c}x}, \quad x \to \pm\infty,$$

这里

$$A_\pm = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\pm i\frac{\omega}{c}x}dx.$$

由于

$$L[y] = \left[\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right] y(x) = -f(x),$$

函数 $Y(x,t)$ 满足一个非齐次波动方程, 即

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]Y(x,t)=c^2\mathrm{Re}\left\{f(x)e^{-i(\omega t-\delta)}\right\}.$$

3. 考虑对半径为 R 的平面圆域中的 Laplace 算子 ∇^2 的广义 Green 函数, 其规定包括

$$L[G(r,\vartheta,r',\vartheta')]=\nabla^2 G=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\right)G=-Q+\frac{1}{\pi R^2},$$

$$0<r,r'<R,\quad 0<\vartheta,\vartheta'<2\pi, \tag{i}$$

$$G \text{ 对 } \vartheta \text{ 以 } 2\pi \text{ 为周期},\quad \left.\frac{\partial}{\partial r}G\right|_{r=R}=0,\quad 0\leqslant\vartheta<2\pi,$$

且 G 在 $r=0(r'\neq 0)$ 有限; 偏微分方程中的符号 Q 表示局部化源或 Green 函数在点 r',ϑ' 的奇性. 由于 $\nabla^2 G$ 在全部圆域上的积分等于 (由散度定理) $\dfrac{\partial G}{\partial r}$ 沿其边界的曲线积分, 因而按约定的边界条件为零, (i) 的相容性要求

$$\int Qr\,dr\,d\vartheta=1, \tag{ii}$$

这里上面积分的支集是一个无穷小 (点) 区域.

G 对于变量 ϑ 的周期性提示以下形式的展开式

$$G(r,\vartheta,r',\vartheta')=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(r,r')\cos n(\vartheta-\vartheta'), \tag{iii}$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{n^2}{r^2}\right)f_n(r,r')\cos n(\vartheta-\vartheta')=-Q+\frac{1}{\pi R^2}. \tag{iv}$$

(iv) 对 ϑ 在 $0<\vartheta<2\pi$ 上逐项积分得出

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)f_0=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}f_0=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Q\,d\vartheta+\frac{1}{\pi R^2}, \tag{v}$$

且先用 $\cos m\vartheta$ (或 $\sin m\vartheta$) 乘, 类似的积分得出的结果为

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}f_m\right)-\frac{m^2}{r^2}f_m=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}Q\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}m\vartheta\,d\vartheta,\quad m=1,2,\cdots \tag{vi}$$

函数 $f_0, f_m, m=1,2,\cdots$ 在 $r=r'$ 处有不连续导数, 具有分别的规定值

$$r\frac{d}{dr}f_0\Big|_{r=r'-0}^{r=r'+0}=-\frac{1}{2\pi} \tag{vii}$$

和

$$r\frac{d}{dr}f_m\Big|_{r=r'-0}^{r=r'+0}=-\frac{1}{\pi},\quad m=1,2,\cdots \tag{viii}$$

它们是由 (v),(vi) 推导出的. 所以这些函数可以根据微分方程

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df_0}{dr}\right)=\frac{1}{\pi R^2},\quad r\neq r',$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df_m}{dr}\right)-\frac{m^2}{r^2}f_m=0,\quad r\neq r',\quad m=1,2,\cdots$$

连同条件

$$\frac{d}{dr}f_0\Big|_{r=R}=0,\quad \frac{d}{dr}f_m\Big|_{r=R}=0,\quad m=1,2,\cdots$$

不连续性条件 (vii),(viii) 和保证 Green 函数对称性的另一规定

$$\int_0^R rf_0(r,r')dr=0$$

来确定. 完成这些确定, 给出 f_0, f_m 在 $r=0$ 是正则的, 证实所要找的 Green 函数表示式为

$$\begin{aligned}G(r,\vartheta,r',\vartheta')=&-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_>}{R}+\frac{r^2+r'^2}{4\pi R^2}-\frac{3}{8\pi}\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi n}\left(r_>^n+\frac{R^{2n}}{r_>^n}\right)\frac{r_<^n}{R^{2n}}\cos n(\vartheta-\vartheta'),\end{aligned} \tag{ix}$$

这里 $(r_>, r_<)$ 表示 (r, r') 的较大者、较小者.

考虑到已知结果

$$\ln\left(1-\alpha e^{i\beta}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n}e^{in\beta},\quad |\alpha|<1$$

和由此得到的推论

$$\operatorname{Re}\ln\left(1-\alpha e^{i\beta}\right)=\ln\sqrt{1-2\alpha\cos\beta+\alpha^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n}\cos n\beta, \tag{*}$$

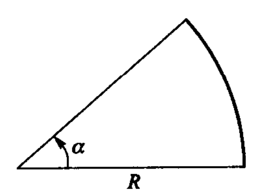
建立 Green 函数的一个显式 (非级数) 表示且验证包括在其定义中的条件. 证明当 $R\to\infty$ 时

$$G-\frac{1}{2\pi}\ln\ R$$

有确定的极限且作出解释.

4. 要求构造平面的角扇形

$$0 < \vartheta < \alpha, \quad 0 < r < R$$



内的 Laplace 算子的 Green 函数 $G(r,\vartheta,r',\vartheta')$, 给定

$$L[G] = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}\right) G = -Q,$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{\vartheta=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{\vartheta=\alpha} = 0, \quad G(R,\vartheta,r',\vartheta') = 0, \quad 0 < \vartheta < \alpha$$

且 G 在 $r = 0(r' \neq 0)$ 有限; 源符号 Q 属于点状分布, 即

$$Q = 0, \quad r \neq r', \quad \vartheta \neq \vartheta'.$$

写出

$$G(r,\vartheta,r',\vartheta') = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r,r') \sin\frac{n\pi\vartheta}{\alpha} \sin\frac{n\pi\vartheta'}{\alpha}, \tag{i}$$

带有对 ϑ, ϑ' 的对称依赖性, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\ \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\right] f_n(r,r') \sin\frac{n\pi\vartheta}{\alpha} \sin\frac{n\pi\vartheta'}{\alpha} = -Q. \tag{ii}$$

由于

$$\int_0^\alpha \sin\frac{m\pi\vartheta}{\alpha} \sin\frac{n\pi\vartheta}{\alpha} d\vartheta = 0, \quad m \neq n,$$

从 (ii) 用 $\sin\dfrac{m\pi\vartheta}{\alpha}$ 乘后再逐项积分, 推导出

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\ \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2\right) f_m(r,r') \sin\frac{m\pi\vartheta'}{\alpha} = -\frac{2}{\alpha}\int_0^\alpha Q \sin\frac{m\pi\vartheta}{\alpha} d\vartheta$$

或

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\ \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2\right) f_m = -\frac{2}{\alpha} q, \quad m = 1, 2, \cdots$$

这里

$$q = 0, \quad r \neq r',$$
$$\int_{r'-0}^{r'+0} q dr = 1.$$

这样函数 f_m 能从以下的关系式中得到

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2\right) f_m = 0, \quad r \neq r', \quad m = 1, \cdots$$

$$f_m(0, r') \text{ 有限}, \quad r' \neq 0, \quad \left.\frac{d}{dr} f_m\right|_{r=R} = 0 \tag{iii}$$

和

$$\left. r\frac{d}{dr} f_m \right|_{r=r'-0}^{r=r'+0} = -\frac{2}{\alpha}.$$

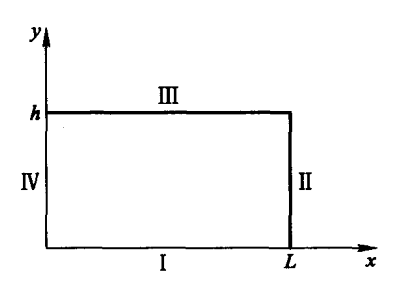
试确定满足 (iii) 的函数 $f_m(r, r')$ 然后确定 Green 函数 (i). 改写 (i) 成形式

$$G(r, \vartheta, r', \vartheta') = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} f_m(r, r')\left[\cos\frac{m\pi}{\alpha}(\vartheta - \vartheta') - \cos\frac{m\pi}{\alpha}(\vartheta + \vartheta')\right]$$

且用问题 3 中的结果 (*) 去求该级数的和. 讨论 $R \to \infty$ 的极限情形.

5. 考虑平面矩形区域 $0 < x < L, 0 < y < h$ 和满足以下规定的 Green 函数:

$$L[G] = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) G = -Q,$$



$$G = 0, \text{ 在边界线段 I, II, III 上},$$
$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=0}, \text{ 在边界线段 IV 上}.$$

用展开式

$$G(x, y, x', y') = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x, x') \sin\frac{n\pi y}{h} \sin\frac{n\pi y'}{h}$$

和各关系式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2\right)f_n(x,x')=0,\quad x\neq x',\quad n=1,2,\cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f_n\bigg|_{x=0}=0,\quad f_n(L,x')=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f_n\bigg|_{x=x'-0}^{x=x'+0}=-1$$

去显式地刻画函数 $f_n(x,x')$. 找出在 $L\to\infty$ 的极限下出现的 Green 函数的更简单形式, 求此级数的和且检验这结果.

6. 在线性调和振子的 Schrödinger 理论中出现的常微分方程 (30.32), 即

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}-2x\frac{d\varphi}{dx}+2\nu\varphi=0,$$

如果

$$\nu=n\ \text{为非负整数},$$

则其解以数学家 Hermite (埃尔米特, 1822—1901) 的名字命名, 称为 Hermite 多项式,

$$\varphi_n(x)=H_n(x).$$

通过递推关系式

$$a_{m+2}(m+2)(m+1)=-2a_m(n-m),\quad m=0,1,2,\cdots$$

可以不那么省力地确定其系数, 递推式唯一确定各多项式的系数

$$H_{2n}(x)=a_0\left[1+\frac{a_2}{a_0}x^2+\cdots+\frac{a_{2n}}{a_0}x^{2n}\right],$$

$$H_{2n+1}(x)=a_1\left[x+\frac{a_3}{a_1}x^3+\cdots+\frac{a_{2n+1}}{a_1}x^{2n+1}\right],$$

其中 a_0,a_1 是任意的. 一种更系统化的方法是基于母函数 (生成函数)

$$\mathcal{F}(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nH_n(x)\frac{t^n}{n!}\tag{i}$$

的方法, 它具有用第二自变量 t 的幂级数表示式; 容易证明这函数满足偏微分方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2x\frac{\partial}{\partial x}+2t\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathcal{F}(x,t)=0.\tag{ii}$$

在现在的情况, 形如

$$\mathcal{F}(x,t) = X(xt)T(t) \tag{iii}$$

的特解就够用了; 代入 (ii) 且分离因子得出

$$\frac{\dfrac{d^2}{d\xi^2}X(\xi)}{X(\xi)} = -\frac{2\dfrac{d}{dt}T(t)}{tT(t)} = \lambda^2,$$

这里 $\xi = xt$, 接着得出带有一个任意参数的规定式

$$X = e^{\lambda xt}, \quad T = e^{-\frac{\lambda^2 t^2}{4}}.$$

选择 $\lambda = 1$, 且取带有 (i) 中系数 c_n 的相伴的

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} \tag{iv}$$

母函数后即得到 Hermite 多项式的经典定义.

试推演出前五个多项式的显式表示且验证它们的一般特征

$$H_n(x) = \left(\frac{d^n}{dt^n}e^{2xt-t^2}\right)\bigg|_{t=0} = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, \cdots$$

Hermite 正交函数这名称适用于

$$\psi_n(x) = e^{-x^2/2}H_n(x), \tag{v}$$

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_m(x)\psi_n(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)dx = 0, \quad m \neq n. \tag{vi}$$

验证结果 (vi), 利用两个分别的母函数

$$\psi(x,t) = e^{-\frac{x^2}{2}+2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

和

$$\psi(x,s) = e^{-\frac{x^2}{2}+2xs-s^2} = \sum_{m=0}^{\infty}\psi_m(x)\frac{s^m}{m!}$$

相乘后对 x 在 $(-\infty,\infty)$ 上积分, 再利用关系式

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2+2x(t+s)-t^2-s^2}dx = \sqrt{\pi}e^{st}$$

计算积分

$$N_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)dx. \tag{vii}$$

注意到正交性关系式 (vi) 提示用函数 $\psi_n(x)$ 展开定义在 $-\infty < x < \infty$ 上一个任意函数 $f(x)$ 的可能性, 即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x), \quad -\infty < x < \infty \tag{viii}$$

带有其系数的各个确定式

$$N_n a_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_n(x)dx, \quad n = 0, 1, \cdots$$

7. 给定函数 $u(x,t)$ 的偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\alpha\beta}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0, \quad r > 0, t > 0, \alpha > 0, \beta > 0;$$

用单自变量

$$\zeta = \frac{r}{2\sqrt{\alpha t}},$$

证明 $\dfrac{\partial}{\partial \zeta}u(\zeta)$ 满足一个一阶常微分方程. 积分这个常微分方程且证实特解为

$$u(\zeta) = B - C\int_{\zeta^2}^{\infty} e^{-\sigma}\sigma^{\frac{\beta-1}{2}}d\sigma,$$

当 $r \to \infty, \zeta \to \infty$ 时它趋于极限值 B. 指出如何确定常数 C 使得 $u(R,t) = A$. 讨论在区间 $0 < r < R$ 上满足规定

$$u(R,t) = A, \quad u(0,t) = B$$

的对应解.

8. 半无限或全无限区间上的本征值问题属于有真正理论意义和许多不同考虑有关的一类奇异本征值问题; 特别有兴趣的是实施点移向无穷时边界条件的作用. Weyl, C. H. H. (外尔, 1885—1955) 于 1910 年对这类问题的经典研究工作构成线性边值问题分析中重要的一章. 为简明概述他的方法和推论, 考虑一个二阶常微分方程的自伴形式:

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y + \lambda r(x)y = 0, \tag{i}$$

这里 $p(x) > 0, r(x) > 0$, 且 λ 是一个参数; 首先仔细研究有限区间 $0 < x < a$ 上在端点 $x = 0$ 满足特殊的边界条件, 例如说,

$$y(0) = 0 \tag{ii}$$

的问题. 设

$$y_1(x,\lambda), \quad y_2(x,\lambda) \tag{iii}$$

表示 (i) 在 $x = 0$ 满足以下性质 (与 λ 无关) 的基本解组:

$$y_1(0,\lambda) = 1, \quad y_2(0,\lambda) = 0, \tag{iv}$$

$$p(0)\frac{d}{dx}y_1\bigg|_{x=0} = 0, \quad p(0)\frac{d}{dx}y_2\bigg|_{x=0} = 1.$$

则

$$y(x) = Cy_2(x,\lambda) \tag{v}$$

表示满足 (ii) 的 (i) 的全部解. 如果在 $x = a$ 的齐次边界条件

$$\cos\vartheta y(a) + \sin\vartheta p(a)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = 0, \quad 0 \leqslant \vartheta < \pi, \tag{vi}$$

包含一个角参数 ϑ, 则方程组 (i),(ii),(iv) 定义一个正则 Sturm-Liouville 问题; 利用 (v), 特征方程成为

$$\cos\vartheta y_2(a,\lambda) + \sin\vartheta p(a)\left.\frac{d}{dx}y_2\right|_{x=a} = 0. \tag{vii}$$

这个方程的每一个实单根 $\lambda^*(\vartheta)$ 确定一个本征值, 且对应的解 $y_2(x,\lambda^*)$ 表示一个非规范化本征函数. 由于 (vii) 中不能直接取极限 $a \to \infty$, 当 a 增大趋于无穷时, $0 < x < a$ 中的本征值问题如何变化的问题需要一种新鲜的方法. 由 Weyl 提供的那种方法认为 λ 是上半平面上的一个任意复数值, 即

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2, \quad \lambda_2 > 0, \quad \lambda_1 \text{ 为实数},$$

其次刻画另一个复数,

$$n(\lambda) = n_1(\lambda) + in_2(\lambda),$$

通过在 (i) 的特殊形式的解, 即

$$Y_n(x,\lambda) = y_1(x,\lambda) + n(\lambda)y_2(x,\lambda)$$

上施加在 $x=a$ 处的实边界条件 (vi) 得出一个关系式

$$n(\lambda,a)=\frac{y_1(a,\lambda)(-\cot\vartheta)-p(a)\left.\dfrac{dy_1}{dx}\right|_{x=a}}{-y_2(a,\lambda)(-\cot\vartheta)+p(a)\left.\dfrac{dy_2}{dx}\right|_{x=a}},$$

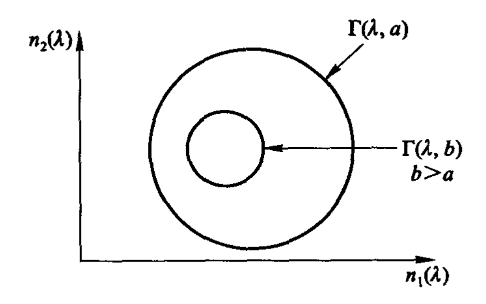
它能看成 $\sigma=-\cot\vartheta$ 和 n 之间的一个线性变换; 该变换的一个特征性质是其中系数有一个单位行列式, 由于 (回顾 (iv))

$$\begin{vmatrix} y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) \\ p(x)\dfrac{d}{dx}y_1 & p(x)\dfrac{d}{dx}y_2 \end{vmatrix}=1,\quad 0\leqslant x\leqslant a.$$

因此, 当与 ϑ 的规定区间 $(0,\pi)$ 一致 σ 在 $(-\infty,\infty)$ 之间变化时,n 描绘出一个圆$\Gamma(\lambda,a)$; 且由 Weyl 推演出的这个对应的值得注意的特征包括以下几点:

(a) 每一圆 $\Gamma(\lambda,a)$ 位于复 n 平面的上半平面内;

(b) 圆 $\Gamma(\lambda,b)$ 在另一圆 $\Gamma(\lambda,a)$ 内 (见图), 如果 $a>b$, 则反之;



(c) 在 $a\to\infty$ 的极限情形, 出现两种不同的可能性, 即

⟨i⟩ $\Gamma(\lambda,a)$ 变成有有限半径的极限圆 $\Gamma(\lambda,\infty)$, 或者

⟨ii⟩ $\Gamma(\lambda,a)$ 收缩成一个极限点, 即

$$\lim_{a\to\infty}n(\lambda,a)=n(\lambda,\infty);$$

(d) 如果对给定的 λ, 情形 ⟨i⟩ 或 ⟨ii⟩ 适用, 则对任何的 λ 的值 $(\mathrm{Im}\lambda\neq 0)$ 同样的分类成立.

利用 Green 定理, 即

$$\int_0^a r(x)\left[f(x)\frac{1}{r(x)}L[g(x)]-g(x)\frac{1}{r(x)}L[f(x)]\right]dx$$
$$=f(x)p(x)\frac{dg}{dx}-g(x)p(x)\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0}^{x=a},$$

同时选取

$$f(x) = Y_n(x,\lambda), \quad g(x) = Y_n(x,\overline{\lambda}), \quad \lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2,$$

利用 (iv),(vii) 等, 建立关系式

$$\int_0^a r(x)|Y_n(x,\lambda)|^2 dx = \frac{\mathrm{Im} n(\lambda)}{\mathrm{Im}\lambda},$$

由此推导出结论 ⟨i⟩.

一开始把参数 λ 选为复值证明是特别有用的, 因为这就可能把前面所述的情形和相应的本征函数区分开来. 为此, 考虑常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \infty, \tag{$*$}$$

它有一个 (单独) 的奇点 $x = \infty$. 如果 λ 是实的且特别地等于零, 则通解

$$y = C_1 x + C_2$$

清楚地表明不存在任何有有限范数的解, 即使得

$$\int_0^\infty |y(x)|^2 dx < \infty$$

的解; 对所有 λ 的正值结论同样成立. 与此对照, 如果 λ 是复数且 $0 < \arg\sqrt{\lambda} < \pi/2$, 则有且仅有一个有限范数的解, 即

$$Y_+(x) = e^{i\sqrt{\lambda}x} = e^{-\alpha x + i\beta x}, \quad \sqrt{\lambda} = \beta + i\alpha, \quad \alpha > 0;$$

显然

$$\int_0^\infty Y_+(x)\overline{Y}_+(x)dx = \int_0^\infty e^{-2\alpha x}dx = \frac{1}{2\alpha},$$

而无关解

$$Y_-(x) = e^{-i\sqrt{\lambda}x} = e^{\alpha x - i\beta x}$$

没有有限范数.

利用 $(*)$ 的基本解组

$$y_1(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x, \quad y_2(x,\lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$$

满足

$$y_1(0,\lambda) = 1, \quad y_2(0,\lambda) = 0,$$
$$\left.\frac{d}{dx}y_1\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{d}{dx}y_2\right|_{x=0} = 1,$$

求能够保证解

$$Y_n(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}x+n(\lambda,a)\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$$

满足边界条件

$$\cos\vartheta Y_n(a,\lambda)+\sin\vartheta\left.\frac{d}{dx}Y_n\right|_{x=a}=0$$

的 $n(\lambda,a)$ 的条件; 证实这时有极限点性状, 即

$$\lim_{a\to\infty}n(\lambda,a)=i\sqrt{\lambda},\quad 0<\arg\sqrt{\lambda}<\pi/2.$$

与之对照, 当常微分方程 (i) 的所有解有有限范数,

$$\int_0^\infty r(x)|y(x)|^2dx<\infty,$$

在极限圆情形, 就需要在 $x=\infty$ 的一个边界条件. 在有限区间上常微分方程

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0,\quad -1<x<1$$

的奇点由系数函数

$$p(x)=1-x^2$$

为零的值所确定, 现在是在两端点 $x=\pm1$; 且这里得到极限圆性状; 所以为区分整族有限范数解边界条件是必需的.

常微分方程

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\frac{\lambda}{x}y=0,\quad \epsilon<x<1$$

容许有基本解组

$$y_1(x,\lambda)=\cos\left(\sqrt{\lambda}\ln\ x\right),\quad y_2(x,\lambda)=\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}\ln\ x\right)}{\sqrt{\lambda}},$$

满足

$$y_1(1,\lambda)=0,\quad y_2(1,\lambda)=0,$$
$$\left.\frac{d}{dx}y_1\right|_{x=1}=0,\quad \left.\frac{d}{dx}y_2\right|_{x=1}=1;$$

给出边界条件

$$y(1,\lambda)=0,\quad \cos\vartheta y(\epsilon,\lambda)+\sin\vartheta\epsilon\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\epsilon}=0,$$

导出本征值方程, 且用解

$$Y_n(x,\lambda) = \cos\left(\sqrt{\lambda}\ln\ x\right) + n(\lambda)\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}\ln\ x\right)}{\sqrt{\lambda}}$$

去验证: 在 $\varepsilon \to 0$ 的极限情形, 在 $x = 0$ 处显示一个极限点性状.

在无限区间或带有在一端点为零的系数函数的包含多种多样特征的奇异问题可以由以下的问题显示出来, 其定义方程包括

$$L[y] = \frac{d^2y}{dx^2} + \lambda r(x)y = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad r(x) > 0,$$
$$y(0) = 0, \quad r(x+2) = r(x), \quad x > 0;$$

这里系数函数是周期的, 例如

$$r(x) = \begin{cases} 1, & 2n < x < 2n+1, \\ \dfrac{1}{4}, & 2n-1 < x < 2n, \end{cases} \qquad n = 0, 1, \cdots$$

且其本征值证明是在一串周期的宽度有限的区间上是连续分布的, 这些区间之间也没有缺口.

第三十一章

正交性及其衍生结果

我们早就强调过正交性和偏微分方程边值问题的 Fourier 型级数解中的各系数的确定之间的联系; 现在对用一组给定的函数来表示任意选定函数以及正交集在这方面起的显著作用进行更广泛的研究是合适的.

大量的实验研究要求对一个复杂的和不完全已知的函数用较简单的函数例如多项式来近似表示. 给出未知函数 $f(x)$ 在点

$$x_1,\quad x_2,\cdots,\quad x_n$$

的离散值,

$$y_1=f(x_1),\quad y_2,\quad \cdots,\quad y_n=f(x_n).$$

Lagrange 构造一个插值多项式,

$$\begin{aligned}P_n(x)=y_1&\frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}\\&+y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)}\\&+\cdots+y_n\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})},\end{aligned}$$

它与上面这些值重合且在其他点定义了插值值. 自然地去思考容许用不断缩小点之间的间隔来增加插值点的个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$, 以及一般函数类中的函数

$f(x)$ 是否也能这样表示. 然而, 当 $n \to \infty$ 的极限情况下寻找对 x 的各次幂的简单表示式时, 发生了技术困难, 这也妨碍了对所得到的无穷幂级数的分析.

作为替代, 假设插值公式是基于正弦级数且考虑它们的系数 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 如何确定以保证

$$f(x) = a_1 \sin\ x + a_2 \sin\ 2x + \cdots + a_{n-1} \sin(n-1)x, \quad 0 < x < \pi. \tag{31.1}$$

在等距点

$$x = \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \cdots, \frac{(n-1)\pi}{n}$$

与给定值

$$f\left(\frac{p\pi}{n}\right), \quad p = 1, \cdots, n-1$$

相连接. 由于这个和即三角多项式在 $x = 0$ 为零, 它将不与 $f(x)$ 的值重合除非后者也为零; 此外, 注意这个和表示 x 的一个奇周期函数, 而在区间 $(0, \pi)$ 外关于 $f(x)$ 没有做任何假定.

对 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 的联立方程, 即

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{n}\right) &= a_1 \sin\frac{\pi}{n} + a_2 \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + a_{n-1} \sin\frac{(n-1)\pi}{n},\\
&\vdots\\
f\left(\frac{p\pi}{n}\right) &= a_1 \sin\frac{p\pi}{n} + a_2 \sin\frac{2p\pi}{n} + \cdots + a_{n-1} \sin\frac{(p(n-1)\pi)}{n},\\
&\vdots\\
f\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) &= a_1 \sin\frac{(n-1)\pi}{n} + a_2 \sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\\
&\quad + \cdots + a_{n-1} \sin\frac{(n-1)^2\pi}{n}
\end{aligned} \tag{31.2}$$

能联合起来通过用适当的三角恒等式以得到各个系数的确定值. 为建立三角恒等式, 用 $2\sin\frac{1}{2}\vartheta$ 乘和式

$$S_n(\vartheta) = \cos\vartheta + \cos\ 2\vartheta + \cdots + \cos(n-1)\vartheta \tag{31.3}$$

在简单的重排后, 注意到

$$2\sin\frac{1}{2}\vartheta S_n(\vartheta) = \sin(2n-1)\frac{\vartheta}{2} - \sin\frac{\vartheta}{2},$$

即

$$S_n(\vartheta) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(n-\frac{1}{2})\vartheta}{2\sin\frac{1}{2}\vartheta}, \quad \vartheta \neq 2k\pi, \quad k = 0, 1, \cdots \tag{31.4}$$

然后由 $\vartheta \to 2k\pi$ 的极限过程得到

$$S_n(2k\pi) = n - 1, \qquad k = 0, 1, \cdots.$$

因此, 如果 $\vartheta = \dfrac{m\pi}{n}$,

$$\cos\frac{m\pi}{n} + \cos\frac{2m\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{(n-1)m\pi}{n}$$
$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{2}(1 + \cos m\pi), & m \neq 2kn, k = 0, 1, \cdots \\ n - 1, & m = 2kn, k = 0, 1, \cdots \end{cases} \tag{31.5}$$

现在用 $2\sin\dfrac{pq\pi}{n}$ 乘包含 $f(p\pi/n)$ 的系数集的特定方程 (31.2) 再对 p 求和; 这给出

$$2\sum_{p=1}^{n-1} f\left(\frac{p\pi}{n}\right)\sin\frac{pq\pi}{n} = \sum_{r=1}^{n-1} a_r c_{rq},$$

这里

$$c_{rq} = 2\sum_{p=1}^{n-1}\sin\frac{pq\pi}{n}\sin\frac{rq\pi}{n} = \sum_{p=1}^{n-1}\left[\cos\frac{(q-r)p\pi}{n} - \cos\frac{(q+r)p\pi}{n}\right].$$

利用 (31.5)

$$c_{rq} = \frac{1}{2}[\cos(q+r)\pi - \cos(q-r)\pi], q \gtrless r,$$

因此有

$$c_{rq} = 0, \quad r \neq q,$$

而

$$c_{rr} = n - 1 + \frac{1}{2}(1 + \cos 2r\pi) = n.$$

这样, 当给定 $f(x)$ 的离散值时,

$$a_q = \frac{2}{n}\sum_{p=1}^{n-1} f\left(\frac{p\pi}{n}\right)\sin\frac{pq\pi}{n}, \quad q = 1, 2, \cdots, (n-1) \tag{31.6}$$

提供近似三角多项式 (31.1) 中每个系数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的分别的和显式的表示; 此外, 如果容许 n 无限增加, 积分形式

$$a_q = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin qx dx, \quad q = 1, 2, \cdots \tag{31.7}$$

表明它可以作为 Fourier 正弦级数

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad 0 < x < \pi \tag{31.8}$$

的系数, 可以利用这个级数去刻画很广的一类函数.

对正弦系数的各别的和直接确定的可行性, 即使当这些系数是无穷多时也如此, 与类似的幂级数表示或多项式的极限形式截然不同; 然而, 实际上简单表示式 (31.6) 反映了 f 在等距点上的规定而在更一般情形系数并非这么容易决定的. 可以指出分别的基本函数即幂函数和正弦函数之间的不同; 这样, 由于性质

$$\int_0^\pi \sin mx \sin nx dx = 0, \quad m \neq n$$

正弦函数构成一个正交集, 而 x 的各次幂不是正交集. 事实上存在一个多项式集合, 其成员 $P_n(x), -1 < x < 1$ 称为 Legendre 多项式, 它们是正交的且可借助它们去表示这区间内的函数, 即

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad -1 < x < 1,$$

由于每一个系数 a_n 能按以下规定分别地决定:

$$N_n a_n = \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx, \quad n = 0, 1, \cdots$$

这里

$$N_n = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx.$$

有限或无穷的函数集

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots$$

当

$$\int_a^b \varphi_m(x) \overline{\varphi}_n(x) dx = 0, \quad m \neq n \tag{31.9}$$

和

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx = N_n \neq 0 \tag{31.10}$$

时, 在给定范围 $a < x < b$ 上有正交性状; 这里复值函数是容许的, 且如果 $\overline{\varphi}(x)$ 表示 $\varphi(x)$ 的复共轭, 则

$$|\varphi(x)| = +\sqrt{\varphi(x)\overline{\varphi}(x)}.$$

正交规范集是其规范化积分 (31.10) 等于 1 的正交集, 即

$$N_n = 1, \quad \text{对所有 } n; \tag{31.11}$$

显然, 如果 $\varphi_n(x)$ 不满足 (31.11), 适当确定因子 α_n, 函数

$$\alpha_n\varphi_n(x)$$

就能满足要求 (31.11), 所以正交集转换成规范正交集是简单的事.

正交函数 (规范的或不规范的) 是 L_2 族的成员, 与有有限 L_p 范数的函数的定义

$$\int_a^b |\varphi(x)|^p dx < \infty, \quad p > 0$$

保持一致. 任一对 L_2 函数 $\varphi(x), \psi(x)$ 满足 (有广泛应用的) Schwartz (施瓦茨, 1843—1921) 不等式

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\right|^2 \leqslant \int_a^b |\varphi(x)|^2 dx \int_a^b |\psi(x)|^2 dx; \tag{31.12}$$

乘积 $\varphi \cdot \psi$ 是可积的即属于 L_1 类这一事实从关系式

$$0 \leqslant (|\varphi(x)| - |\psi(x)|)^2$$

或

$$|\varphi(x)||\psi(x)| \leqslant \frac{1}{2}\left(|\varphi(x)|^2 + |\psi(x)|^2\right)$$

得出, 由于上式表明 $|\varphi||\psi|$ 被一对可积项界定. 所说的不等式 (31.12) 从另一个显然成立的不等式

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \frac{1}{2}\int_a^b dx \int_a^b dx' |\varphi(x)\overline{\psi}(x') - \overline{\psi}(x)\varphi(x')|^2 \\ &= \int_a^b |\varphi|^2 dx \int_a^b |\psi|^2 dx' - \left|\int_a^b \varphi\psi dx\right|^2 \end{aligned}$$

立即推导出.

为判断函数之间有多靠近有不同的表示式可以利用, 一个形式上类似于定义 n 维空间中点 $\underline{x}, \underline{y}$ 间的间隔或距离的表示式, 即

$$[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2]^{1/2}$$

特别有用, 这里 $(x_1, \cdots, x_n)$ 和 $(y_1, \cdots, y_n)$ 规定这两点的分别的坐标; 这样, 函数 $f(x), g(x)$ 能被认为是在区间 $a < x < b$ 上 “靠近的” 或相互接近的, 如果积分

$$\left[\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx\right]^{1/2}$$

小的话.

给定函数级数

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots \tag{31.13}$$

其部分和为

$$S_k(x) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x), \quad a < x < b, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

因此陈述

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |S_n(x) - S(x)|^2 dx = 0 \tag{31.14}$$

的意思是, 当取极限 $n \to \infty$, 部分和与函数 $S(x)$ 变成难以区别的, 这里 $S(x)$ 是级数的逐点和, 正如相伴关系式

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \quad a < x < b \tag{31.15}$$

所代表的含义.

联系正交基和按 L_2 范数表示函数的这个事实的一个重要定理如下: 如果 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$ 构成范围 $a < x < b$ 上的规范正交集且常数 $a_1, a_2, \cdots$ 使得

$$f(x) = a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x) + R_n(x), \tag{31.16}$$

这里余项满足极限

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |R_n(x)|^2 dx = 0, \tag{31.17}$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(x) \right|^2 dx = 0,$$

则

$$a_i = \int_a^b f(x)\overline{\varphi}_i(x)dx, \quad i = 1, 2, \cdots \tag{31.18}$$

如果 (31.17) 成立, 称级数 $a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \cdots$ 平均收敛到函数 $f(x)$.

为建立系数表示式 (31.18), 固定一个整数 j 且取 $n > j$; 用 $\overline{\varphi}_j$ 乘 (31.16) 再在 (a, b) 上积分 (基于 $\varphi_i(x)$ 的规范正交性的) 结果, 即

$$\int_a^b f(x)\overline{\varphi}_j(x)dx = a_j + \int_a^b R_n(x)\overline{\varphi}_j(x)dx \tag{31.19}$$

表明当 $n > j$ 时

$$\int_a^b R_n(x)\overline{\varphi}_j(x)dx$$

必与 n 无关. 用 Schwartz 不等式 (31.12)

$$\left|\int_a^b R_n(x)\overline{\varphi}_j(x)dx\right|^2 \leqslant \int_a^b |R_n(x)|^2 dx \cdot 1$$

连同 (31.17),(31.19), 就证实了结果 (31.18).

由规范正交函数集 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$ 和一个任意 L_2 函数 $f(x)$ 用 (31.18) 定义的量 a_i 称为 $f(x)$ 的 Fourier 系数; 此外, 由上述表示表明 Fourier 级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i\varphi_i(x)$$

平均收敛到 $f(x)$. (译注: 对规范正交集要加完全性或封闭性条件) 这一性质不同于普通收敛性, 后者特别要求任一函数级数的部分和有一定极限, 如 (31.15) 所示.

对 a_i 的表示式 (31.18) 当 $f(x)$ 是 L_1 或可积函数时仍有意义, 事实上在假设展开式

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\varphi_j(x) \tag{31.20}$$

的存在性和用 $\overline{\varphi}_i(x)$ 相乘再在 (a, b) 上逐项积分的合法性后即可得出这个结论. 给定在 $a < x < b$ 上的可积函数 $f(x)$ 和一个规范正交集, 包含 Fourier 系数 a_i 的紧密相联系的级数 (31.20) 在开始与 $f(x)$ 仅有符号上的联系, 即

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_i\varphi_i(x), \quad a < x < b,$$

推迟普通收敛性的研究和使用等号.

此外, 并不奇怪, 这同样的 Fourier 系数是一个 L_2 函数的均方逼近的最优系

数; 改写有关的积分为

$$
\begin{aligned}
I &= \int_a^b \left| f(x) - \sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(x) \right|^2 dx \\
&= \int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(x) \right] \left[\overline{f}(x) - \sum_{j=1}^n \overline{c}_j\overline{\varphi}_j(x) \right] dx \\
&= \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{j=1}^n \overline{c}_j \int_a^b f(x)\overline{\varphi}_j(x)dx - \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b \overline{f}(x)\varphi_i(x)dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i\overline{c}_j \int_a^b \varphi_i(x)\overline{\varphi}_j(x)dx \qquad (31.21) \\
&= \int_a^b |f(x)|^2 dx + \sum_{i=1}^n [-\overline{c}_i a_i - c_i\overline{a}_i + c_i\overline{c_i}] \\
&= \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{i=1}^n |a_i|^2 + \sum_{i=1}^n |c_i - a_i|^2;
\end{aligned}
$$

就能肯定这个事实, 因为 $|c_i - a_i| \geqslant 0$ 且仅当 $c_i = a_i$ 时为零, 所以当对每一个 $i, c_i = a_i$ 时, 积分 I 取其最小值, 所述命题随之得出.

在 (31.21) 中使 c_i 和 a_i 相等后得到式子

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{i=1}^n a_i\varphi_i(x) \right|^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{i=1}^n |a_i|^2,$$

因为左边是非负的, 就给出了一个重要结论,即

$$\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2 dx, \quad n = 1, 2, \cdots \qquad (31.22)$$

所以具有非负项的级数

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots$$

的部分和有界, 且 (31.22) 中的 n 可任意大, 这就得出

$$\sum_{i=1}^\infty |a_i|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2 dx, \qquad (31.23)$$

这就是著名的 Bessel (贝塞尔, 1784 — 1846) 不等式.

后者排除可能的不等号的更强的形式, 即:

$$\sum_{i=1}^\infty |a_i|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx \qquad (31.24)$$

称为 Parseval (帕塞伐尔, 1755—1836) 等式且反映了用来确定系数 a_i 的规范正交函数集 $\varphi_i(x)$ 的一个关键性质, 这就是用以下方式定义的所谓的完全性性质: 规范正交函数集

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$$

是完全的, 如果对应于每个 $a < x < b$ 上平方可积函数 $f(x)$ 和任意的 $\epsilon > 0$, 存在指标 n 和常数 $c_1, \cdots, c_n$ 使得

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \right|^2 dx < \epsilon. \tag{31.25}$$

Parseval 等式与完全性的联系可由基于 (31.21),(31.25) 的关系式

$$\left\{ \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right\} + \left\{ \sum_{i=1}^n |c_i - a_i|^2 \right\} < \epsilon$$

出发通过一系列推理而被验证; 为此, 考虑到带括号的第二项的非负性, 就有

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{i=1}^n |a_i|^2 < \epsilon$$

或

$$\sum_{i=1}^n |a_i|^2 > \int_a^b |f(x)|^2 dx - \epsilon,$$

再得出

$$\sum_{i=1}^\infty |a_i|^2 > \int_a^b |f(x)|^2 dx - \epsilon.$$

由于最后的关系式对任意的 $\varepsilon > 0$ 成立, 因此导致另一个不等式

$$\sum_{i=1}^\infty |a_i|^2 \geqslant \int_a^b |f(x)|^2 dx,$$

其意义与 Bessel 不等式 (31.23) 中表示的相反, 这就证明了 Parseval 等式.

规范正交集

$$\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

在区间 $0 < x < l$ 上是完全集, 集合

$$\frac{1}{\sqrt{l}}, \frac{2}{\sqrt{l}} \cos \frac{n\pi x}{l} \quad n = 1, 2, \cdots$$

也是完全集; 类似的, 复值指数函数

$$\frac{1}{\sqrt{2l}} e^{in\pi x/l} = \frac{1}{\sqrt{2l}} \left[\cos \frac{n\pi x}{l} + i \sin \frac{n\pi x}{l} \right], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

构成 $-l < x < l$ 上的完全的规范正交集.

为了以不同方式引出完全性的特性, 考虑一个常数集 $c_n, n = 1, 2, \cdots$ 且假设

$$\text{i)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \infty, \quad \text{或} \quad \text{ii)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$$

两者之一成立, 在第一种情形没有与包含规范正交函数 $\varphi_n(x)$ 的级数相联系的平方可积函数, 即不存在

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad a < x < b.$$

在第二种情形至少有一个 L_2 函数能这样表示, 而且如果集合 $\varphi_n(x)$ 是完全的, 则定义了一个唯一的函数.

当一个给定函数的 Fourier 系数已知时, Parseval 等式可用来估计数值和; 例如, 取函数

$$f(x) = x^2$$

和区间 $-\pi < x < \pi$ 上的一个完全规范正交函数集

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_n(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

容易验证

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_0 dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{3}\pi^3$$

和

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_n(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{4\pi}{n^2}(-1)^n;$$

由于

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{2}{5}\pi^5,$$

Parseval 等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

成为

$$\frac{2\pi^5}{5} = \frac{2\pi^5}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16\pi}{n^4}$$

给出了一个正确的结果, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

习 题 31

1. 考虑一圆柱形杆的扭转振动, 在其邻近横截面有一相对角位移 $d\Theta$, 这里 $\Theta(x,t)$ 是沿轴的距离 x 和时间 t 的函数, 可用偏微分方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Theta = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Theta \tag{i}$$

来分析; 这里 c^2 依赖于质量密度和物质的切变模量. 在杆的端点 $x=0,l$ 的合适边界条件, 当一对大而重的圆盘固定到那里时, 取形式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Theta = c_1\frac{\partial}{\partial x}\Theta, \quad x=0 \tag{ii}$$

和

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Theta = -c_2\frac{\partial}{\partial x}\Theta, \quad x=l.$$

研究满足 (ii) 的 (i) 的分离变量解, 且确定相关的本征函数是否正交.

2. 给定线性无关实函数的一个非正交集

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x),$$

有一确定程序能把它们转换成正交集,

$$\varphi_1^*(x), \varphi_2^*(x), \cdots, \varphi_n^*(x),$$

其成员是原来组的线性组合. 为此, 选其中之一, 例如说 $\varphi_1(x)$, 且记

$$\varphi_1^*(x) = \frac{1}{c_1}\varphi_1(x),$$

这里标量因子的规定值, 即

$$c_1 = \sqrt{\int_a^b \varphi_1^2(x)dx}$$

保证了

$$\int_a^b \varphi_1^{*2}(x)dx = 1.$$

其次用 $\varphi_2(x)$ 和 $\varphi_1^*(x)$ 去确定函数

$$\varphi_2^*(x) = \frac{1}{c_2}[\varphi_2(x) - a_{21}\varphi_1^*(x)]$$

带两个可自由支配的常数 c_2, a_{21}. 正交性要求

$$\int_a^b \varphi_2^*(x)\varphi_1^*(x)dx = 0$$

确定 a_{21}，即

$$a_{21} = \int_a^b \varphi_2(x)\varphi_1^*(x)dx,$$

而规范化要求

$$\int_a^b \varphi_2^{*2}(x)dx = 1,$$

由对 c_2 的规定值

$$c_2 = \sqrt{\int_a^b [\varphi_2(x) - a_{21}\varphi_1^*(x)]^2 dx}$$

而得到保证.

指出 $\varphi_3^*(x), \cdots, \varphi_m^*(x), \cdots, \varphi_n^*(x)$ 的类似构造如何进行且肯定具有 m 个可自由支配常数的表示式

$$\varphi_m^*(x) = \frac{1}{c_m}[\varphi_m(x) - a_{m1}\varphi_1^*(x) - a_{m2}\varphi_2^*(x) - \cdots - a_{m,m-1}\varphi_{m-1}^*(x)], \quad m < n$$

的好处; 验证表示式

$$a_{mq} = \int_a^b \varphi_m(x)\varphi_q^*(x)dx, \quad q < m$$

与正交性要求

$$\int_a^b \varphi_m^*(x)\varphi_n^*(x)dx = 0, \quad m \neq n$$

相关联, 且指出确定 c_m 的方式. 在

$$c_m = 0, \quad c_1, c_2, \cdots, c_{m-1} \neq 0$$

的情形下能引出什么结论? 证明按以上方式确定的函数集 $\varphi_1^*(x), \varphi_2^*(x), \cdots, \varphi_m^*(x)$ 是线性无关集.

用前述方案将非正交集

$$1, x, x^2, x^3, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

和

$$e^{-x/2}, xe^{-x/2}, x^2e^{-x/2}, x^3e^{-x/2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \infty$$

分别置换成正交集.

3. 对函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant \pi\end{cases}$$

按照该区间上的规范正交集

$$\varphi_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \varphi_n^{(c)}(x)=\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\quad \varphi_n^{(s)}(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\quad n=1,2,\cdots$$

来计算其 Fourier 系数. 证明用 Parseval 等式得出结果

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2(2n+3)^2}=\frac{\pi^2}{64}.$$

4. 由方程组

$$L[y]=\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda^2 y=0,\quad 0<x<\pi,$$

$$\frac{dy}{dx}+y=0,\quad x=0,\pi$$

定义的齐次边值问题有非平凡解或本征函数

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{N_0}e^{-x},\quad (\lambda^2=-1)$$

和

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{N_n}\left[\cos\ nx-\frac{1}{n}\sin\ nx\right],\quad n=1,2,\cdots\quad (\lambda=n)$$

它们是互相正交的. 检验规范化因子

$$N_0=\sqrt{e^{-\pi}\sinh\ \pi},\quad N_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)},\quad n=1,2,\cdots$$

它们保证了

$$\int_0^{\pi}\varphi_0^2(x)dx=1,\quad \int_0^{\pi}\varphi_n^2(x)dx=1,$$

且给出特定函数

$$f(x)=1,\ \ 0<x<\pi,$$

证明其 Parseval 等式为

$$2\tanh\ \frac{\pi}{2}+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2+1}\right)=\pi. \tag{i}$$

利用可以分别证明的推断结果

$$\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

和

$$\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi}{4}\tanh\ \frac{\pi}{2}$$

来证明 (i) 是对的; 且注意如果集合 $\{\varphi_n(x)\}, n=0,1,\cdots$ 的完全性由于去掉函数 $\varphi_0(x)$ 而遭到破坏, 则 (i) 不再成立.

5. 考虑一个本征值问题, 它与沿有限长度、在其两端点外向热流与局部温度成比例的均匀杆的非定常热传导有关; 相关联的齐次方程组

$$L[y] = \frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \quad 0 < x < l \tag{i}$$

和

$$U_1[y] = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} - hy(0) = 0, \quad U_2[y] = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=l} + hy(l) = 0, \quad h > 0$$

刻画一个具有正本征值的自伴问题. 导出本征值方程

$$\cot\sqrt{\lambda_n}l = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda_n - h^2}{h\sqrt{\lambda_n}}, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{ii}$$

和两个成对的结果

$$\sin\sqrt{\lambda_n}l = \frac{2h\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n + h^2}, \quad \cos\sqrt{\lambda_n}l = \frac{\lambda_n - h^2}{\lambda_n + h^2}; \tag{iii}$$

验证本征函数的规范化形式

$$\varphi_n(x) = \frac{N_n}{\sqrt{\lambda_n + h^2}}\left[\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x + h\sin\sqrt{\lambda_n}x\right] = N_n\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x + \delta_n\right), \tag{iv}$$

这里

$$\tan\delta_n = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{h}, \quad \frac{1}{N_n^2} = \frac{1}{2}\left[l + \frac{2h}{\lambda_n + h^2}\right].$$

证明: 如果常数 1 用正交函数 (iv) 来表示, 即

$$1 \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x), \quad 0 < x < l$$

则其 Fourier 系数可表成

$$a_n = \frac{2N_n h}{\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_n + h^2}},$$

并试得出 Parseval 等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^2}{\lambda_n l[(\lambda_n + h^2)l + 2h]} = \frac{1}{8}. \tag{v}$$

注意到当取极限 $h \to \infty$ 时, 关系式 (iii) 成为

$$\sin\sqrt{\lambda_n}l = 0, \quad \cos\sqrt{\lambda_n}l = -1,$$

其中

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 3, 5, \cdots$$

而 (v) 简化成以前指出的结果, 即:

$$\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

6. 设 $f(x), g(x)$ 表示 $a < x < b$ 上一对函数, 它们关于一个完全规范正交集的 Fourier 系数分别是 a_n, b_n. 把 Parseval 等式应用到 $f + g$, 由此推导出 Parseval 等式的一个推广. 如果

$$f(x) = x$$

和

$$g(x) = x^2, \quad 0 < x < \pi$$

利用规范正交集

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi}, \quad \varphi_n^{(c)}(x) = \frac{\cos\ nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_n^{(s)}(x) = \frac{\sin\ nx}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

求 Parseval 等式的一个特殊形式.

7. 为了用有限个规范正交函数 $\{\varphi_i(x)\}$ 逼近给定的 L_2 函数 $f(x)$, 采用积分

$$I(c_1, c_2, \cdots, c_n) = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x)\right]^2 dx$$

显然是要确定系数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的一个函数. 应用条件

$$\frac{\partial}{\partial c_j}I = 0, \quad j = 1, \cdots, n$$

去极小化 I, 从中能推导出什么?

8. 考虑一般的 Sturm–Liouville 型本征值问题, 其中有一个 $2n$ 阶常微分方程

$$L[y] = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\left[\frac{d^m}{dx^m}\left(p_m(x)\frac{d^m y}{dy^m}\right)\right] = \lambda\rho(x)y(x),$$
$$a < x < b, \quad \rho(x) \neq 0$$

和所需数目的线性无关边界条件

$$V_i[y]=\sum_{m=0}^{2n-1}\left[\alpha_{im}\left.\frac{d^m}{dx^m}y\right|_{x=a}+\beta_{im}\left.\frac{d^m}{dx^m}y\right|_{x=b}\right]=0,\quad i=1,\cdots,2n.$$

假设自伴性条件

$$\int_a^b[zL[y]-yL[z]]dx=0$$

成立, 而且具有关于与不同本征值 λ_n,λ_m 相结合的任一对本征函数 $\varphi_n(x)$, $\varphi_m(x)$ 的广义正交性关系. 对一给定函数 $f(x)$, 它的基于 (完全) 规范正交函数 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots$ 的表示式

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x),\quad a<x<b$$

中的 Fourier 系数 a_n 的表达式是什么? 对应的 Parseval 等式是什么? 证明由

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{m=1}^{n}a_m\varphi_m(x)$$

定义的余项或误差函数正交于 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$. 验证关系式

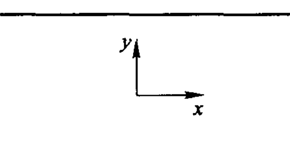
$$\int_a^b\rho(x)f^2(x)dx=\int_a^b\rho(x)R_n^2(x)dx+\sum_{m=1}^{n}a_m^2$$

且由此作出评论.

9. 考虑在一有平行壁的管道内均匀可压缩介质中的声学或声音的激发, 这可以由偏微分方程

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right),\quad -\infty<x<\infty,\quad -l<y<l$$

来描述, 其自变量包括时间 t 和位置坐标 x,y, 其坐标轴方向如图所示. 从



速度势函数 $\Phi(x,y,t)$ 导出的三个量, 即

$$v_x=-\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad v_y=-\frac{\partial\Phi}{\partial y},\quad p=\rho_0\frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

表示局部速度分量 v_x, v_y, 而压力 p 表示从具有均衡密度 ρ_0 的可压缩介质内的静态压力产生的偏差. 假设压力和法向速度之比

$$\frac{\rho_0\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}}{-\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}}=Z,\quad y=l;\quad \frac{\rho_0\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}}=Z,\quad y=-l,$$

确定在管壁的阻抗型边界条件, 这里当 Z 有复值时引起吸收 (或能量损失).

设

$$\Phi(x,y,t)=e^{-i\omega t}X(x)Y(y) \tag{i}$$

表示关于时间的周期性激发, 则对坐标因子 Y, X 的分别的常微分方程是

$$\frac{d^2Y}{dy^2}+\lambda^2Y=0,\quad -l<x<l, \tag{ii}$$

$$\frac{d^2X}{dx^2}+(k^2-\lambda^2)X=0,\quad k=\frac{\omega}{c},\quad -\infty<x<\infty, \tag{iii}$$

这里 λ 是一个分离常数. 用 (ii) 的对 y 有偶对称性的解去建立本征值方程

$$\lambda\tan\lambda l=-i\omega\rho_0/Z,$$

它有基本形式

$$\xi\tan\xi=\alpha+i\beta,\quad \xi=\lambda l.$$

证明: 对应于不同本征值 λ_n, λ_m 的本征函数 $Y_n(y), Y_m(y)$ 是正交的, 即

$$\int_{-l}^{l}Y_n(y)Y_m(y)dy=0.$$

附加

$$\mathrm{Im}\sqrt{k^2-\lambda_n^2}>0$$

条件的规定式

$$X_n(x)=e^{i\sqrt{k^2-\lambda_n^2}x}$$

适用于 (i) 型的速度势, 即

$$\Phi_n(x,y,t)=\cos\lambda_n y e^{i\left[\sqrt{k^2-\lambda_n^2}x-\omega t\right]},$$

当取极限 $x\to\infty$ 时它保持有界. 采用对 Φ 的偏微分方程的更一般的解, 即

$$\Phi=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\Phi_n(x,y,t),\quad x>0$$

和在横截面 $x=0$ 上的规定

$$\Phi(0,y,t)=Ae^{-i\omega t},$$

推演出

$$c_n=\frac{4A\sin\lambda_n l}{2\lambda_n l+\sin\ 2\lambda_n l}.$$

10. 给出对拉紧弦的横向位移 $y(x,t)$ 的偏微分方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\quad 0<x<l \tag{i}$$

和边界条件

$$y(0,t)=0,\quad m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+P\frac{\partial y}{\partial x}=0,\quad x=l,t>0, \tag{ii}$$

其中第一个是关于固定端点的而第二个代表对连接质量 m 的运动方程; 弦中的张力 P 和沿此弦行进的扰动的传播速度 c 之间有关系式

$$P=\rho c^2, \tag{iii}$$

这里 ρ 规定该弦的质量密度.

(i) 的分离变量解, 即

$$y(x,t)=X(x)T(t) \tag{iv}$$

由分别的常微分方程

$$\frac{d^2T}{dt^2}+(kc)^2T=0 \tag{v}$$

和

$$\frac{d^2X}{dx^2}+k^2X=0,\quad 0<x<l \tag{vi}$$

的解生成, 其中 k 表示任意常数. 包含 (vi) 和

$$X(0)=0,\quad \left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=l}-\frac{mk^2}{\rho}X(l)=0 \tag{vii}$$

(这里第二个边界条件的形式依赖于 (iii),(v)) 的方程组确定一个齐次边值问题; 且本征值参数 k 出现于方程和边界条件中这一事实说明它与标准的问题不同.

证明: 对应于特征方程

$$\cot k_n l=\left(\frac{m}{\rho l}\right)k_n l \tag{viii}$$

的不同根的非平凡解或本征函数

$$X_n(x) = \sin\ k_n x \tag{ix}$$

不是正交的, 即

$$\int_0^l X_m(x)X_n(x)dx = -\frac{m}{\rho}X_m(l)X_n(l), \quad m \neq n. \tag{x}$$

本征函数的正交性以前是通过它们所满足的齐次积分方程来证明的 (第二十九章); 而且其中核 (或 Green) 函数的对称性起本质作用. 所以可以推测非正交本征函数与非对称核的积分方程有关. 对所考虑的这个例子, 引入 Green 函数, 它满足

$$L[G] = \frac{d^2G}{dx^2} = 0, \quad x \neq x', \quad 0 < x, \quad x' < l,$$

$$G(0, x', k) = 0, \quad \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=l} - \frac{mk^2}{\rho}G(l, x', k) = 0$$

和

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x'-0}^{x=x'+0} = -1.$$

证实显式表示

$$G(x, x', k) = \frac{x_< \left[1 - \frac{mk^2}{\rho}(l - x_>)\right]}{1 - \frac{mk^2}{\rho}l} \tag{xi}$$

和对由 (vi),(vii) 定义的形为 (ix) 的本征函数的等价积分方程

$$X(x) = k^2 \int_0^l G(x, x', k)X(x')dx'; \tag{xii}$$

事实上, 注意此核函数关于 x, x' 的非对称性, 且解释在这例子中为什么正交性不能从这积分方程推导出.

采用 (i),(ii) 的级数形式特解

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\ k_n x[a_n \cos\ k_n ct + b_n \sin\ k_n ct], \end{aligned}$$

为了满足一对初始条件, 即

$$y(x, 0) = f(x) \tag{xiii}$$

和

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}y(x,t)\right|_{t=0}=g(x),\quad 0<x<l,$$

关系式

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nX_n(x), \tag{xiv}$$

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}k_ncb_nX_n(x) \tag{xv}$$

表明可以用来决定系数 a_n,b_n. 利用 (x),(xiv),(xv) 得到系数表示式

$$a_n=\frac{\int_0^l f(x)X_n(x)dx+\frac{m}{\rho}f(l)X_n(l)}{\int_0^l X_n^2(x)dx+\frac{m}{\rho}X_n^2(l)},$$

$$k_ncb_n=\frac{\int_0^l g(x)X_n(x)dx+\frac{m}{\rho}g(l)X_n(l)}{\int_0^l X_n^2(x)dx+\frac{m}{\rho}X_n^2(l)}.$$

11. 设展开式

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x),\quad a<x<b \tag{i}$$

表明基本函数 $\{\varphi_n(x)\}$ 不构成正交集, 因此不能用通常的和单个的方法来确定 (Fourier) 系数, 即

$$a_n\neq\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx.$$

在这种情形下, 去找另一个函数集 $\{\psi_n(x)\}$, 连同 $\{\varphi_n(x)\}$ 构成一个由性质

$$\int_a^b\varphi_n(x)\psi_m(x)dx=0,\quad m\neq n \tag{ii}$$

描述的双正交系是合适的. 如果这双正交系是规范的, 且

$$\int_a^b\varphi_n(x)\psi_n(x)dx=1,\quad n=1,2,\cdots$$

则 (i) 中的系数由表示式

$$a_n=\int_a^b f(x)\psi_n(x)dx,\quad n=1,\cdots \tag{iii}$$

得到.

设函数 $\varphi_n(x), \psi_n(x)$ 被有公共参数的分别的积分方程所描述, 即

$$\varphi_n(x) = k_n^2 \int_a^b K(x, x')\varphi_n(x')dx'$$

和

$$\psi_n(x) = k_n^2 \int_a^b K(x', x)\psi_n(x')dx'; \tag{iv}$$

这里 $K(x, x')$ 是其自变量的非对称函数, 所以

$$K(x', x) \neq K(x, x').$$

证明上面两个积分方程蕴涵性质 (ii). 一个特殊的双正交系出现于热弹性力学的一个问题中 (见第二十六章问题 9); 这里齐次方程组

$$\left[\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda^2\varphi\right] = 2\tau \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=0}, \quad 0 < x < l/2, \tag{v}$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=l/2} = 0$$

有本征解

$$\varphi_n(x) = 1 - \cos\lambda_n x + \frac{\lambda_n}{2\tau}\sin\lambda_n x \tag{vi}$$

且本征值满足方程

$$\sin\frac{\lambda l}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\lambda}{\tau}\cos\frac{\lambda l}{2} = 0. \tag{vii}$$

引入对函数 $\psi(x)$ 的另一常微分方程

$$\left[\frac{d^2\psi}{dx^2} + \mu^2\psi\right] = 0, \quad 0 < x < l/2, \tag{viii}$$

结合对 $\varphi(x)$ 的方程, 在应用关于 $\varphi(x)$ 的边界条件后, 发现

$$\begin{aligned}
&(\mu^2 - \lambda^2)\int_0^{l/2} \varphi(x)\psi(x)dx \\
&= \psi(x)\frac{d\varphi}{dx} - \varphi(x)\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=0}^{x=l/2} + 2\tau\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=0}\int_0^{l/2}\psi(x)dx \\
&= -\varphi\left(\frac{l}{2}\right)\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=l/2} - \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=0}\left[\psi(0) + 2\tau\int_0^{l/2}\psi(x)dx\right].
\end{aligned}$$

对 $\psi(x)$ 的合适条件是保证最后的方程的右边取零值的不依赖于 φ 的那些边界条件; 特别地

$$\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=l/2} = 0, \quad \psi(0) + 2\tau\int_0^{l/2}\psi(x)dx = 0, \tag{ix}$$

表示了关系式

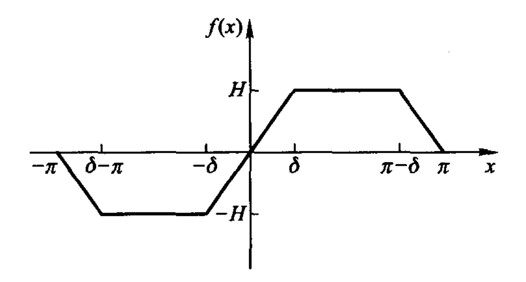
$$(\mu^2 - \lambda^2)\int_0^{l/2} \varphi(x)\psi(x)dx = 0 \tag{x}$$

成立所需的条件. 找出方程组 (viii),(ix) 的本征解且证实这里的本征值方程与前面的方程 (v) 的 (vii) 相同; 这样所得到的 (x) 的变体

$$(\lambda_m^2 - \lambda_n^2)\int_0^{l/2} \varphi_n(x)\psi_m(x)dx = 0$$

验证了函数 $\{\varphi_n(x)\},\{\psi_n(x)\}$ 的双正交性. 用适当的 Green 函数构造 φ,ψ 所满足的齐次积分方程且注意两个分别的核之间的联系.

12. 设由下面的图示和显式表示式



$$f(x) = \begin{cases} x\dfrac{H}{\delta}, & 0 \leqslant x \leqslant \delta, \\ H, & \delta \leqslant x \leqslant \pi - \delta, \delta < \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi - x}{\delta}H, & \pi - \delta \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

以及

$$f(x) = -f(-x), \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

定义的奇函数与一个正弦级数有关, 即

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x), \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi,$$

这里集合

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\ nx, \quad n = 1, 2, \cdots$$

是一个 (完全) 规范正交集. 证明 Parseval 等式取形式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2(2n+1)\delta}{(2n+1)^4} = \frac{\pi\delta^2}{8}\left[\pi - \frac{4}{3}\delta\right], \quad 0 \leqslant \delta \leqslant \pi/2$$

且检验当 $\delta=\pi/2$ 时其极限形式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

的一致性.

13. 设 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$ 表示区间 (a,b) 上的一个规范正交函数集, 即

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ 1, & m=n, \quad n=1,2,\cdots\end{cases}$$

定义算术平均函数

$$\sigma_n(x)=\frac{\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\cdots+\varphi_n(x)}{n},$$

且计算积分

$$\int_a^b \sigma_n^2(x)dx.$$

当 $n\to\infty$ 时由此能引出什么推论?

14. 证明: 当 m,n 是任一对不同的非负整数时, 函数

$$\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x, \quad \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x$$

在区间 $(0,\pi)$ 上正交. 如果 $f(x)$ 是 $(0,\pi)$ 上一个给定的 L_1 或可积函数, 得出确定表示式

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x, \quad 0<x<\pi$$

中 Fourier 系数 c_n 的公式.

第三十二章

Fourier 展开: 概述

首先由 Fourier 提出的, 对任意函数的幂级数展开外的其他展开的重要性不需再强调. 现在包括一个正交函数基的 Fourier 型级数的形成方式已经知道, 必须给予注意, 有关这种级数的性质和对它们进行诸如积分或微分运算的可能性. 开始先讲一些有关函数项级数的一般性注记.

设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ 表示区间 (a,b) 上一个可积 (L_1) 函数序列, 由它们构成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \tag{32.1}$$

在 (a,b) 内 x 的任一特定值收敛到一个和 $S(x)$, 如果对任意的 $\epsilon > 0$, 任意的 $x \in (a,b)$, 存在 $N(\epsilon, x) > 0$, 使得当

$$n \geqslant N(\epsilon, x)$$

时, 有

$$|S(x) - (f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x))| < \epsilon; \tag{32.2}$$

写成

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S_N(x) + R_N(x),$$

这里

$$S_N(x)=\sum_{n=1}^{N}f_n(x) \tag{32.3}$$

表示部分和且

$$R_N(x)=\sum_{n=N+1}^{\infty}f_n(x) \tag{32.4}$$

定义对应的余项, 限制

$$|R_n(x)|<\epsilon,\quad n>N \tag{32.5}$$

对 (32.2) 描述的意义下的收敛性是一个必需条件.

级数 (32.1) 称为**一致收敛的**, 如果存在一个数 $N(\epsilon)$ 使得对 (a,b) 中所有x, 有

$$|S(x)-S_n(x)|=|R_n(x)|=|f_{n+1}+\cdots|<\epsilon,\quad n\geqslant N(\epsilon);$$

在这情形下, 有 $S(x)-\epsilon<S_n(x)<S(x)+\epsilon$, 其几何表示见图 45.

由于

$$\int_a^b S(x)dx=\int_a^b S_N(x)dx+\int_a^b R_N(x)dx,$$

最后这个积分的界,

$$\left|\int_a^b R_N(x)dx\right|<\epsilon(b-a)$$

由一致收敛条件所保证; 这样, 当 N 充分大时, 部分和 $S_N(x)$ 的积分与和函数 $S(x)$ 的积分相差一个任意小量. 所以一致收敛的函数项级数能逐项积分.

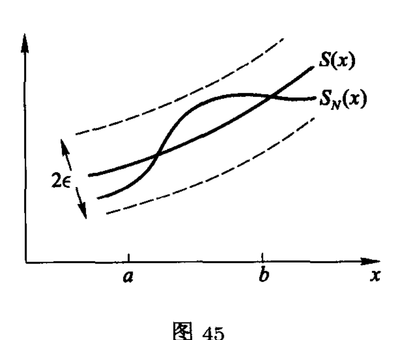


图 45

归功于 Weierstrass, K. T. W. (魏尔斯特拉斯, 1815—1897) 的一个有用的**比较判别法**与收敛的正常数项级数

$$M_1+M_2+\cdots+M_n+\cdots$$

有关, 给定不等式

$$|f_n(x)|<M_n,\quad n>N,\quad a<x<b,$$

则断定级数 (32.1) 一致且绝对收敛, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)<\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|<\infty.$$

当一致收敛级数的项本身是连续时, 则其和表示在相关区间的一个连续函数.

一致收敛性质的一个重要应用是与具有公共周期 2π 的三角函数项级数

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos\ nx + b_n \sin\ nx] \tag{32.6}$$

有关, 如果这级数在 $0 < x < 2\pi$ 上一致收敛, 则其和 $S(x)$ 是周期 2π 的连续函数. 显然

$$\cos\ mxS(x) = \frac{a_0}{2}\cos\ mx + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos\ nx \cos\ mx + b_n \sin\ nx \cos\ mx]$$

且

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(x)\cos\ mxdx = \frac{a_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\ mxdx \\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\ nx\cos\ mxdx + \frac{b_n}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\ nx\cos\ mxdx\right] \\
&=\begin{cases} a_0, & m=0, \\ a_m, & m\neq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

类似地断定

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(x)\sin\ mxdx = b_m, \quad m \neq 0,$$

因而 a_n, b_n 恰好是 $S(x)$ 的 Fourier 系数. 因此, 当一个三角级数一致收敛时, 它与从生成函数所得的 Fourier 级数相一致, 且生成函数与这个和之间的暂时联系符号 "$\sim$" 能换成 "$=$".

三角级数 (32.6) 是特别的, 由于它们能不考虑是否一致收敛而逐项积分. 作为一个解释性例子, 考虑与线性函数

$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x), \quad 0 < x < 2\pi$$

有关的级数 (32.6), 其 Fourier 系数是

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi - x}{2}\right)\cos\ nxdx = 0, \quad n = 0, 1, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi - x}{2}\right)\sin\ nxdx = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

这样

$$\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\ nx}{n}, \quad 0 < x < 2\pi, \tag{32.7}$$

且部分和

$$S_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin\ nx}{n} \tag{32.8}$$

的积分得到

$$\int_0^x S_N(x)dx=\sum_{n=1}^{N}\frac{1-\cos\ nx}{n^2},\quad 0<x<2\pi; \tag{32.9}$$

考虑到 $|\cos\ nx|<1$ 连同数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

的收敛性, Weierstrass 比较判别法保证当取极限 $N\to\infty$ 时, 从 (32.9) 所得级数的一致收敛性, 即:

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^x S_N(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\ nx}{n^2}. \tag{32.10}$$

现在

$$\int_0^x f(x)dx=\int_0^x\frac{\pi-x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\pi x-\frac{x^2}{2}\right), \tag{32.11}$$

且 (32.10),(32.11) 中的两个分别的积分的相等依赖于以下关系式的成立

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\ nx}{n^2}&=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\left(\pi x-\frac{x^2}{2}\right)\\&=\frac{5}{12}\pi^2-\frac{1}{4}(x-\pi)^2,\quad 0<x<2\pi,\end{aligned} \tag{32.12}$$

通过计算上面的二次多项式 $F(x)=\dfrac{5}{12}\pi^2-\dfrac{1}{4}(x-\pi)^2$ 的 Fourier 系数, 上式真的成立. $F(x)$ 确定一个关于直线 $x=\pi$ 对称的开口向下的抛物线. 由于在一致收敛级数 (32.12) 中各余弦项有公共周期 2π, 其和函数也如此, 在区间 $0<x<2\pi$ 外它的值由其在内点的值的周期延拓唯一地给定. 由于 $F(0)=F(2\pi)=\pi^2/6$, 延拓函数是连续的, 虽然其斜率在位于 $x=0,\pm2\pi,\pm4\pi,\cdots$ 的顶点处是不连续的.

在除以上点外的所有点容许逐项微分级数 (32.12), 而且一定回到 (32.7) 式中的线性函数; 此级数中的正弦项的周期性推导出在区间 $0<x<2\pi$ 外其和的值能按前面方式延拓而得出, 且其结果 (见图 46) 是在点 $x=0,\pm2\pi,\pm4\pi,\cdots$ 具有所谓的跳跃不连续点的整体函数. 而 $f(x)$ 的值与和函数的值之间在开区间

$$0<x<2\pi,\quad -2\pi<x<0,$$

$$\cdots$$

$$2k\pi<x<4k\pi,\quad k=1,2,\cdots$$

$$4k\pi<x<2k\pi,\quad k=-1,-2,\cdots$$

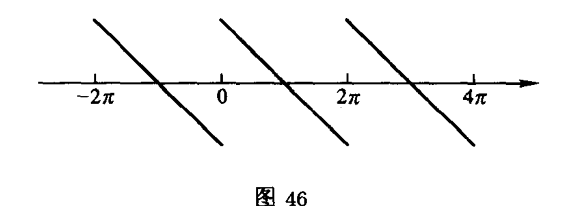


图 46

上是一致的, 而该级数在每个端点上取零值反映该生成函数在这些点的左右极限值的平均值 (第十八章中关于偏微分方程的非齐次问题的三角级数解的讨论中显示了类似特征).

考虑到三角级数的所有部分和的连续性和无穷次可微性, 因此就有必要去阐明它们与从原定义区间周期延拓前后产生函数本身或其导数的不连续的具有非正则性状的函数之间的关系; 且相关的研究揭示包括三角级数和其他类型涉及正交基函数的级数表示的有趣的结果.

对具有不连续性的函数的 Fourier 级数中直接微分会产生不收敛的函数级数, 如在 (32.7) 的情形

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\ nx,$$

由于上面级数的项 $\cos\ nx$ 不趋于零; 而且对部分和求导给出

$$\frac{dS_N}{dx} = \sum_{n=1}^{N} \cos\ nx = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

在用了几何级数求和公式

$$1+\lambda+\lambda^2+\cdots+\lambda^N = \frac{1-\lambda^{N+1}}{1-\lambda}, \quad \lambda \neq 1$$

后就导出

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \cos\ nx &= \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{N}(e^{ix})^n = \mathrm{Re}\left[\frac{1-e^{i(N+1)x}}{1-e^{ix}} - 1\right] \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.\end{aligned} \tag{32.13}$$

这样

$$S_N(x) = -\frac{x}{2} + \int_0^x D_N(\zeta)d\zeta, \quad S_N(0)=0, \quad 0<x<2\pi, \tag{32.14}$$

这里函数

$$D_N(x) = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \tag{32.15}$$

在任意可积函数的三角级数的部分和的积分表示式中将很快再次遇到.

由于

$$D_N(x) = \frac{1}{2} + \cos\ x + \cdots + \cos\ Nx$$

当 $N \to \infty$ 时没有极限, 需要另外的努力去断定 $S_N(x)$ 是否有极限, 且如果有极限, 要确定此极限. 为此目的, 注意到

$$\begin{aligned}\int_0^x D_N(\zeta)d\zeta &\doteq \int_0^x \frac{\sin\ N\zeta}{2\sin\frac{\zeta}{2}}d\zeta, \quad N \gg 1\\ &= \int_0^x \frac{\sin\ N\zeta}{\zeta}d\zeta + \int_0^x F(\zeta)\sin\ N\zeta d\zeta,\end{aligned}$$

这里

$$F(x) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{x}, \quad F(0) = 0, \quad \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=0} = 1/24$$

是 $0 < x < 2\pi$ 上有限, 具有连续的一阶导数. 分部积分揭示

$$\int_0^x F(\zeta)\sin\ N\zeta d\zeta = -\frac{F(x)\cos Nx}{N} + \frac{1}{N}\int_0^x \frac{dF}{d\zeta}\cos\ N\zeta d\zeta,$$

所以

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^x F(\zeta)\sin\ N\zeta d\zeta = 0, \quad 0 < x < 2\pi.$$

这样, 表示式

$$\begin{aligned}S_N(x) &= -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin\ N\zeta}{\zeta}d\zeta\\ &= -\frac{x}{2} + \int_0^{Nx} \frac{\sin\nu}{\nu}d\nu\end{aligned}$$

可用来考察当 N 很大时部分和的性状.

如果 $0 < x < 2\pi$,

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = -\frac{x}{2} + \int_0^\infty \frac{\sin\nu}{\nu}d\nu = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$$

与级数 (32.7) 的和函数完全一致; 此外, 当 $N \to \infty, x_N \to x_0, 0 < x_0 < 2\pi$, 例如 $x_N = x_0 \pm \frac{1}{N}$ 时, 对 $S_N(x_N)$ 得到同样的极限. 然而, 在用 Fourier 级数表示的函

数中, 在不连续点 $x_0^*, N \to \infty$ 时部分和的极限依赖于 $x_N \to x_0^*$ 的确切方式. 在现在的例子中, 有这样一个奇点 $x_0^* = 0$, 遵循自变量值的序列的选择 $x_N = \frac{\pi}{N}$, 当 $N \to \infty$ 时, x_N 趋于 0, 由此得出

$$\lim_{N\to\infty} S_N\left(\frac{\pi}{N}\right) = \int_0^\pi \frac{\sin\nu}{\nu} d\nu = \frac{\pi}{2}\cdot(1.0894\cdots)$$
$$> \lim_{x\to 0}\left(\frac{\pi - x}{2}\right) = \frac{\pi}{2};$$

因此, 部分和在不连续点 "超出了函数的定义值" (overshoots), 如美国物理学家 Albert Michelson (阿尔伯特 · 米切尔森, 1852—1931) 在用 (比较简单的) 方法逼近 Fourier 级数的过程中所指出且随后由同时代的美国物理学家 Josiah W. Gibbs (吉布斯, 1839—1903) 用数学术语作了解释, 他的名字习惯上和这种现象联系起来. 另外的细节留给本章末尾的一个例子. 且这里只需说明与基本收敛定理无矛盾; 后者是对一固定点如 x_0^* 而言的, 且即使这点很接近于 $x = 0$, 当 N 适当大时

$$\frac{\pi}{N} \ll x_0^*,$$

上述的 "超出了函数的定义值" 已在 0 和 x_0^* 之间出现, 且该 Fourier 级数的期望精确度真的在 x_0^* 实现. 这样, 这级数表示的误差量 $E_N = |S_N(x) - f(x)|$ 在区间内 $f(x)$ 是连续的任意给定点处能成为任意小, 只要 N 充分大; 另一方面, 当 $f(x)$ 在所考虑的区间内有跳跃间断点时, 有关的 Fourier 级数在整个区间上不一致收敛, 而且不存在与 x 无关的 $N(\epsilon)$ 能保证得到整体界 $E_N < \epsilon$.

包含不同 Fourier 级数的一个偏微分方程的边/初值问题的解使得不同的收敛情形可以被刻画和对比. 特别地, 设要求解下面的边初值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
$$-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = A, \quad u(L,t) = B, \quad t > 0, \quad A, B > 0 \tag{32.16}$$

和

$$u(x,0) = 0, \quad 0 < x < L.$$

一种方法包括有关的本征函数 (第十八章), 即

$$X_n(x) = \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, \cdots$$

且假定展开式

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}, \tag{32.17}$$

其中

$$T_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}dx,$$

这导致函数 $T_n(t)$ 的常微分方程

$$\frac{dT_n}{dt}+k\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}\right]^2 T_n=\frac{2k}{L}\left[A+B(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}\right],\quad n=0,1,\cdots$$

它显然包含了 $u(x,t)$ 上的边界要求. 它们的合适的解, 由初始条件 $T_n(0)=0$ 所确定, 有形式

$$T_n(t)=\frac{2AL}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}+\frac{2B(-1)^n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\left[1-\exp\left\{-k\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{L^2}t\right\}\right]\tag{32.18}$$

这样, 联合 (32.17),(32.18) 后, 边初值问题 (32.16) 的完全确定的解, 在任何 $t>0$ 和 $0<x<L$ 上成立, 表示成

$$u(x,t)=\frac{2AL}{\pi^2}\Sigma_1(x)+\frac{2B}{\pi}\Sigma_2(x)-\Sigma_3(x,t),\tag{32.19}$$

其中规定

$$\Sigma_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2},\tag{32.20}$$

$$\Sigma_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}}{n+\frac{1}{2}},\tag{32.21}$$

$$\Sigma_3(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2AL}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}+\frac{2B(-1)^n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right]\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}\cdot\exp\left[-k\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}\right\}^2 t\right].\tag{32.22}$$

$\Sigma_3(x,t)$ 中指数因子的出现导致对 $u(x,t)$ 的和式 (32.19) 中当 t 变大时一个可忽略不计的贡献, 且剩下的贡献描述解的定常的 (与时间无关的) 渐近式, 即

$$u_{\text{asy}}(x)=\frac{2AL}{\pi^2}\Sigma_1(x)+\frac{2B}{\pi}\Sigma_2(x),\quad t\to\infty.$$

容易确定 $u_{\text{asy}}(x)$, 通过由 (32.16) 推演出的有关方程, 即

$$\frac{d^2}{dx^2}u_{\text{asy}} = 0, \quad 0 < x < L, \quad -\frac{d}{dx}u_{\text{asy}}\bigg|_{x=0} = A, \quad u_{\text{asy}}(L) = B,$$

且结果

$$u_{\text{asy}}(x) = B + A(L - x)$$

推断出

$$\Sigma_1(x) = \frac{\pi^2}{2}\left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad 0 < x < L, \tag{32.23}$$

$$\Sigma_2(x) = \frac{\pi}{2}, \quad 0 < x < L. \tag{32.24}$$

$\Sigma_1(x), \Sigma_2(x)$ 的级数 (32.20),(32.21) 分别是一致收敛和非一致收敛的, 因为它们的系数与 $1/n^2$ 和 $1/n$ 成比例; 而且 $\Sigma_3(x,t)$ 的级数 (32.22) 当 $t > 0$ 在 $0 < x < L$ 上一致收敛, 由于变量 t 的指数函数的出现. 级数 (32.21) 所描述的整体函数关于 $x = 0$ 具有偶对称性且有周期等于 $4L$, 其草图如图 47 所表示; 在区间 $-2L < x < 2L$ 的不同部分上标出值 $\pm\pi/2$ 是合适的, 这一事实可从表示式

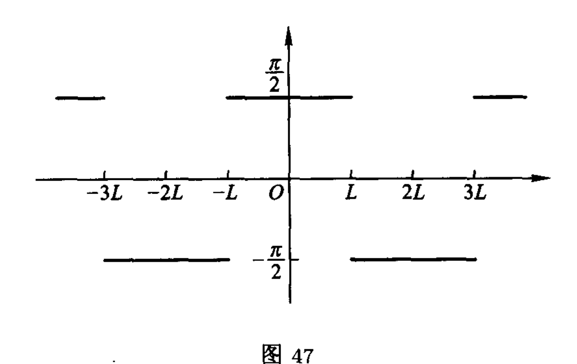


图 47

$$\Sigma_2(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}$$

的系数的确定式中推导出, 即

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{2L}\int_{-2L}^{2L} \Sigma_2(x)\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}dx \\ &= \frac{1}{L}\left[\int_0^L \frac{\pi}{2}\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}dx - \int_L^{2L} \frac{\pi}{2}\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}dx\right] = \frac{(-1)^n}{n + \dfrac{1}{2}}.\end{aligned}$$

类似地, 级数 (32.20) 的偶生成函数证明是

$$1-\frac{|x|}{L}, \quad -2L<x<2L$$

且该函数在周期区间 $(-2L,2L)$ 上积分为零, 与 (32.21) 的函数有同样的积分值.

级数 (32.20) 的一致收敛性由相关函数的处处连续的性状所反映, 而图 47 中所示的跳跃不连续点与非一致收敛的级数表示式相联系.

回顾所提问题的解用不同的和表示的一般展开式 (32.19), 且确认第二个级数在 $x=L$ 的非一致收敛性 (它在那里取零值, 如另外两个级数也取零值), 按照

$$\lim_{\epsilon\to 0} u(L-\epsilon,t)=B$$

的意义满足边界条件 $u(L,t)=B, t>0$.

将 (32.19) 重写成形式

$$u(x,t)=\frac{2AL}{\pi^2}\Sigma_1(x)+B-\Sigma_3(x,t),$$

且对其中的一致收敛级数实施逐项对 x 微分, 得出

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}=&-\frac{2A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}}{n+\frac{1}{2}}\\&+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2A}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}+\frac{2B(-1)^n}{L}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}\\&\cdot\exp\left[-k\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}\right\}^2 t\right],\end{aligned}\tag{32.25}$$

这里第一个级数不再是一致收敛的且显然在 $x=0$ 为零. 给出 (32.23) 中微分的结果, 即:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}}{n+\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{2}, \quad 0<x<L,$$

规定

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\epsilon}=A, \quad t>0$$

与在 $x=0$ 的边界条件相一致的性质就变得清楚了.

最后, 注意在分别的端点 $x = L, 0$ 离去和进入该区间 $0 < x < L$ 的热流量之比

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=L} \Big/ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2(-1)^n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} + \frac{2B}{AL} \right] \cdot \exp\left[-k\left\{ \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L} \right\}^2 t \right], \quad t > 0$$

其最大值等于 1, 正如所期望的那样在 $t \to \infty$ 的极限时达到.

与一个任意的可积周期函数相联系的 Fourier 级数 (32.6) 的部分和通过一个紧凑的积分来刻画是可能的; 由 Dirichlet, P. G. L. (狄利克雷, 1805—1859) 所建立的这个经典公式为得到 Fourier 的未经证实的断言后的第一个严格的收敛准则准备了方法. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 即对所有 $x, f(x) = f(x+2\pi m)$, m 为整数, 且将 $f(x)$ 在基本区间 $0 < x < 2\pi$ 上的积分的系数表示式代入到其 Fourier 级数的部分和中; 这给出

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos\ n(x-x') \right] f(x')dx' \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_N(x-x')f(x')dx', \end{aligned}$$

或

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-x}^{2\pi-x} D_N(x')f(x+x')dx'. \tag{32.26}$$

这里 $D_N(x)$ 是所谓的 Dirichlet 核函数 (32.15), 具有以下性质

$$D_N(-x) = D_N(x) \tag{32.27}$$

和

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)dx = \pi.$$

由于 $D_N(x)$ 和 $f(x+x')$ 有一个关于 x 的公共周期 2π, 积分 (32.26) 能换成其积分限为 $-\pi, \pi$ 的另一积分

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x')f(x+x')dx'; \tag{32.28}$$

其次, 依靠性质 (32.27) 得出

$$\begin{aligned} S_N(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x')[f(x+x') - f(x)]dx' \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_N(x')[f(x+x') + f(x-x') - 2f(x)]dx'. \end{aligned} \tag{32.29}$$

因此, 当取极限 $N\to\infty$ 上面积分趋于零时, Fourier 级数收敛且其和等于 $f(x)$; 然而这极限不能立刻确定, 因为相关的因子 D_N 还无极限. 克服这困难的一种方法应归功于 Riemann (1893) 的基本引理所提供, 这引理断言对 $a<x<b$ 上所有绝对可积函数 $f(x)$,

$$\int_a^b f(x)\cdot\begin{Bmatrix}\sin\ nx\\ \cos\ nx\end{Bmatrix}dx\to 0,\quad 当\quad n\to\infty.$$

设部分和公式中的容许函数是分段连续的, 在每个有限区间内只可能有有限多个跳跃不连续点, 且在这种不连续点取左右极限的平均值作为该函数在该点的值, 即

$$f(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2};$$

显然, 当此函数连续时, 这一规定也提供通常的局部值.

设

$$\widetilde{f}(x_0)=\begin{cases}f(x_0), & 在\ x_0\ 连续,\\ \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}, & 在\ x_0\ 不连续\end{cases}\tag{32.30}$$

作为对 f 的连续或不连续性状情形下的定义, 且引入函数

$$F(\zeta,x_0)=f(x_0+\zeta)+f(x_0-\zeta)-2\widetilde{f}(x_0),\tag{32.31}$$

它具有性质

$$\lim_{\zeta\to 0}F(\zeta,x_0)=0.$$

有一个被意大利数学家 Dini, U. (迪尼, 1845—1918) 所提供的收敛定理, 该定理对形为

$$S_N(x_0)-\widetilde{f}(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_N(\zeta)F(\zeta,x_0)d\zeta,\tag{32.32}$$

的 (32.29) 断言: 如果积分

$$\int_0^\pi\frac{|F(\zeta,x_0)|}{\zeta}d\zeta$$

存在, 则绝对可积函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数有和 $f(x_0)$. Riemann 引理能直接用来得到这个证明, 由于

$$D_N(\zeta)F(\zeta,x_0)=\left[\frac{F(\zeta,x_0)}{\zeta}\cdot\frac{\zeta/2}{\sin\dfrac{\zeta}{2}}\right]\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\zeta,$$

由于

$$1\leqslant\frac{\zeta/2}{\sin\zeta/2}\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\zeta\leqslant\pi\tag{32.33}$$

方括号内的项是绝对可积的.

关于对 $f(x)$ 的 Fourier 级数的另一收敛准则直接用 $f(x)$ 来叙述; 该准则依赖于存在两个正常数 p, C 使得下式成立,

$$|f(x_0+\zeta)-f(x_0)| \leqslant C|\zeta|^p, \quad \text{当} \quad \zeta \neq 0. \tag{32.34}$$

在 $p=1$ 的特殊情形 (32.34) 即 Lipschitz, R. O. S. (利普希茨, 1832—1903) 条件由它可推出右和左差商两者都有界, 即

$$\frac{f(x_0+\zeta)-f(x_0+0)}{\zeta}, \quad \frac{f(x_0-\zeta)-f(x_0-0)}{\zeta}$$

对 ζ 的任意小值有界.

为肯定收敛性质, 按关系式

$$\int_0^h \frac{d\zeta}{\zeta^{1-p}} < \epsilon C$$

选取正数 $h, 0<h<\pi$ 且注意到 (32.32),(32.33) 提供所要求的估计, 当 N 充分大时

$$\begin{aligned}&\left|S_N(x_0)-\widetilde{f}(x_0)\right| \\ <\ &\epsilon+\left|\frac{1}{\pi}\int_h^\pi \frac{f(x_0+\zeta)+f(x_0-\zeta)-2\widetilde{f}(x_0)}{2\sin\dfrac{\zeta}{2}}\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\zeta d\zeta\right| < 2\epsilon.\end{aligned}$$

如果存在一对常数 p, C 使得不等式 (32.34) 在整个区间上成立, 则在区间上一致收敛.

作为例子, 考虑连续且有 2π 周期的函数

$$f(x)=x^k\cos\frac{1}{x}, \quad k>0, \quad 0<x<2\pi;$$

由于当 $p=k$ 和 $C=1$ 时, Lipschitz 条件 (32.34) 成立, 相应的 Fourier 级数在该区间上处处收敛. 当 $k<0$ 而且函数 $f(x)$ 在接近 $x=0$ 处不再是有界变差时, 出现了不同的情形, 因此上面的收敛定理不能应用.

可以提一下 Dirichlet–Jordan, C. (约当, 1838—1921) 准则的简述: 如果一个函数只有有限多个极大值和极小值, 则其 Fourier 级数在区间 $0<x_0<2\pi$ 内收敛到和 $\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$, 且在此区间的端点收敛到和

$$\frac{1}{2}[f(0+)+f(2\pi-0)].$$

如果函数是连续的话,则得到一致收敛性.

最后,注意所有上面关于 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $0 < x < 2\pi$ 内的收敛性的结论对于长度 2π 的任何其他区间,如 $c < x < c + 2\pi$,也是成立的,如果 Fourier 系数是用在新区间上的积分找到的;事实上,当该函数有周期 2π 时,这些系数值保持不变.然而,如果 $f(x)$ 在超过 2π 的区间上定义,则相对于 $c < x < c + 2\pi$ 的 Fourier 级数一般地依赖于 c 的取值.

习 题 32

1. 借助于研究其部分和 $S_N(x)$,验证函数级数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x\left[n^2 e^{-nx} - (n-1)^2 e^{-(n-1)x}\right], \quad x \geqslant 0$$

在区间 $x \geqslant 0$ 处处收敛.估计带特殊自变量的余项函数 $R_N\left(\frac{1}{N}\right)$ 当 $N \to \infty$ 时的极限,且推断此级数在任何区间 $0 < x < \delta$ 上的非一致收敛性.检查关系式

$$\int_a^b S(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^b S_N(x)dx$$

对分别的积分限的指定值 $a = 0, b = 1$ 和 $a = 1, b = \infty$ 成立.

2. 证明如果 $f(x)$ 有处处连续的导数,则对应的 Fourier 系数由渐近性状

$$na_n \to 0, \quad nb_n \to 0, \quad 当 \quad n \to \infty$$

所刻画.

3. 设 $f(x)$ 是其二阶导数在区间 $0 < x < 2\pi$ 上有界的函数;证实 $f(x)$ 的 Fourier 级数的通项的估计

$$|a_n \cos\ nx + b_n \sin\ nx| \leqslant \frac{4M}{n^2}$$

成立,这里 M 表示 $\frac{d^2 f}{dx^2}$ 的上界,用此估计去证明级数的收敛性.

4. 考虑绝对可积且有周期 2π 的函数 $f(x)$;假设在 x_0 处它的右和左导数存在,证明如果该函数在 x_0 连续,其相关的 Fourier 级数收敛到 $f(x_0)$;如果此函数在该点不连续,其相关的 Fourier 级数收敛到 $\frac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)]$.

5. (i) 如果

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\ nx+b_n\sin\ nx)$$

构成有周期 2π 的连续且平方可积函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 证明

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x))^2dx.$$

(ii) 用上面规定的函数 $f(x)$ 定义函数

$$F(x)=\int_0^x\left[f(x')-\frac{1}{2}a_0\right]dx',$$

证明周期性关系式

$$F(x)=F(x+2m\pi),\quad m\text{ 为整数}.$$

详述 f,F 的分别的 Fourier 系数之间的联系, 且找出与 (i) 中关系式类似的包括 F^2 的积分的关系式.

6. 设级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\ nx,\quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin\ nxdx,\quad n=1,\cdots$$

表示 $0<x<\pi$ 中具有绝对可积导数的连续函数. 证明

$$f(0)=\frac{\pi}{4}[\alpha+\beta],\quad f(\pi)=\frac{\pi}{4}[\alpha-\beta],$$

这里

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}nb_n,\quad n\text{ 为奇数},$$
$$\beta=\lim_{n\to\infty}nb_n,\quad n\text{ 为偶数}.$$

在 $f(x)=x$ 的特殊情形检验上面的结果.

7. Dirichlet 核函数

$$D_N(x)=\frac{1}{2}+\cos\ x+\cdots+\cos Nx \tag{i}$$

出现于部分和表示式

$$S_N(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}D_N(x-x')f(x')dx' \tag{ii}$$

中, 假定极限的存在性蕴涵三角级数收敛性成立, 即

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = f(x),$$

则 $D_N(x)$ 必须满足

$$\lim_{N\to\infty} D_N(x-x') = 0, \quad x' \neq x \tag{iii}$$

和

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} D_N(x-x')dx' = 1, \quad N\to\infty. \tag{iv}$$

这些不平常性质 (对任何常见的函数不是显然的性质) 反映于无穷级数

$$\frac{1}{2} + \cos\ x + \cdots + \cos\ Nx + \cdots$$

是非收敛级数这一事实中.

求和法曾被提出用来处理在通常意义下发散的级数; 且一种这样的方法用于一数列或函数级数中项的算术平均. 这样, 设 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 确定一部分和集合且定义它们的算术平均

$$\sigma_n = \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n}. \tag{v}$$

设该序列或级数在通常意义下有和 S, 即,

$$|S_m - S| < \epsilon, \quad \text{对所有} \quad m > N \tag{vi}$$

且考虑 S 和 σ_n 之间的差, 即

$$\begin{aligned}\sigma_n - S &= \frac{S_1 - S + S_2 - S + \cdots + S_n - S}{n}\\ &= \frac{S_1 - S + \cdots + S_m - S}{n} + \frac{S_{m+1} - S + \cdots + S_n - S}{n},\end{aligned}$$

这里 $n > m > N$. 按照 (vi)

$$|\sigma_n - S| \leqslant \left|\frac{S_1 - S + \cdots + S_m - S}{n}\right| + \frac{(n-m)\epsilon}{n},$$

从而固定 m, 对充分大的 n, 即 $n > N^* > N$, 第一项小于 ϵ, 第二项总是小于 ϵ 的. 所以

$$|\sigma_n - S| < 2\epsilon, \quad n > N^*,$$

这即是

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = S$$

因而算术平均序列和部分和序列有共同的极限.

转到 Dirichlet 核函数的部分和序列, 即

$$\begin{aligned} D_0(x) &= \frac{1}{2}, \\ D_1(x) &= \frac{1}{2} + \cos\ x, \\ &\cdots \\ D_{N-1}(x) &= \frac{1}{2} + \cos\ x + \cdots + \cos(N-1)x, \end{aligned}$$

注意到其紧凑形式

$$D_{N-1}(x) = \frac{1}{2}\frac{\cos(N-1)x - \cos\ Nx}{1-\cos\ x} \quad N = 1, 2, \cdots$$

验证后者集合起来的算术平均

$$\sigma_N(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \cdots + D_{N-1}(x)}{N}$$

由

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{2N}\left[\frac{\sin\dfrac{Nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\right]^2 \tag{vii}$$

显式给出. 比较 $\sigma_N(x)$ 和

$$D_N(x) = \frac{\sin\left(N+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

是有启发的; 特别地, 当自变量等于 2π 的整数 $(k = 0, 1, \cdots)$ 倍时, 确定式

$$D_N(2k\pi) = N + \frac{1}{2}$$

和

$$\sigma_N(2k\pi) = \frac{1}{N}\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}+1\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2}+N-1\right)\right] = \frac{N}{2}$$

揭示一个联合的极限性状, 即

$$D_N(2k\pi) \to \infty, \quad \sigma_N(2k\pi) \to \infty, \quad \text{当}\, N \to \infty. \tag{viii}$$

然而, 对所有 $x \neq 2k\pi$, 它们分别的性状之间明显不同; 这样前者无极限, 而 (vii) 推导出

$$\sigma_N(x) \to 0, \quad N \to \infty, \quad x \neq 2k\pi.$$

因此, 虽然级数

$$\frac{1}{2} + \cos\ x + \cdots + \cos\ Nx + \cdots$$

按通常意义不收敛, 如果 $x \neq 2k\pi$, 用算术平均求和法得出一确定值, 即零. 讨论关于 D_N 的命题 (iii),(iv) 与 $N \to \infty$ 时由 σ_N 所得极限的相容性.

归功于 Fejer, L. (费耶尔, 1880—1959)(1903) 的表示式

$$\begin{aligned}\Sigma_N(x) &= \frac{[S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_{N-1}(x)]}{N} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sigma_N(x - x')f(x')dx'\end{aligned} \tag{ix}$$

是描述三角 Fourier 级数部分和的表示式 (ii) 的最重要的类似表示式. 建立关系式

$$\Sigma_N(x) - f(x) = \frac{1}{2N\pi}\int_0^{\pi}[f(x+\zeta) + f(x-\zeta) - 2f(x)]\left[\frac{\sin\dfrac{N\zeta}{2}}{\sin\dfrac{\zeta}{2}}\right]^2 d\zeta,$$

这引出一重要定理: 如果 $f(x)$ 是连续的且有周期 2π, 则 Fejer 和 (不像部分和) 一致收敛到 $f(x)$, 即对每个 $\varepsilon > 0$, 存在一个对应的 N, 使得对所有 x, 当 $n > N$, 有

$$|\Sigma_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

8. 找出平面极坐标中 Laplace 偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < R, \quad -\pi < \vartheta < \pi$$

在半径为 R 的圆域内的解, 给定边界值

$$u(R,\vartheta) = \frac{A}{2\epsilon}, \quad 0 < \vartheta < \epsilon, \pi - \epsilon < \vartheta < \pi,$$

$$u(R,\vartheta) = 0, \epsilon \leqslant \vartheta \leqslant \pi - \epsilon, \quad -\pi + \epsilon \leqslant \theta \leqslant -\epsilon, \quad u(R,-\vartheta) = u(R,\vartheta)$$

同时要求 u 在整个区域有限. 表示式

$$u(R,\vartheta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\ n\vartheta$$

反映了边界数据的对称性, 直接计算其中的系数, 验证当取极限 $\epsilon \to 0$ 时,

$$u(R,\vartheta) = \frac{2A}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos\ 2n\vartheta\right], \tag{*}$$

可求和级数的这一性质, 如前一问题中阐明的, 提出函数 $u(r,\vartheta), r<R$ 的一种解释, 即具有除两个"热点"外的冷 (零温度) 边界的薄圆板内的定常温度, 在两热点极端高温集中在无穷小弧上.

对 $0\leqslant r<R, -\pi<\theta<\pi$ 中的 $u(r,\theta)$ 配置一个适当表示式使与边界形式 (*) 相适应且由此决定所要找的解. u 在该区域中心的值是什么? 它与边界分布的平均值有什么关系?

讨论一个类似的问题, 其中三个热点对称地位于边界上, 如以下指定中所示

$$u(R,\vartheta)=\frac{A}{2\epsilon},\quad \begin{cases}-\epsilon<\vartheta<\epsilon,\\ \dfrac{2\pi}{3}-\epsilon<\vartheta<\dfrac{2\pi}{3}+\epsilon,\\ -\dfrac{2\pi}{3}+\epsilon>\vartheta>-\dfrac{2\pi}{3}-\epsilon\end{cases}$$

和

$$u(R,\vartheta)=0,\quad 在\ -\pi<\vartheta<\pi\ 的其他处,$$

当取极限 $\epsilon\to 0$ 时有端点处的表示式

$$u(R,\vartheta)=\frac{2A}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos\ 3n\vartheta\right],$$

9. 考虑除点 x_0 外在整个区间 $0<x<2\pi$ 上可微的以 2π 为周期的函数 $f(x)$, 在 x_0 有跳跃不连续性, 即

$$f(x_0+0)-f(x_0-0)=A, \tag{i}$$

此外, 假设

$$f(0)=f(2\pi). \tag{ii}$$

对 $f(x)$ 的 Fourier 级数的 N 项部分和微分得出

$$\begin{aligned}\frac{dS_N}{dx}&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}D_N(x-x')f(x')dx'\\ &=\frac{-1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial x'}D_N(x-x')f(x')dx',\end{aligned}$$

由于 D_N 的自变量依赖于变量 x,x' 之差; 其次在分部积分且利用条件 (ii) 后, 提出形式表示式

$$\frac{d}{dx}S_N(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}D_N(x-x')\frac{d}{dx'}f(x')dx',$$

带有运算形式

$$\frac{d}{dx}S_N(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_0^{x_0-\epsilon}+\int_{x_0+\epsilon}^{2\pi}\right]D_N(x-x')\frac{d}{dx'}f(x')dx',\qquad\text{(iii)}$$

这从积分范围中删除了临界点 x_0. 给定条件 (i) 和 $D_N(x-x')$ 在 $x'=x_0$ 的连续性, 验证从 (iii) 得出的推论

$$\frac{d}{dx}S_N(x)=\frac{A}{\pi}D_N(x-x_0)+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}D_N(x-x')\frac{d}{dx'}f(x')dx',\qquad\text{(iv)}$$

这里在上面的积分中 $\frac{df}{dx}$ 在 x_0 的定义值理解为

$$\frac{df}{dx}=\frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\left[\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0+\epsilon}+\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0-\epsilon}\right].$$

因此, 按照对部分和 $S_N(x)$ 本身收敛性分析的思路, 上面的积分当 $N\to\infty$, 在 $0<x<2\pi$ 内趋向于确定的极限, 即 $\frac{df}{dx}$; 然而, (iv) 中的第一项没有对应的极限且微分后的 Fourier 级数的部分和序列的不收敛性变得明显.

为了用一个确定的例子来阐明上述特征而且也为了显示算术平均求和法的有用作用, 考虑一个 Laplace 偏微分方程的边值问题, 其定义方程包括

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\vartheta^2}=0,\quad 0\leqslant r<R,-\pi<\vartheta<\pi,$$

$$u(R,\vartheta)=\begin{cases}U_0, & 0<\vartheta<\pi,\\ -U_0, & -\pi<\vartheta<0\end{cases}\qquad\text{(v)}$$

和

$$u(0,\vartheta)\quad\text{有限}.$$

导出解的收敛级数形式

$$u(r,\vartheta)=\frac{4}{\pi}U_0\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1}\frac{\sin(2n+1)\vartheta}{2n+1},\qquad\text{(vi)}$$

且注意 u 可以与一对半圆柱形电极内的静电势函数相联系. 从 u 的法向 (径向) 导数得到电极处的电荷密度, 即 (vi) 中微分的结果

$$R\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sin(2n+1)\vartheta\qquad\text{(vii)}$$

表示一个要求解释的非收敛级数.

如果

$$F_n(z) = e^{i\alpha} + e^{i\alpha}z + \cdots + e^{i\alpha}z^{n-1} = e^{i\alpha}\frac{1-z^n}{1-z},$$

证明

$$\sigma_n(z) = \frac{F_1 + \cdots + F_n}{n} = \frac{e^{i\alpha}}{1-z}\left[1 - \frac{1}{n}\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right)\right] \to \frac{e^{i\alpha}}{1-z}, \quad 当\ n \to \infty,\quad |z| = 1,\quad 且\quad z \neq 1.$$

设 $z = e^{i\beta}$, 作为算术平均求和的推论, 证明

$$\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \cdots + \sin(\alpha+n\beta) + \cdots = \frac{\cos\left(\alpha - \dfrac{\beta}{2}\right)}{2\sin\dfrac{\beta}{2}}, \quad \beta \neq 2k\pi;$$

把它应用到 (vii) 且验证

$$R\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{4}{\pi}U_0\frac{1}{2\sin\vartheta},$$

与用方程组 (v) 的显式解

$$u(r,\vartheta) = \frac{2}{\pi}U_0\tan^{-1}\left[\frac{2r\sin\ \vartheta}{1-r^2}\right]$$

所得结果完全一致, 该显式解从复分析 (或共形映射) 得出.

10. 与线性锯齿形图形 (图 46) 相联系的 Fourier 级数提供了在互补区间上的表示式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\ nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\ nx}{n} = \frac{\pi - (x - 2m\pi)}{2}, \quad 2m\pi < x < 2(m+1)\pi, \quad m\ 为整数.$$

按上式

$$F(x) = \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\ nx}{n} = \frac{\pi}{2}(1+2m), \quad 2m\pi < x < 2(m+1)\pi, \qquad \text{(i)}$$

指出当 x 增加且通过任意两个相邻区间

$$[2(m-1)\pi, 2m\pi], \quad [2m\pi, 2(m+1)\pi]$$

时, 函数 $F(x)$ 经历数量为 π 的值的增加. 在 (i) 中将 x 换成 $2\pi t/\tau$ 且用因子 V 相乘, 所得结果

$$\frac{V}{\pi}\left[\pi\frac{t}{\tau}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\ 2n\pi\frac{t}{\tau}\right]=\frac{V}{2}(1+2m), \quad m\tau<t<(m+1)\tau$$

可用来定义函数

$$v(t)=\frac{V}{2}+\frac{Vt}{\tau}+\frac{V}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\ 2n\pi\frac{t}{\tau}, \quad t>0 \tag{ii}$$

它表示一质点在直线运动中的速度, 开始在 $0<t<\tau$ 时速度的量为 V, 然后在均匀地间隔的持续时间 τ 的区间经历均匀的增长同样的量 V. 注意由于变量 t 也进入了线性项, 表示式 (ii) 与 Fourier 表示式不同.

一旦考虑到关系式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\ 2n\pi\frac{t}{\tau}=\frac{\pi}{2}\left[1-2\left(\frac{t-m\tau}{\tau}\right)\right]. \quad m\tau<t<(m+1)\tau,$$

要求的结果

$$v(t)=V(1+m), \quad m\tau<t<(m+1)\tau, \quad m=0,1,\cdots$$

即从 (ii) 得出, 这结果支持对速度函数 $v(t)$ 所作的断言. 积分 (ii) 且由此决定由质点在 $t=0$ 到 t 之间走过的整个距离

$$s(t)=\int_0^t v(t)dt;$$

解释逐项微分 (ii) 的结果作为描述加速度过程的一种方法.

11. 考虑定义方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<L, \quad t>0,$$
$$u(x,0)=A, \quad 0<x<L$$

和

$$u(0,t)=B, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L}=0, \quad t>0$$

的扩散型齐次偏微分方程的初/边值问题. 找出级数形式的解, 讨论它的收敛性质, $t \to \infty$ 时的渐近性状和边界条件的满足. 考察在 $x=0$ 处的热流量, 即

$$-\kappa \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0},$$

并验证在分别的情形 $A \gtrless B$ 时它的预期的意义.

12. 表示函数

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2} \quad (0<x<2\pi)$$

和 2π 周期延拓的其他处 (图 46) 的级数的部分和函数

$$S_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin\ nx}{n}$$

能展示成积分形式

$$S_N(x)=-\frac{x}{2}+\int_0^x \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\zeta}{2\sin\frac{\zeta}{2}}d\zeta, \quad 0<x<2\pi.$$

设

$$\begin{aligned} O_N(x) &= S_N(x)-f(x) \\ &= \int_0^x \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\zeta}{2\sin\frac{\zeta}{2}}d\zeta-\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

表示 "超出了函数定义值" 的函数 (或余项 $R_N(x)$ 的负函数), 且注意对给定的 N, O_N 在 $0<x<2\pi$ 的 N 个点有极值, 即在 $x_n=\dfrac{2n\pi}{2N+1}, n=1,\cdots,N$ 有

$$\frac{dO_N}{dx}=\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}=0.$$

证明 $O_N(x)$ 当 n 是奇或偶数时取到局部极大值或极小值.

当 N 增大时 $O_N(x)$ 的振动变得更多, 相邻极值间的间隔 $\Delta x_n=x_{n+1}-x_n$ 减小; 此外这些振动变得群集于点 $x=0$ 附近, 在此点处存在由不相等的极限值

$$f(0+)=\frac{\pi}{2}, \quad f(0-)=-\frac{\pi}{2}$$

所显示的整体函数 $f(x)$ 的跳跃不连续性.

"超出了函数定义值"的函数的一个值得注意的性状, 在对应于 n 阶极大值的点 x_n 处, 当取极限 $N\to\infty$ 时被揭示出, 由于

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} O_N(x_n) &= \lim_{N\to\infty}\int_0^{\frac{n\pi}{N+\frac{1}{2}}} \frac{\sin\left(N+\dfrac{1}{2}\right)\zeta}{2\sin\dfrac{\zeta}{2}}d\zeta - \frac{\pi}{2}\\ &= \lim_{N\to\infty}\int_0^{n\pi}\frac{\sin\nu}{(2N+1)\sin\dfrac{\nu}{2N+1}}d\nu - \frac{\pi}{2}\\ &= \int_0^{n\pi}\frac{\sin\nu}{\nu}d\nu - \frac{\pi}{2} = \mathrm{Si}(n\pi) - \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

这里

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin\nu}{\nu}d\nu$$

表示正弦积分函数, 有很好的制表可查.

这样, 高阶 $(N\gg 1)$ 部分和函数在 $f(x)$ 的跳跃不连续点 $x=0$ 邻近的狭小区间内经历快速振动, 且该"超出了函数定义值"的函数当 $N\to\infty$ 时取极值 $\mathrm{Si}(n\pi)-\dfrac{\pi}{2}, n=1,2,\cdots$ 最大的"超出了函数定义值"出现于第一个极大值 $(n=1)$ 处, 其大小为

$$\mathrm{Si}(\pi) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}[1.089\cdots - 1] = 0.089 f(0+).$$

另一个所表示的 Gibbs 现象这里由在 $x=0$ 处当 $N\to\infty$ 时对部分和的垂直迹所显示, 其跨度

$$1.089[f(0+)-f(0-)]$$

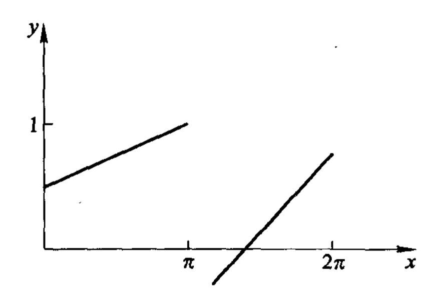
超过了和函数本身的值的跳跃度

$$[f(0+)-f(0-)].$$

当 $N=10,50,100$ 时, 找出正弦积分所要求的值, 且作草图表示在 $x=0$ 附近的"超出了函数定义值"函数和部分和函数.

13. 如下图所描绘的区间 $0<x<2\pi$ 上具有不同斜率 α,β 的分段线性函数其表示式为

$$y(x) = \begin{cases} 1-\alpha(\pi-x), & 0<x<\pi,\\ 1-\delta+\beta(x-\pi), & \pi<x<2\pi,\end{cases} \tag{i}$$



这里

$$\delta = y(\pi - 0) - y(\pi + 0)$$

度量了 $x = \pi$ 处的跃阶的大小.
对参数的一些特别指定, 即

$$\alpha = \beta = 0, \quad \delta = 2,$$
$$\alpha = -\beta = \frac{1}{\pi}, \quad \delta = 0$$

和

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\pi}, \quad \delta = 2$$

与称为方脉冲、楔形和锯齿形的普通图形有关.

验证与函数 (i) 且其他处为其 2π 周期延拓相关联的部分和表示式中的系数

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}[a_n \cos\ nx + b_n \sin\ nx]$$

由以下式子给出:

$$a_0 = 2 - \delta + \frac{\pi}{2}[\beta - \alpha],$$
$$a_n = \frac{1}{\pi n^2}(\beta - \alpha)[1 - (-1)^n],$$
$$b_n = \frac{\pi\delta}{n}[1 - (-1)^n] - \frac{\alpha + \beta}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

注意特殊值

$$S_N(\pi) = \frac{a_0}{2} - \frac{\beta - \alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1 - (-1)^n}{n^2}$$

和 $N \to \infty$ 时其极限值

$$\lim_{N\to\infty} S_N(\pi) = \frac{a_0}{2} - \frac{\beta - \alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - (-1)^n}{n^2} = \frac{a_0}{2} - \frac{(\beta - \alpha)\pi}{4} = 1 - \frac{\delta}{2}, \quad \text{(ii)}$$

这揭示在不连续点 Fourier 级数收敛到函数的左右极限平均值的所期望的收敛性. (ii) 不包含其他点处有关细节, 如函数在不同的不连续点两边的斜率这一事实是 Fourier 级数表示式的一般特征, 即它们恰好反映了生成函数的局部性状.

现在情形下的“超出了函数定义值”的函数

$$\begin{aligned} O_N(x) &= S_N(x) - f(x) \\ &= (\pi - x)\alpha + \frac{\pi}{4}(\beta - \alpha) - \frac{\delta}{2} + \frac{\beta - \alpha}{\pi}\Sigma_1(x) \\ &\quad -(\beta + \alpha)\Sigma_2(x) + \frac{\delta}{\pi}\Sigma_3(x), \quad 0 < x < 2\pi \end{aligned} \tag{iii}$$

包含三个不同和式

$$\Sigma_1(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cos\ nx,$$

$$\Sigma_2(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin\ nx}{n},$$

$$\Sigma_3(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{[1 - (-1)^n]}{n} \sin\ nx,$$

其中第二个有前面给出的用积分表示的形式

$$\Sigma_2(x) = -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\zeta}{2\sin\frac{\zeta}{2}} d\zeta. \tag{iv}$$

验证 $\Sigma_3(x)$ 的替代形式, 即

$$\Sigma_3(x) = 2\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin\ nx}{n} - \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\sin\ 2nx}{2n}, \quad N\text{为奇数},$$

然后利用结果 (iv) 推演出

$$\Sigma_3(x) = \int_0^x \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\zeta}{\sin\frac{\zeta}{2}} d\zeta - \int_0^x \frac{\sin\ N\zeta}{\sin\zeta} d\zeta. \tag{v}$$

考虑到相互关系

$$\frac{d}{dx}\Sigma_1(x) = -\Sigma_3(x)$$

及其推论

$$
\begin{aligned}
\Sigma_1(x) &= \Sigma_1(0) - \int_0^x \Sigma_3(x)dx \\
&= \Sigma_1(0) - x\Sigma_3(x) + \int_0^x \zeta\frac{d}{d\zeta}\Sigma_3(\zeta)d\zeta \\
&= \sum_{n=1}^{N}\frac{1-(-1)^n}{n^2} + \int_0^x (\zeta - x)\left[\frac{\sin\left(N+\dfrac{1}{2}\right)\zeta}{\sin\dfrac{\zeta}{2}} - \frac{\sin N\zeta}{\sin\zeta}\right]d\zeta,
\end{aligned} \tag{vi}
$$

通过 (iv),(v)(vi) 去分析 N 取大值的“超出了函数定义值”的函数的方法已准备好了.

当参数选取为

$$\alpha = \beta = 0, \quad \delta = 2$$

时, 表示出“超出了函数定义值”的函数的导数且由此决定其极值的位置.

证实

$$x_1 = \pi\left[1 - \frac{1}{N+1}\right]$$

确定不连续点 $x=\pi$ 左边的 $O_N(x)$ 的第一个极大值的位置; 这里

$$
\begin{aligned}
O_N(x_1) &= -1 + \frac{2}{\pi}\Sigma_3(x_1) \\
&= -1 + \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{x_1}\frac{\sin\left(N+\dfrac{1}{2}\right)\zeta}{\sin\dfrac{\zeta}{2}}d\zeta - \int_0^{x_1}\frac{\sin N\zeta}{\sin\zeta}d\zeta\right].
\end{aligned}
$$

利用 (32.13),

$$
\begin{aligned}
\int_0^{x_1}\frac{\sin\left(N+\dfrac{1}{2}\right)\zeta}{\sin\dfrac{\zeta}{2}}d\zeta &= 2\int_0^{\frac{N\pi}{N+1}}\left[\frac{1}{2} + \cos\zeta + \cdots + \cos N\zeta\right]d\zeta \\
&= \frac{N\pi}{N+1} + 2\left[\sin\frac{N\pi}{N+1} + \sin 2\frac{N\pi}{N+1}\right. \\
&\quad \left. + \cdots + \sin\ N\frac{N\pi}{N+1}\right] \\
&\to \pi, \quad \text{当 } N \to \infty.
\end{aligned}
$$

其次, 验证当 N 是奇数时, 变换

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi\left[1-\frac{1}{N+1}\right]} \frac{\sin\ N\zeta}{\sin\zeta}d\zeta &= \int_{\frac{\pi}{N+1}}^{\pi} \frac{\sin N\nu}{\sin\nu}d\nu \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin N\nu}{\sin\nu}d\nu - \int_0^{\frac{\pi}{N+1}} \frac{\sin N\nu}{\sin\nu}d\nu \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\ N\nu}{\sin\nu}d\nu - \int_0^{\frac{N\pi}{N+1}} \frac{\sin\sigma}{N\sin\dfrac{\sigma}{N}}d\sigma,\end{aligned}$$

回忆 Dirichlet 式

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2N+1)\nu}{\sin\nu}d\nu = \frac{\pi}{2}$$

去证明结果

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{x_1} \frac{\sin\ N\zeta}{\sin\zeta}d\zeta = \pi - \mathrm{Si}(\pi),$$

由此得出受欢迎的结果

$$\lim_{N\to\infty} O_N(x_1) = \frac{2}{\pi}\mathrm{Si}(\pi) - 1.$$

与课文中有跳跃不连续性的 "超出了函数定义值" 的结论作比较, 引出一般结论. 对参数 α, β 和 δ 的一些其他选择作出类似的详细讨论.

14. 考虑非齐次偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + P, \quad 0 < y < h, \tag{i}$$

它描述一类简单的不可压缩黏性平面流, 速度 u 平行于 x 方向, 承受沿同方向的 (驱动) 力 P; 这里 ν 确定一个黏性参数, 且在包含该流的无限长管道的固定边界 $y=0, y=h$ 的合适 (无滑动) 边界条件是

$$u(0,t) = 0, \quad u(h,t) = 0, \text{ 对所有 } t. \tag{ii}$$

如果 P 是常量, 则存在 (i),(ii) 的一个定常解, 即

$$u(y) = \frac{P}{2\nu}y(h-y), \quad 0 < y < h \tag{iii}$$

具有沿管道宽度的抛物线变化. 黏性导致能量的不断的损耗, 且管道的每个单位长度和每单位时间的损耗量用积分

$$\int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy$$

来度量, 对定常流它的值是

$$\frac{h^3P^2}{12\nu^2}.$$

更一般地, 能量损耗的变化率进入从 (i) 可导出的关系式

$$\frac{d}{dt}\int_0^h\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2dy=2\int_0^h\frac{\partial u}{\partial y}\;\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial t}dy=2\nu\int_0^h\frac{\partial u}{\partial y}\;\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy, \tag{iv}$$

其中在定常流情形两边均为零.

现在假设驱动力在瞬时 (在 $t=0$) 从已建立的定常流 (iii) 中撤走; 接着发生的流体运动可以用齐次方程 (i) 来描述, 且边界条件 (ii) 由初始条件

$$u(y,0)=\frac{P}{2\nu}y(h-y) \tag{v}$$

所补充. 导出 (i),(ii),(v) 的级数解

$$u(y,t)=\frac{4h^2P}{\pi^3\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\dfrac{\pi y}{h}}{(2n+1)^3}\exp\left[-\nu(2n+1)^2\frac{\pi^2}{h^2}t\right],\quad t>0 \tag{vi}$$

且注意在整个区间 $0\leqslant y\leqslant h$ 上和对所有 $t>0$ 它的一致收敛性. 用 (vi) 估算能量关系式 (iv) 两边的值, 且验证当 $t>0$ 时它们相等. 断定能量损耗的时间变化率在 $t=0$ 突然改变, 从定常流体系中的零值变到无外力流体系中的一个负值. 由于速度 u 及其横向导数 $\partial u/\partial y$ 它们本身在 $t=0$ 不是不连续地变化的, 以上性状的解释在于高阶导数的性质; 这样, 在管道的边界上, 对任意时间这里 u 为零, 当力被撤消时, 二阶导数 $\partial^2u/\partial y^2$ 经历从 $-P/\nu$ 到 0 的瞬时改变. 从级数 (vi) 计算 $\partial^3u/\partial y^3$, 且分别在 $0<y<h$ 和 $y=0$ 或 h 三种情形, 当 $t\to 0$ 时考察其性状.

第三十三章

Fourier 展开式: 各种例子

Fourier 展开式 (和基于其他正交函数集的它们的相应部分) 在范围广泛的不同情形中有不容置疑的优点和重大意义, 即使有限个数的特定例子即可显示. 收敛的 Fourier 展开式通过其三角函数基表示周期型函数, 虽然它们通常通过某有限区间如 $0 < x < 2\pi$ 上一给定非周期函数 $f(x)$ 的积分而构成. 从这样一个生成函数出发一开始就可能通过规定

$$
\begin{aligned}
f^*(x) &= f(x), \quad 0 < x < 2\pi, \\
f^*(0) &= f^*(2\pi)
\end{aligned}
$$

和

$$
f^*(x + 2\pi) = f^*(x), \quad \text{对所有}x
$$

来定义一个 2π 周期函数 $f^*(x)$; 由于从区间 $0 < x < 2\pi$ 上积分得到的 f^* 的 Fourier 系数与 $f(x)$ 的系数是一样的, 一个共同的展开式描述这两函数且其和在 $0 < x < 2\pi$ 中等于 $f(x)$. 在区间 $0 < x < 2\pi$ 的端点该级数 (对以前认可的函数类) 分别收敛到

$$
\frac{f^*(+0) + f^*(-0)}{2} = \frac{f(+0) + f(2\pi - 0)}{2}, \quad x = 0
$$

和

$$
\frac{f^*(2\pi + 0) + f^*(2\pi - 0)}{2} = \frac{f(+0) + f(2\pi - 0)}{2}, \quad x = 2\pi.
$$

如果 $f(0) = f(2\pi)$, 从 $0 < x < 2\pi$ 按 2π 周期方式直接扩张产生一个具有处处连续性的函数; 而在 $f(0) \neq f(2\pi)$ 的情形下, 类似的扩张表示在 $x = 0, 2\pi, -2\pi, \cdots$ 点跳跃不连续的函数. 可以推测在整体函数中的更高阶的光滑性 (如连续导数的个数所显示) 反映在该 Fourier 级数的更快的收敛性上. 例如,2π 周期函数

$$f(x) = \frac{1}{a + \cos x}, \quad |a| > 1$$

和

$$f(x) = \left|\sin^3 \frac{x}{2}\right|, \quad 0 < x < 2\pi$$

由于它们的连续导数的个数不同而彼此不同; 前者有所有阶数的导数而后者只有有限个导数. 随后的仔细分析会确切地揭示前一函数的 Fourier 系数当 n 增大时如何变小, 远远快于后一函数的系数.

当基本区间的长度不同于 2π 时, 修改前面的 Fourier 展开式是一件简单的事; 这样, 一对区间

$$0 < x < 2L \quad 和 \quad 0 < y < 2\pi$$

由变换

$$x = \frac{L}{\pi} y \tag{33.1}$$

互相映射, 且对应于生成函数的重新定标的自变量, 类似的展开式即

$$f(x) \to f\left(\frac{Ly}{\pi}\right) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\ ny + b_n \sin\ ny), \quad 0 < y < 2\pi \tag{33.2}$$

提出了在 x 的新区间上的合适展开, 即返回到原自变量后, 有

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right), \quad 0 < x < 2L. \tag{33.3}$$

要注意的是 (33.3) 中的三角级数的自变量不像 (33.2) 中的, 不再是展开变量的整倍数.

适用于 (33.2) 的 Fourier 系数确定式

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{Ly}{\pi}\right)\cos\ ny dy, \quad n = 0, 1, \cdots \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{Ly}{\pi}\right)\sin\ ny dy, \quad n = 0, 1, \cdots \end{aligned} \tag{33.4}$$

换成与 (33.3) 相应的表示式

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 0, 1, \cdots \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 0, 1, \cdots \end{aligned} \tag{33.5}$$

周期性意味着 (33.4),(33.5) 中的积分限能随意改变, 只要在每一情形下其差仍等于周期; (33.5) 的一种特殊形式值得注意, 即

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 0, 1, \cdots \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 0, 1, \cdots
\end{aligned}
\tag{33.6}
$$

其中积分区间以原点为中心. 按 (33.6) 对 $f(x)$ 的偶或奇对称性有直接推论; 对所有 n, 如果

$$f(x) = f(-x), \quad 则 \quad b_n = 0;$$

又如果

$$f(x) = -f(-x), \quad 则 \quad a_n = 0.$$

这样, 给定 $0 < x < L$ 上的函数 $f(x)$, 两个不同的 Fourier 级数表示式是可行的, 一个只包含余弦项而另一个只含正弦项, 依赖于 $f(x)$ 到 $-L < x < 0$ 中的延拓是用偶或奇方式作出的.

带有复值函数基 Fourier 展开的另一形式, 通过将 (33.3) 中的余弦和正弦置换成其等价式

$$
\begin{aligned}
\cos\frac{n\pi x}{L} &= \frac{1}{2}\left[e^{in\pi x/L} + e^{-in\pi x/L}\right], \\
\sin\frac{n\pi x}{L} &= \frac{1}{2i}\left[e^{in\pi x/L} - e^{-in\pi x/L}\right]
\end{aligned}
$$

而得到; 这给出

$$
\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n - ib_n}{2}e^{i\frac{n\pi x}{L}} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}, \quad 0 < x < 2L,
\end{aligned}
\tag{33.7}
$$

这里

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{33.8}$$

刻画所有系数 $c_n, n = 0, \pm 1, \cdots$ 的表示式从 (33.5),(33.8) 得出, 即

$$c_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}dx; \tag{33.9}$$

且如果 $f(x)$ 是实函数, 则 c_n 和 c_{-n} 是复共轭量. 复值函数集

$$\left\{e^{in\pi x/L}\right\}$$

的正交性表成 (这里 * 表示复共轭量)

$$\int_0^{2L} e^{i\frac{n\pi x}{L}} \left(e^{i\frac{m\pi x}{L}}\right)^* dx = \int_0^{2L} e^{i\frac{(n-m)\pi x}{L}} dx = 0, \quad m \neq n.$$

由于带实或虚自变量的指数函数的微分和积分是简单的

$$\frac{d}{dx} e^{in\pi x/L} = \frac{in\pi}{L} e^{in\pi x/L}$$

和

$$\int^x e^{in\pi x/L} dx = \frac{L}{in\pi} e^{in\pi x/L},$$

Fourier 级数的紧凑的复形式对解析操作是一种特别适宜的形式.

下面详细分析 Fourier 展开式的几个显式例子, 其目的在于指出它们的不同来源并且把它们的收敛速率和生成函数的光滑性联系起来.

例 1: 给定 $f(x) = x$ 在 $0 < x < \pi$ 上和到 $-\pi < x < 0$ 上的偶延拓, 为得到 2π 周期的余弦级数提供信息,

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\ nx,$$

其系数是

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos\ nx dx = \frac{2}{\pi n^2} [1 - (-1)^n], \quad n = 1, 2, \cdots$$

由于当 n 取偶数时 a_n 为零而

$$a_n = -\frac{4}{\pi n^2} \quad \text{对} \quad n = 1, 3, \cdots$$

得出级数表示式为

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}, \quad -\pi < x < \pi; \tag{33.10}$$

以 2π 为周期的级数 (33.10) 的和在 $-\pi < x < \pi$ 外是完全确定的. 对所有 x 的值一致收敛性成立且它反映这个整体和函数的连续性; 此外除了点 $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$ 外, 后者的连续导数存在.

如果选择 $f(x)$ 从 $0 < x < \pi$ 到 $-\pi < x < 0$ 的奇延拓, 则相关的 Fourier 正弦级数

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\ nx$$

有特定的系数值

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin\ nxdx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1},\quad n=1,2,\cdots$$

所以

$$x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\ nx,\quad -\pi < x < \pi. \tag{33.11}$$

在这种情形中整体函数在 $x=(2m+1)\pi, m=0,\pm1,\cdots$ 有跳跃不连续点, 且级数 (33.11) 在包含这些点的任一区间上不一致收敛.

由初始规定在 $0 < x < \pi, f(x) = x$ 完全定义的 Fourier 表示必须在一开始就考虑周期 π 的所有余弦和正弦函数, 即

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos 2nx + b_n\sin 2nx],\quad 0 < x < \pi;$$

这里

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx = \pi,\\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi xd\left(\frac{\sin 2nx}{2n}\right)\\ &= -\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \sin 2nxdx = 0,\quad n=1,2,\cdots \end{aligned}$$

和

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin 2nxdx = -\frac{1}{n},\quad n=1,2,\cdots$$

所以有结果

$$x \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n},\quad 0 < x < \pi. \tag{33.12}$$

显然, 基函数余弦集 $\{\cos 2nx\}, n=0,1,\cdots$ 中只有一个单独的代表 (常数), 且整体函数中出现的跳跃不连续点排除了级数 (33.12) 的处处一致收敛性.

在 $0 < x < \pi$ 上, 有同样的和的关于 x 的三个级数 (33.10),(33.11),(33.12) 中, 第一个级数收敛最快, 因为其关联函数有较光滑曲线. 选取特殊值 $x=\pi/4$ 代入每一级数中; 注意分别的和式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi}{4}}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{8},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n} = \frac{\pi}{4},$$

它们的可证实的值 (参看 (32.7),(32.20),(32.23), 还有级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx = \frac{x}{2}, -\pi < x < \pi$) 能对分别的表示式作一检验.

例 2: 设

$$f(x)=|\sin^3 x|,\quad 0\leqslant x\leqslant \pi,$$

蕴涵的关系式为

$$\begin{aligned}&\text{i)}\ f(-x)=f(x),\\&\text{ii)}\ f(x+\pi)=f(x),\\&\text{iii)}\ f\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)=f\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right),\end{aligned}$$

说明 f 是一个具有周期 π 的偶函数且有关于区间 $(0,\pi)$ 的中点的对称性. 集合 $\{\cos 2nx\}, n=0,1,\cdots$ 提供了 $f(x)$ 的 Fourier 展开合适的基函数, 由于满足对称性和周期性, 而且有

$$\cos 2n\left[\frac{\pi}{2}\pm\delta\right]=\cos n\pi\cos 2n\delta.$$

如果

$$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos 2nx$$

则规定式

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^3 xdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x\right]dx=\frac{8}{3\pi}$$

和

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x\right]\cos 2nxdx\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{3}{4}[\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x]\right.\\&\qquad\left.-\frac{1}{4}[\sin(2n+3)x-\sin(2n-3)x]\right]dx\\&=\frac{24}{\pi(4n^2-1)(4n^2-9)},\quad n=1,2,\cdots\end{aligned}$$

得出, 连同结果

$$|\sin^3 x|\sim\frac{4}{3\pi}+\frac{24}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{\pi(4n^2-1)(4n^2-9)},\quad 0<x<\pi.\tag{33.13}$$

为了理解为什么具有对大的 n 的阶为 $1/n^4$ 的系数的级数是快速收敛的级数, 注意其中和函数在 $0<x<\pi$ 所表示的关系式,

$$\begin{aligned}&f(x)=|\sin^3 x|=\sin^3 x,\quad f(0)=f(\pi)=0,\\&\frac{df}{dx}=3\sin^2 x\cos,\quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\pi}=0,\\&\frac{d^2f}{dx^2}=6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x,\quad \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=0}=\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=\pi}=0\end{aligned}$$

和

$$\frac{d^3f}{dx^3} = 6\cos^3 x - 21\sin^2 x\cos x, \quad \left.\frac{d^3f}{dx^3}\right|_{x=0} = 6, \quad \left.\frac{d^3f}{dx^3}\right|_{x=\pi} = -6.$$

这样 $f(x)$ 从 $0 < x < \pi$ 的 π 周期扩张表示一个二次连续可微的整体函数, 带有三阶导数在 $x = 0,\pi$ (和同余点) 的跳跃不连续点, 由于

$$\left.\frac{d^3f}{dx^3}\right|_{x=0} - \left.\frac{d^3f}{dx^3}\right|_{x=\pi} = 12.$$

在现在的例子中, Parseval 等式即

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f^2(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^6 x dx = \frac{5}{16} &= \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty a_n^2 \\ &= \frac{16}{9\pi^2} + \frac{(24)^2}{2\pi^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(4n^2-1)^2(4n^2-9)^2}\end{aligned}$$

提供对 π^2 的一个表示式, 即

$$\pi^2 = \frac{256}{45} + \frac{4608}{5}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(4n^2-1)^2(4n^2-9)^2} \tag{33.14}$$

和界

$$\left|\frac{4608}{5}\frac{1}{(4n^2-1)^2(4n^2-9)^2}\right| < \frac{18}{5n^8}, \quad n \gg 1,$$

界指出了只保留该级数前 $N-1$ 项所提交的误差的量小于

$$\epsilon = \sum_N^\infty \frac{18}{5n^8}dn \approx \int_N^\infty \frac{18}{5x^8}dx = \frac{18}{35N^7}.$$

例如, 如 $N = 10$ 和 $\epsilon = 0.5(10)^{-7}$, 用 (33.14) 正确地预计 π^2 的值到 7 位小数.

例 3: 考虑偶的 2π 周期函数

$$f(x) = \frac{1}{a+\cos x}, \quad |a| > 1,$$

其 Fourier 系数是

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\cos nx dx = \frac{2(-1)^n}{(a^2-1)^{1/2}}[a-(a^2-1)^{1/2}]^n, \quad n = 1,2,\cdots\end{aligned}$$

记

$$\delta = a - (a^2-1)^{1/2} < 1$$

得出对所有 x 特征表示

$$a_n = \frac{2(-1)^n}{(a^2-1)^{1/2}} \exp\left[-n \ln \frac{1}{\delta}\right]$$

连同级数表示式

$$\frac{1}{a+\cos x} = \frac{1}{(a^2-1)^{1/2}} + \frac{2}{(a^2-1)^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left[-n \ln \frac{1}{\delta}\right] \cos nx \qquad (33.15)$$

成立. 这里当 n 增加时, Fourier 系数 a_n 递减, 比 n 的任意次幂的倒数更快, 这性状可归因于 $f(x)$ 及其所有导数都是一致连续的这一事实.

例 4: 给定函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \delta, \\ 0, & \delta < x < \pi, -\pi < x < -\delta, \end{cases} \qquad (33.16)$$

它有偶对称性, 在 $x = \pm\delta$ 有跳跃不连续点且在基本区间 $-\pi < x < \pi$ 的一部分上不为零. 其 Fourier 余弦级数的系数是

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} dx = \frac{2\delta}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} \cos nx dx = \frac{2}{n\pi} \sin n\delta, \quad n = 1, 2, \cdots$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{\delta}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\delta}{n} \cos nx \\ &= \frac{\delta}{\pi} + S(x, \delta), \quad -\pi < x < \pi, \end{aligned} \qquad (33.17)$$

其中

$$\begin{aligned} S(x, \delta) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(\delta - x) + \sin n(\delta + x)}{n} \\ &= S(-x, \delta). \end{aligned} \qquad (33.18)$$

(33.12) 中的 $2x$ 换成 x 后, 结果是

$$x = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \qquad 0 < x < 2\pi, \qquad (33.19)$$

因而

$$S(x, \delta) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\delta}{\pi}, & 0 < x < \delta, \\ -\dfrac{\delta}{\pi}, & \delta < x < \pi, \end{cases}$$

它有可能成为级数表示式 (33.17) 的一个检验. (33.19) 的另一应用给出结果

$$S(\delta,\delta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\delta}{n}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi-2\delta}{2}\right]=\frac{1}{2}-\frac{\delta}{\pi},$$

且因此该级数的和在不连续点 $x=\delta$ 有期望的值

$$\frac{1}{2}[f(\delta+0)+f(\delta-0)]=\frac{1}{2}.$$

级数 (33.17) 是收敛的, 即使在包含关联函数的跳跃不连续点的区间上不一致连续; 其系数

$$\frac{\sin n\delta}{n}$$

小于或等于 $1/n$, 也依赖于参数 δ,δ 是度量 (33.16) 中规定的生成函数 $f(x)$ 的非零值的 x 的范围, 如果 $\delta\ll\pi$, 该函数仅在原点附近异于零, 且能推断出其基函数仅有孤立零点的对应 Fourier 级数将很慢地收敛, 即为了由此得出满意的估计需要极其多的项 $1\leqslant n\leqslant N$.

为了用不同的且更精确的方式作出上面的结论, 考虑用连续自变量 x 代替整数指标 n 的平方系数函数

$$F(x,\delta)=\left[\frac{\sin\delta x}{x}\right]^2,$$

其曲线图见图 48. 此函数在 $x=0$ 取到整体最大值, 即

$$F(0,\delta)=\delta^2,$$

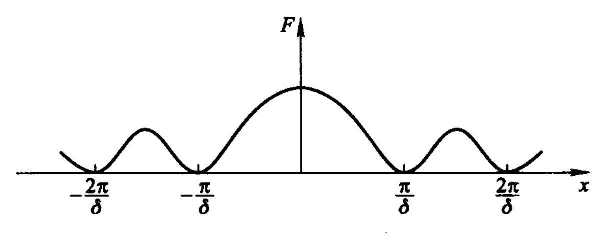


图 48

而当 x 按绝对值增大时, 它的第二个最大值显示稳定地减小. 在区间 $[-\pi/\delta,\pi/\delta]$ 上主要的凸出部分当 $\delta\ll 1$ 时有大的宽度, 这说明对具有离散系数的 Fourier 级数 (33.17) 的相当数量的贡献来自其指标位于

$$1\ll n\ll\left[\frac{1}{\delta}\right]$$

内的很多项, 这里 $\left[\frac{1}{\delta}\right]$ 表示数值上最接近于 $1/\delta$ 的整数.

例 5: 考虑用自然对数定义的偶函数

$$f(x) = -\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|, \qquad -\pi < x < \pi, \tag{33.20}$$

由于有关系式

$$\ln\left|2\sin\frac{x+2\pi}{2}\right| = \ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|,$$

其 2π 周期性是显然的. 与已讨论过的函数不同, 现在的函数在奇点

$$x = 2m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \cdots$$

变成无界 (见图 49), 虽然在每个有限区间它是可积的. Fourier 级数系数的显式确定证明是可行的; 首先, 注意

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx \\ &= -2\ln 2 - \frac{2}{\pi}I, \end{aligned}$$

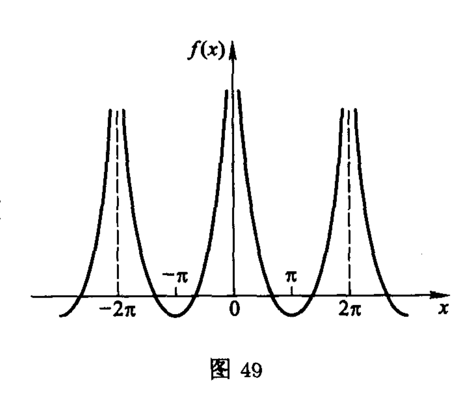


图 49

其中

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)dx = 2\int_0^{\pi/2}\ln(\sin\zeta)d\zeta \\ &= 2\int_0^{\pi/2}\ln\left(2\sin\frac{\zeta}{2}\cos\frac{\zeta}{2}\right)d\zeta \\ &= \pi\ln 2 + 2\int_0^{\pi/2}\ln\left(\sin\frac{\zeta}{2}\right)d\zeta + 2\int_{\pi/2}^{\pi}\ln\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)d\delta \\ &= \pi\ln 2 + 2I, \end{aligned}$$

所以

$$I = -\pi\ln 2,$$

因而

$$a_0 = 0.$$

其次, 分部积分后

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)\cos nx dx \\ &= -\frac{2}{\pi}\frac{\sin nx}{n}\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \sin nx\left[\frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right]dx; \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\sin x\ln x = 0,$$

由此得出

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x+\sin\left(n-\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}dx \\ &= \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi\left[\frac{1}{2}+\cos x+\cdots+\cos nx+\frac{1}{2}+\cos x+\cdots+\cos(n-1)x\right]dx \\ &= \frac{1}{n}, \qquad n=1,2,\cdots \end{aligned}$$

所以建立了级数表示式

$$-\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right| \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}, \qquad -\pi < x < \pi, \tag{33.21}$$

后者除了正弦函数为零的所有点, 即 $x = 2m\pi, m = 0, \pm 1, \cdots$ 以外的所有点处收敛.

例 6: 半径为 1/2 中心在正 x 轴上点 $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ 处的圆的二次方程为

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4},$$

当用平面极坐标 (r, ϑ) 时得到替代形式

$$r = \cos\vartheta, \quad -\pi/2 < \vartheta < \pi/2; \tag{33.22}$$

此圆和它对 y 轴的像 (见图 50) 合起来由 (32.22) 的一个扩张, 即

$$r = |\cos\vartheta|, \qquad -\pi < \vartheta < \pi \tag{33.23}$$

描述, 且相伴的几何类型是对极角 ϑ 具有 π 周期性状的. 此外对 ϑ 的偶对称性规定了函数 (33.23) 的 Fourier 余弦表示, 即

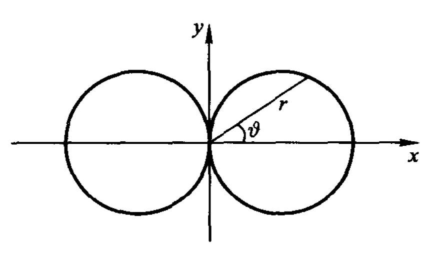


图 50

$$|\cos\vartheta| \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos 2n\vartheta,$$

这里

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos\vartheta|d\vartheta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta d\vartheta + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(-\cos\vartheta)d\vartheta \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta d\vartheta + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi, (\vartheta = \pi - \varphi) \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta d\vartheta = \frac{4}{\pi}, \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos\vartheta|\cos 2n\vartheta d\vartheta = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\cos 2n\vartheta d\vartheta \\
&= \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}, \quad n = 1, 2, \cdots
\end{aligned}
$$

所以

$$
|\cos\vartheta| \sim \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2n\vartheta, \quad -\pi < x < \pi \tag{33.24}
$$

规定合适的 Fourier 级数, 由此, 选取特殊的 $\vartheta = 0, \pi/2$ 和 $\pi/4$ 代入其中后, 推演出数值和

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \frac{\pi-2}{4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{16n^2-1} = \frac{\pi-2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}.
$$

例 7: 考虑周期函数

$$
f(x+2a) = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{33.25}
$$

它的图形由半圆弧构成 (见图 51); 如果 a 表示公共半径, 则

$$
f(x) = \sqrt{2ax - x^2} = \sqrt{a^2 - (a-x)^2}, \quad 0 < x < 2a. \tag{33.26}
$$

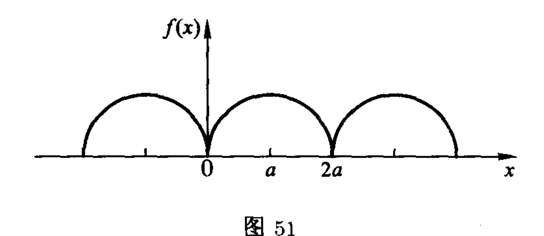


图 51

由 (33.25),(33.26) 定义的整体函数保持偶函数的性质, Fourier 余弦级数是合适的, 即

$$
f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{a},
$$

且其第一个系数证明是

$$a_0 = \frac{1}{a}\int_0^{2a} f(x)dx = \frac{1}{a}\int_0^{2a} \sqrt{a^2-(a-x)^2}dx = a\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\zeta^2}d\zeta$$
$$= 2\int_0^{\pi/2}\cos^2\vartheta d\vartheta = \frac{\pi}{2}a.$$

其余的系数,

$$a_n = \frac{1}{a}\int_0^{2a}\sqrt{a^2-(a-x)^2}\cos\frac{n\pi x}{a}dx = 2a(-1)^n\int_0^1\sqrt{1-\zeta^2}\cos n\pi\zeta d\zeta$$
$$= 2a(-1)^n\int_0^{\pi/2}\cos(n\pi\sin\vartheta)\cos^2\vartheta d\vartheta, \quad n = 1, 2, \cdots$$

能用零阶 Bessel 函数即齐次常微分方程

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} + 1\right] J_0(x) = 0 \tag{33.27}$$

带规范化 $J_0(0) = 1$ 的正则解来表示. 显然函数

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(x\sin\vartheta)d\vartheta \tag{33.28}$$

在 $x = 0$ 取值 1, 此外由于

$$\frac{d}{dx}J_0(x) = \frac{-2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(x\sin\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(x\sin\vartheta)d\cos\vartheta$$
$$= -\frac{2x}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(x\sin\vartheta)\cos^2\vartheta d\vartheta, \tag{33.29}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}J_0(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(x\sin\vartheta)\sin^2\vartheta d\vartheta, \tag{33.30}$$

将 (33.28) – (33.30) 一起代入常微分方程 (33.27) 就得到相容的结果, 即

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}[-\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta + 1]\cos(x\sin\vartheta)d\vartheta = 0.$$

因此

$$a_n = \pi a(-1)^n\left[J_0(x) - \frac{d^2}{dx^2}J_0(x)\right]_{x=n\pi}$$
$$= \pi a(-1)^n\left[J_0(x) - \frac{1}{x}\frac{d}{dx}J_0(x) - J_0(x)\right]_{x=n\pi}$$
$$= a(-1)^n\frac{J_1(n\pi)}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

这里

$$J_1(x) = -\frac{d}{dx}J_0(x) \tag{33.31}$$

表示一阶 Bessel 函数, 即微分方程

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} + 1 - \frac{1}{x^2}\right] J_1(x) = 0$$

的满足 $J_1(0) = 0$ 的一个正则解.

把这些结果收集到一起就得到要找的 Fourier 展开式

$$f(x) \sim a\left[\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{J_1(n\pi)}{n}\cos\frac{n\pi x}{a}\right], \tag{33.32}$$

而且与和函数的整体连续性相适应的一致收敛性由渐近估计

$$J_1(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \qquad x \gg 1$$

和随之得出的界

$$\left|(-1)^n \frac{J_1(n\pi)}{n}\cos\frac{n\pi x}{a}\right| < \frac{A}{n^{3/2}}, \qquad n \gg 1$$

推导出. 在 (33.32) 中取 $x = 0$, 并考虑到 $f(0) = 0$, 一个包含 Bessel 函数的数值和变得显然, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{J_1(n\pi)}{n} = \frac{\pi}{4}. \tag{33.33}$$

例 8: 双纽线首先由著名的 Bernoulli 兄弟 (伯努利, Jakob I, 1654 — 1705, 伯努利, Johann, I, 1667 — 1748) 于 1694 年所描述, 它是一条闭曲线 (见图 52), 由四次代数方程

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad |x| \geqslant |y|$$

所描述, 在平面极坐标中得到一个较简单形式

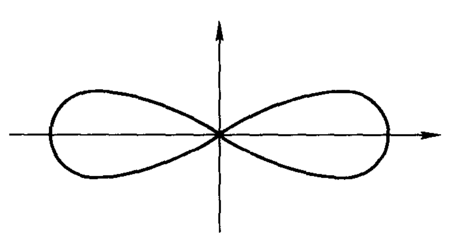


图 52

$$r^2 = a^2\cos 2\vartheta,$$

$$-\frac{\pi}{4} < \vartheta < \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4} < \vartheta < \pi, \quad -\frac{3\pi}{4} > \vartheta > -\pi.$$

令标量因子 $a = 1$, 且考虑无参数函数

$$r(\vartheta) = \sqrt{\cos 2\vartheta},$$

它有对 ϑ 的偶对称性和周期 π, 表明存在相关联的 Fourier 余弦级数表示式

$$r(\vartheta) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2n\vartheta.$$

系数表示式

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\vartheta)d\vartheta = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos 2\vartheta}d\vartheta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos\varphi}d\varphi,$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos\varphi}\cos n\varphi d\varphi, \quad n = 1, 2, \cdots$$

能借助于一般积分

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{\nu-1}\varphi \cos n\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^{\nu}\nu B\left(\dfrac{\nu+n+1}{2}, \dfrac{\nu-n+1}{2}\right)}, \quad \nu > 0 \qquad (33.34)$$

来简化, 这里

$$B(x, y) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\varphi \cos^{2y-1}\varphi d\varphi = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

表示分别称为 β 函数和 Γ 函数的 Euler 函数. 这样用到特殊值的计算结果

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

后得到

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos\varphi}\cos n\varphi d\varphi = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \frac{1}{B\left(\dfrac{5}{4}+\dfrac{n}{2}, \dfrac{5}{4}-\dfrac{n}{2}\right)}$$
$$= \frac{\pi^{3/2}}{4\sqrt{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{5}{4}+\dfrac{n}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{n}{2}\right)};$$

接着利用 Γ 函数的重排, 即

$$\Gamma\left(\frac{5}{4}-\frac{n}{2}\right) = \Gamma\left(1-\frac{2n-1}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\dfrac{2n-1}{4}\pi\right)} \frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{2n-1}{4}\right)}$$

和

$$\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{n}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{2n+1}{4}\right) = \frac{2n+1}{4}\Gamma\left(\frac{2n+1}{4}\right),$$

得到 (33.34) 的不同形式, 即

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos\varphi}\cos n\varphi d\varphi=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{2n-1}{4}\pi\right)}{2n+1}\frac{\Gamma\left(\frac{2n-1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{4}\right)},$$

且因此 Fourier 级数表示为

$$\sqrt{\cos 2\vartheta}\sim 4\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{2n-1}{4}\right)\pi}{2n+1}\frac{\Gamma\left(\frac{2n-1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{4}\right)}\cos 2n\vartheta,$$

$$-\pi<\vartheta<\pi. \tag{33.35}$$

(33.35) 中的 Γ 函数之比的近似估计

$$\frac{\Gamma\left(\frac{2n-1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{4}\right)}\sim\sqrt{\frac{2}{n}},\qquad n\gg 1$$

导致对该级数最后诸项的一个界 $An^{-3/2}, n\gg 1$, 由此推断出处处一致收敛性; 与此对比, 其微分后的级数在 $\vartheta=\pm\pi/4, \pm 3\pi/4$ 发散.

例 9: 考虑包含参数 ζ 具有周期 2π 的函数

$$f(x)=\cosh\zeta x,\quad 0<x<\pi.$$

按 Fourier 正弦级数的展开; 遵循 $f(x)$ 到 $-\pi<x<0$ 中的奇扩张, 表示式

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

的合适系数由

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cosh\zeta x\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(n+i\zeta)x+\sin(n-i\zeta)]dx\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos(n+i\zeta)\pi}{n+i\zeta}+\frac{1-\cos(n-i\zeta)\pi}{n-i\zeta}\right]\\&=\frac{2}{\pi}[1-(-1)^n\cosh\pi\zeta]\frac{n}{n^2+\zeta^2}\end{aligned}$$

给出. 因此所求级数有形式

$$\cosh\zeta x\sim\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n\cosh\pi\zeta]}{n^2+\zeta^2}n\sin nx,\quad 0<x<\pi. \tag{33.36}$$

在 (33.36) 中令 $x=\pi/2$ 则得到一个双曲余弦函数倒数的展开式, 即

$$\frac{1}{\cosh\dfrac{\pi\zeta}{2}}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)^2+\zeta^2},\tag{33.37}$$

其中此级数中的每一个奇点 $\zeta=\pm(2n+1)i$ 与前面级数的零点相联系. 由于

$$\frac{1}{\cosh\zeta}=\frac{2e^{-\zeta}}{1+e^{-2\zeta}}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-(2n+1)\zeta},\quad \zeta>0$$

因而

$$\frac{\cos x\zeta}{\cosh\zeta}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-(2n+1)\zeta}\cos x\zeta,$$

对 ζ 在 0 与 ∞ 之间积分, 考虑到结果

$$\int_0^{\infty}\cos\alpha x e^{-\beta x}dx=\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2},\quad \beta>0$$

和 (33.37), 得到一个定积分的计算结果, 即

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x\zeta}{\cosh\zeta}d\zeta=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cosh\dfrac{\pi x}{2}}.\tag{33.38}$$

例 10: 能实现周期运动的一个机械装置如图 53 所示; 包括一个驱动装置 D 和一个长度 L 的刚性连杆, 其端点 P_1,P_2 分别受约束位于一直线和圆周 C 上. 当点 P_2 绕半径 $R(<L)$ 的圆以常角速度 ω 运动时, 驱动装置的线性位移 $X(t)$ 经历按时间的周期变化. 如果角 $\vartheta(=\omega t)$ 和 φ 用来确定任何瞬时构形, 关系式

$$X=R[1-\cos\vartheta]+L[1-\cos\varphi]$$

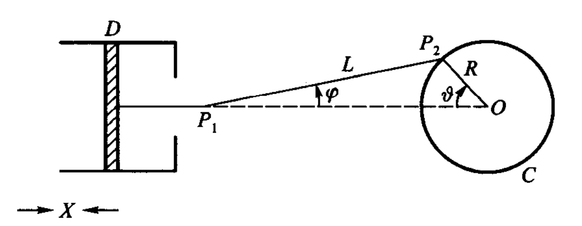


图 53

和

$$\delta=\frac{R}{L}=\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}$$

适用. 这样

$$X(\vartheta) = R[1-\cos\vartheta] + L\left[1-\sqrt{1-\delta^2\sin^2\vartheta}\right] \tag{33.39}$$

表示 ϑ 的 2π 周期函数, 关于直线 P_1O (或 $\vartheta=\pi$) 对称, 它可用 Fourier 余弦级数表示,

$$X(\vartheta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\vartheta \tag{33.40}$$

详细说明上式的实质性工作集中在构造一个表示式, 即

$$\sqrt{1-\delta^2\sin^2\vartheta} \sim \frac{1}{2}\bar{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\bar{a}_n\cos n\vartheta,$$

其中

$$\bar{a}_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\delta^2\sin^2\vartheta}d\vartheta = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\delta^2\sin^2\vartheta}d\vartheta \tag{33.41}$$

(所谓的完全椭圆积分) 和

$$\begin{aligned}\bar{a}_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\delta^2\sin^2\vartheta}\cos n\vartheta d\vartheta \\ &= \frac{2}{\pi}[1+(-1)^n]\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\delta^2\sin^2\vartheta}\cos n\vartheta d\vartheta,\end{aligned}$$

所以

$$\bar{a}_n = 0, \quad n=1,3,\cdots$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_{2n} &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\delta^2\sin^2\vartheta}\cos 2n\vartheta d\vartheta = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\delta^2\sin^2\vartheta}d\frac{\sin 2n\vartheta}{2n} \\ &= \frac{1}{n\pi}\delta^2\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2n\vartheta\sin 2\vartheta}{\sqrt{1-\delta^2\sin^2\vartheta}}d\vartheta \\ &= \frac{\delta^2}{2n\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos 2(n-1)\vartheta - \cos 2(n+1)\vartheta}{\sqrt{1-\delta^2\sin^2\vartheta}}d\vartheta, \quad n=1,2,\cdots\end{aligned} \tag{33.42}$$

这样时变位移函数 $X(t)$ 有基本频率为 ω 的谐波的直接展开式

$$X(t) = R + L\left[1-\frac{1}{2}\bar{a}_0\right] - R\cos\omega t - L\sum_{n=1}^{\infty}\bar{a}_{2n}\cos 2n\omega t \tag{33.43}$$

且描述速度 $\dfrac{dX}{dt}$ 和加速度 $\dfrac{d^2X}{dt^2}$ 的类似展开式从 (33.43) 的微分得出.

得到 (33.43) 的显式表示的和式证明是可行的, 因为相关的表示式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\vartheta\cos 2n\omega t}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n(\vartheta-\omega t)+\sin 2n(\vartheta+\omega t)}{n}$$

可以参照第三十二章问题 10 中的一个结果, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-(x-2m\pi)}{2},\qquad 2m\pi<x<2(m+1)\pi$$

来计算.

利用展开式

$$\sqrt{1-\delta^2\sin^2\vartheta}=1-\frac{1}{2}\delta^2\sin^2\vartheta-\frac{1}{8}\delta^4\sin^4\vartheta-\cdots$$

得出

$$X(t)=R[1-\cos\omega t]+\frac{1}{2}L\delta^2\sin^2\omega t+\frac{1}{8}L\delta^4\sin^4\omega t+\cdots,$$

而且重排这些正弦幂为具有不同的谐波自变量的余弦的线性组合后, 当对 $\bar{a}_0$ 和 $\bar{a}_{2n}$ 用 δ 的幂的展开式被引入时, 它与 (33.43) 有完全的相容性.

例 11: 考虑同样大小的细圆形电线的无限阵列, 它们是间隔相等地沿垂直于其各平面的一直线 (作为 x 轴) 放置 (见图 54); 且每个电线中有共同的定常电流 I 环流. 如果其中之一位于平面 $x=0$ 处, 从而产生的沿 x 轴的磁场强度 $H(x)$ 对 x 有偶对称性且有周期等于相邻电线间的间隔 L; 这样表示出一个 Fourier 展开式,

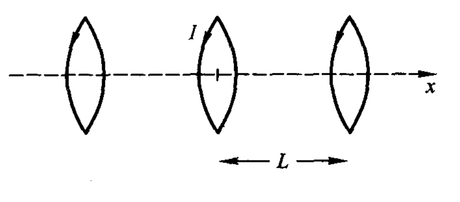


图 54

$$H(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2n\pi x}{L},\qquad -\infty<x<\infty.\tag{33.44}$$

由各电线的贡献相加而得到 $H(x)$ 的确定表示式, 即:

$$H(x)=AIR^2\sum_{m=-\infty}^{\infty}[(x-mL)^2+R^2]^{-3/2},\tag{33.45}$$

这里 A 表示由所选的电单位制而变得确切的一个常数, 而 R 表示共同的线圈半径. (33.45) 式有可能决定 (33.44) 中的系数 a_0, a_n. 这样

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{L}\int_0^L H(x)dx = \frac{2A}{L}IR^2\int_0^L \sum_{m=-\infty}^{\infty}[(x-mL)^2+R^2]^{-3/2}dx \\
&= \frac{2}{L}AIR^2\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-mL}^{L-mL}[\zeta^2+R^2]^{-3/2}d\zeta, \qquad (x-mL=\zeta) \\
&= \frac{2}{L}AIR^2\Bigg[\cdots\underset{(m=2)}{\int_{-2L}^{-L}}+\underset{(m=1)}{\int_{-L}^{0}}+\underset{(m=0)}{\int_{0}^{L}}+\underset{(m=-1)}{\int_{L}^{2L}} \\
&\qquad +\underset{(m=-2)}{\int_{2L}^{3L}}+\cdots\Bigg]\frac{d\zeta}{(\zeta^2+R^2)^{3/2}} \\
&= \frac{2}{L}AIR^2\int_{-\infty}^{\infty}[\zeta^2+R^2]^{-3/2}d\zeta = \frac{4}{L}AI,
\end{aligned}$$

且类似地

$$a_n = \frac{2}{L}AIR^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left(\dfrac{2m\pi\zeta}{L}\right)}{(\zeta^2+R^2)^{3/2}}d\zeta, \quad n=1,2,\cdots. \tag{33.46}$$

级数 (33.44) 中的常数项表示具有每单位长度电流等于 I/L 的均匀缠绕螺线管内的轴向磁场强度的量 $H_0 = \frac{2}{L}AI$, 而其他项表示在每一周期区间 L 上 $H(x)$ 中离平均值 H_0 的偏差. 定义该级数的非常数项的系数的积分 (33.46) 的计算可以做到, 要涉及一个 Bessel 型函数; 这里仅仅记录估计

$$H(x) \sim H_0\left[1+2\pi\sqrt{\frac{R}{L}}e^{-2\pi R/L}\cos\frac{2\pi x}{L}+\cdots\right], \quad \frac{R}{L} \gg 1,$$

就足够了, 它适用于电线间隔很近的情形, 注意由于生成函数 $H(x)$ 有所有各阶导数, Fourier 级数 (33.44) 收敛极快.

例12: 一致收敛级数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2} \tag{33.47}$$

不能直接求和或用已知函数显式表示, 与其相对应部分

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4}-\frac{\pi|x|}{2}+\frac{\pi^2}{6}, \qquad -\pi < x < \pi$$

则不同, 这一情形促进了人们去构造精确的解析逼近. 以前 (例 5) 曾指出从 (33.47) 用逐项微分得到的级数有一个可确定的和, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\ln\left(2\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right). \tag{33.48}$$

在 $\sin\frac{x}{2}>0$ 的区间 $0<x<\pi$ 上, 在 (33.48) 中在满足 $0<\delta<x<\pi$ 的 δ 和 x 之间积分, 其结果给出

$$-\int_{\delta}^{x}\ln\left(2\sin\frac{x'}{2}\right)dx'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\delta}{n^2},$$

而且由于包含 δ 的级数在取极限 $\delta\to 0$ 时也趋于零, 就得出 $S(x)$ 的一个积分表示式, 即

$$S(x)=-x\ln 2-\int_{0}^{x}\ln\left(\sin\frac{x'}{2}\right)dx',\qquad 0\leqslant x\leqslant\pi. \tag{33.49}$$

上式表示 $S(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 连续, 且期望的值 $S(0)=0$ 和

$$\begin{aligned}S(\pi)&=-\pi\ln 2-\int_{0}^{\pi}\ln\left(\sin\frac{x'}{2}\right)dx'\\&=-\pi\ln 2-2\int_{0}^{\pi/2}\ln(\sin\zeta)d\zeta=0\end{aligned}$$

(回顾例 5 中的发现) 确实被证实.

由于

$$S'(x)=\frac{dS}{dx}=-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right),\quad 0<x<\pi$$

特殊的 x 处的确定值为

$$S'(0)=+\infty,\quad S'(\pi)=-\ln 2,\quad S'(\pi/3)=0,$$

这蕴含着

$$S'(x)\begin{cases}>0, & 0<x<\pi/3,\\<0, & \pi/3<x<\pi.\end{cases}$$

总结一下, 函数 $S(x)$ 在原点有无穷斜率, 在 $x=\pi/3$ 达到其最大值然后递减到 $x=\pi$ 处为零, 而在整个区间 $0<x<\pi$ 保持正值.

在 (33.49) 中分部积分得出

$$S(x)=-x\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)+T(x), \tag{33.50}$$

其中

$$T(x)=-x\ln 2+\frac{1}{2}\int_{0}^{x}\sigma\cot\frac{\sigma}{2}d\sigma. \tag{33.51}$$

由于

$$\frac{dT}{dx} = -\ln 2 + \frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}$$

在 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 保持有界和连续, 正是 (33.50) 中的第一项导致 $S(x)$ 在 $x=0$ 的非解析性 (或无穷斜率).

这样对 $T(x)$ 的一个近似也导致对 $S(x)$ 的近似, 且特别地用 Maclaurin, C. (麦克劳林, 1698—1746) 展式

$$\frac{\sigma}{2}\cot\frac{\sigma}{2} = 1 - \frac{\sigma^2}{12} - \frac{\sigma^4}{720} - \cdots$$

通过 (33.51) 推导出

$$T(x) = -x\ln 2 + x - \frac{x^3}{36} - \frac{x^5}{3600} - \cdots$$

且对应的展开式

$$S(x) = -x\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right) + x - \frac{x^3}{36} - \frac{x^5}{3600} - \cdots$$

在 $x=0$ 附近是合适的.

对 $S(x)$ 的更精细的近似曾被比利时数学家 Grosjean (格罗斯琴) 于 1966 年得到, 他提出一个式子

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2} = -x\ln\left(\sin\frac{|x|}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi,$$

这里带有系数 b_n 的 Fourier 正弦级数比 $S(x)$ 原来的级数收敛更快. 他提供以下的详细式子作为首次一致近似式

$$\begin{aligned} S(x) \simeq & -x\ln\left(\sin\frac{|x|}{2}\right) + \frac{x(\pi^2 - x^2)}{24} \\ & -\left(\frac{3}{2} - 2\ln 2\right)\sin x + \left(\ln 2 - \frac{11}{16}\right)\sin 2x, \end{aligned} \tag{33.52}$$

它与精确值的百分偏差小于 0.63%!

例 13: 考虑由方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \tag{33.53}$$

$$-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = f(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad 0 < x < L$$

所规定的线性扩散方程的边/初值问题, 其中规定的流量函数 $f(t)$ 有周期性状, 即

$$f(t + 2\tau) = f(t), \quad t > 0. \tag{33.54}$$

采用对 $u(x,t)$ 的一个展开式, 它包含其 x 导数在 $x=0,L$ 为零的有关正交本征函数

$$X_0=\frac{1}{2},\quad X_n=\cos\frac{n\pi x}{L},\quad n=1,2,\cdots$$

即

$$u(x,t)=\frac{1}{2}T_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos\frac{n\pi x}{L},\tag{33.55}$$

发现

$$T_0(t)=\frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)dx$$

满足常微分方程

$$\frac{d}{dt}T_0=\frac{2k}{L}f(t),\quad t>0,\tag{33.56}$$

且

$$T_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\quad n=1,2,\cdots$$

满足常微分方程

$$\frac{d}{dt}T_n+k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2T_n=\frac{2k}{L}f(t),\quad t>0;\tag{33.57}$$

(33.53) 中的偏微分方程和边界条件都已被上面对 $T_0(t),T_n(t),n=1,2,\cdots$ 的以上方程考虑到, 且剩下的初始条件要求

$$T_0(0)=0,\quad T_n(0)=0,\quad n=1,2,\cdots\tag{33.58}$$

为得到 (33.56),(33.57),(33.58) 所希望的积分, $f(t)$ 的一个 Fourier 级数表示式证明是合适的; 为此, 给出复形式

$$f(t)\sim\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m e^{im\pi t/\tau}\tag{33.59}$$

连同系数的特征表示

$$c_m=\frac{1}{\tau}\int_0^{2\tau}f(t')e^{-im\pi t'/\tau}dt',\quad m=0,\pm1,\cdots\tag{33.60}$$

然后得到

$$\begin{aligned}T_0(t)&=\frac{2k}{L}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m\frac{\tau}{im\pi}[e^{im\pi t/\tau}-1]\\&=\frac{2k}{L}c_0t+\frac{2k\tau}{L\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{c_me^{im\pi t/\tau}-c_{-m}e^{-im\pi t/\tau}}{m}-\frac{c_m-c_{-m}}{m}\right]\\&=\frac{2k}{L}c_0t+\frac{4k\tau}{L\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{m}\int_0^{2\tau}f(t')\sin\frac{m\pi(t-t')}{\tau}dt'\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{m}\int_0^{2\tau}f(t')\sin\frac{m\pi t'}{\tau}dt'\right].\end{aligned}\tag{33.61}$$

类似地,

$$T_n(t) = \frac{2k}{L} e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \left[\frac{e^{k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t + i\frac{m\pi t}{\tau}} - 1}{k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + i\frac{m\pi}{\tau}} \right]$$

$$= \frac{2L}{(n\pi)^2} c_0 [1 - e^{-k(n\pi/L)^2 t}] + \frac{4k}{L\tau} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}{k^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + \left(\frac{m\pi}{\tau}\right)^2}$$
$$\left[\int_0^{2\tau} f(t') \cos\frac{m\pi}{\tau}(t-t')dt' - e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \int_0^{2\tau} f(t') \cos\frac{m\pi t'}{\tau} dt'\right] \quad (33.62)$$
$$+ \frac{4k}{L\tau} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{m\pi}{\tau}}{k^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + \left(\frac{m\pi}{\tau}\right)^2} \left[\int_0^{2\tau} f(t') \sin\frac{m\pi}{\tau}(t-t')dt'\right.$$
$$\left. + e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \int_0^{2\tau} f(t') \sin\frac{m\pi t'}{\tau} dt'\right].$$

由于

$$u(x,t) \sim \frac{k}{L} c_0 t, \quad t \to \infty,$$

如果 $c_0 > 0$, 温度随时间的线性上升, 除非

$$c_0 = \frac{1}{\tau} \int_0^{2\tau} f(t)dt = 0,$$

即热流量在一个周期上的积分为零.

例 14: 给定函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(\pi - y), & 0 \leqslant x \leqslant y, \\ \frac{1}{2}y(\pi - x), & y \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases} \quad (33.63)$$

它关于一对自变量有对称依赖性; 当两个自变量之一置于次要地位作为参数, 其图形有两个相交于一顶点的线段, 在顶点处斜率是不连续的. 基于正弦函数 $\{\sin nx\}$ 的一个 Fourier 级数表示式为

$$f(x,y) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y) \sin nx,$$

包含系数是 y 的函数, 可以证明

$$b_n(y) = \frac{\sin ny}{n^2}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

因而

$$f(x,y) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ny}{n^2} \tag{33.64}$$

具有所需要的对称性. 对 x 在 $(0,\pi)$ 上积分这一致收敛级数给出

$$\int_0^{\pi} f(x,y)dx = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)y}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^2 y - \pi y^2}{4}, \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi.$$

一个余弦级数表示式为

$$f(x,y) \sim \frac{1}{2}a_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y)\cos nx,$$

其系数函数为

$$a_0(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^y x(\pi - y)dx + \frac{1}{\pi}\int_y^{\pi} y(\pi - x)dx = \frac{\pi y - y^2}{2}$$

和

$$a_n(y) = \frac{1}{n^2}\cos ny - \frac{1}{n^2} + \frac{y}{\pi n^2}[1-(-1)^n];$$

所以

$$\begin{aligned} f(x,y) &\sim \frac{\pi y - y^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} + \frac{y}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-1)^n]\frac{\cos nx}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx \cos ny}{n^2} \\ &= \frac{\pi y - y^2}{4} - \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} + \frac{2y}{\pi}\frac{\pi^2 - 2\pi x}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx \cos ny}{n^2} \\ &= \frac{\pi}{2}(x+y) - \frac{1}{4}(x^2+y^2) - \frac{xy}{2} - \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx \cos ny}{n^2}, \\ &\qquad 0 \leqslant x, y \leqslant \pi. \end{aligned} \tag{33.65}$$

习 题 33

1. 把函数

$$f(x) = e^x, \quad -\pi < x < \pi$$

展开成 Fourier 级数, 且考虑到在 $x = \pi$ 处级数的和已知, 证明以下数值结果

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi}{2}\left(\coth\pi - \frac{1}{\pi}\right).$$

2. 构造刻画函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant \pi\end{cases}$$

的 Fourier 级数, 然后推演出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}=\frac{1}{3}.$$

3. 如果 $f(x)$ 定义在区间 $(0,\pi/2)$ 上且按照关系式

$$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

延拓到区间 $(\pi/2,\pi)$, 证明形如

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cos(2n+1)x,\quad 0<x<\pi$$

的级数表示式适用; 导出确定系数 c_n 的表示式.

4. 验证关系式

$$|\sin x|\sim\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1},$$

再证明

$$|\sin x|\sim\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{4n^2-1}.$$

5. 检验 Fourier 展开式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}=\frac{\pi^2x}{6}-\frac{\pi x^2}{4}+\frac{x^3}{12},\quad 0<x<2\pi$$

的正确性. 在区间 $-4\pi<x<4\pi$ 上作上面的级数所刻画的函数的草图, 当 $4\pi<x<6\pi$ 时确定其显式解析式. 数值级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

的和是什么?

6. 给定有限的连续的 2π 周期函数

$$f(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp[-|x+2m\pi|],$$

验证其复 Fourier 级数表示式

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

中的系数表示式为

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|-inx}dx.$$

决定 c_n 且证明关系式

$$\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

成立 (与例 1 中的式子作比较).

7. 证明由

$$f(x,\delta) = \begin{cases} \cos^2(\pi x/2\delta), & -\delta < x < \delta, \\ 0, & \delta < x < \pi - \delta \end{cases}$$

和

$$f(x+\pi) = f(x)$$

定义的函数有 Fourier 级数

$$f(x,\delta) \sim \frac{\delta}{\pi} - 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\delta}{2n(4n^2\delta^2-\pi^2)}\cos 2nx,$$

它的确描述此生成函数的特殊形式, 即

$$f\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 x.$$

8. 给定区间 $-\pi < x < \pi$ 上的三个 (线性) 无关函数

$$f_1(x) = -\ln|x|, \quad f_2(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad f_3(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2,$$

就它们的 Fourier 级数 (不必显式地找出) 的收敛速度的快慢等级给出论证.

9. 假设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内除了有限的 N 个点 $x_1 < x_2 < \cdots < x_k < \cdots < x_N$ 外是连续且可微的 $\left(f'(x) = \dfrac{df}{dx}\right)$, 且设

$$\delta_k = f(x_k+0) - f(x_k-0) \tag{i}$$

表示在这些奇点的跳跃不连续性. 为得到在这些情形积分公式的修正, 注意适用于其相邻奇点间的导数的积分的结果

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)dx = f(x_{k+1}-0) - f(x_k+0), \tag{ii}$$

和对所有这些区间求和的结果

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = f(\pi) - f(-\pi) - \sum_{k=1}^{N} \delta_k. \tag{iii}$$

如果 $g(x)$ 表示在整个区间 $(-\pi, \pi)$ 上连续且可微的一个函数, 则有

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)g(x)dx = f(x_{k+1}-0)g(x_{k+1}) - f(x_k+0)g(x_k) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)g'(x)dx \tag{iv}$$

和

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)g(x)dx = f(\pi)g(\pi) - f(-\pi)g(-\pi) - \sum_{k=1}^{N} \delta_k g(x_k) - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g'(x)dx \tag{v}$$

这里最后的等式推广了通常的分部积分公式.

为应用上述结果, 设

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx] \quad 和 \quad \frac{1}{2}a_0^* + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n^* \cos nx + b_n^* \sin nx]$$

分别表示与函数 $f(x)$ 及其导数 $f'(x)$ 相联系的三角级数; 且考虑

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

和

$$a_n^* = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx,$$
$$b_n^* = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx$$

之间的联系. 显然

$$a_0^* = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[f(\pi) - f(-\pi) - \sum_{k=1}^{N}\delta_k\right] \tag{vi}$$

而

$$\begin{aligned} a_n^* &= \frac{1}{\pi}\left[[f(\pi) - f(-\pi)]\cos n\pi - \sum_{k=1}^{N}\delta_k \cos nx_k + n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[(-1)^n[f(\pi) - f(-\pi)] - \sum_{k=1}^{N}\delta_k \cos nx_k\right] + nb_n \end{aligned} \tag{vii}$$

和

$$b_n^* = -\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\delta_k \sin nx_k - na_n, \tag{viii}$$

在连续的以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 且满足 $f(\pi) = f(-\pi)$ 和对所有 $k, \delta_k = 0$ 的情形, 一般公式 (vi), (vii), (viii) 简化成

$$a_0^* = 0, \quad a_n^* = nb_n, \quad b_n^* = -na_n, \tag{ix}$$

所以 $f'(x)$ 的 Fourier 级数由 $f(x)$ 的 Fourier 级数通过逐项微分得出.

(a) 考虑特殊规定

$$f(x) = \begin{cases} -A, & -\pi < x < 0, \\ +A, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

和

$$f'(x) = 0, \quad x \neq 0,$$

随之得到的关系式

$$a_n^* = b_n^* = 0,$$

$$\delta_1 = 2A \quad 和 \quad f(\pi) - f(-\pi) = 2A.$$

应用 (vii), (viii) 去导出 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 即

$$f(x) \sim \frac{4A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

(b) 假设要求积分满足边界条件

$$y(0) = A, \quad y(\pi) = B. \tag{x}$$

的非齐次常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = F(x), \quad 0 < x < \pi. \tag{xi}$$

设

$$f(x) = \begin{cases} y(x), & 0 < x < \pi, \\ -y(-x), & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

类似地按奇方式扩张 $F(x)$ 到 $-\pi < x < 0$; 则规定关系式

$$\delta_1 = 2A \quad (\text{在 } x = 0)$$

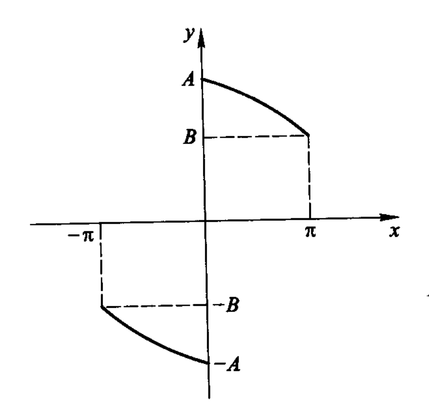
和

$$f(\pi) - f(-\pi) = 2B$$

适用 (见图). 由于 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f'(x), f''(x)$ 分别是偶和奇的, 推演出

$$a_n = 0, \quad b_n^* = 0,$$
$$a_n^{**} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx dx = 0.$$

其次引入展开式



$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx$$

检验以下等式

$$b_n^{**} + \lambda b_n = c_n,$$
$$a_n^* = \frac{2}{\pi}(-1)^n B - \frac{2}{\pi}A + nb_n,$$
$$b_n^{**} = -na_n^*,$$

其中

$$b_n^{**} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\sin nx dx;$$

决定 b_n 和随之得到描述 (x), (xi) 中要找的函数 $y(x)$ 的 Fourier 正弦级数.

10. 假设

$$x_k, x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \cdots, x_k^{(j)}$$

是 $f(x), f'(x), f''(x), \cdots, f^{(j)}(x)$ 在区间 $0 < x < 2\pi$ 中的奇点, 而

$$\delta_k^{(j)} = f^{(j)}(x_k^{(j)}+0) - f^{(j)}(x_k^{(j)}-0), \quad j = 0, 1, 2, \cdots$$

是对应的不连续性测度, 验证 Fourier 系数表示式

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \\
&= -\frac{1}{n}\sum_k \delta_k \sin nx_k - \frac{1}{n^2}\sum_{k^{(1)}} \delta_k^{(1)} \cos nx_k^{(1)} \\
&\quad + \frac{1}{n^3}\sum_{k^{(2)}} \delta_k^{(2)} \sin nx_k^{(2)} + \frac{1}{n^4}\sum_{k^{(3)}} \delta_k^{(3)} \cos nx_k^{(3)} - \cdots \\
&\quad \pm \frac{1}{n^{j+1}}\sum_{k^{(j)}} \delta_k^{(j)} \begin{Bmatrix} \sin nx_k^{(j)} \\ \cos nx_k^{(j)} \end{Bmatrix} \pm \frac{1}{n^{j+1}}\int_0^{2\pi} f^{(j+1)}(x) \begin{Bmatrix} \sin nx \\ \cos nx \end{Bmatrix} dx, \\
b_n &= \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \\
&= \frac{1}{n}\sum_k \delta_k \cos nx_k - \frac{1}{n^2}\sum_{k^{(1)}} \delta_k^{(1)} \sin nx_k^{(1)} \\
&\quad - \frac{1}{n^3}\sum_{k^{(2)}} \delta_k^{(2)} \cos nx_k^{(2)} + \frac{1}{n^4}\sum_{k^{(3)}} \delta_k^{(3)} \sin nx_k^{(3)} + \cdots \\
&\quad \pm \frac{1}{n^{j+1}}\sum_{k^{(j)}} \delta_k^{(j)} \begin{Bmatrix} \cos nx_k^{(j)} \\ \sin nx_k^{(j)} \end{Bmatrix} \pm \frac{1}{n^{j+1}}\int_0^{2\pi} f^{(j+1)}(x) \begin{Bmatrix} \cos nx \\ \sin nx \end{Bmatrix} dx.
\end{aligned}$$

考虑一个特定的 2π 周期函数, 它由缩短的正弦弧构成, 即

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < x_1, \\ \sin x, & x_1 < x < x_2, \\ 0, & x_2 < x < 2\pi, \end{cases}$$

证实余弦系数展开式

$$\begin{aligned}
a_n = &-\frac{1}{\pi}[\sin x_1 \sin nx_1 - \sin x_2 \sin nx_2]\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^5} + \cdots\right] \\
&-\frac{1}{\pi}[\cos x_1 \cos nx_1 - \cos x_2 \cos nx_2]\left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6} + \cdots\right]
\end{aligned}$$

成立. 这里两个分别的级数当 $n > 1$ 时是收敛的, 且能求和, 并给出显式结果

$$\begin{aligned} a_n = & -\frac{1}{\pi}[\sin x_1 \sin nx_1 - \sin x_2 \sin nx_2]\frac{n}{n^2-1} \\ & -\frac{1}{\pi}[\cos x_1 \cos nx_1 - \cos x_2 \cos nx_2]\frac{n}{n^2-1}, n \neq 1. \end{aligned} \tag{i}$$

从 (i) 求出 a_0 和 a_1 (用极限过程) 且用通过原积分表示它们的独立确定式来检验.

11. 描绘由 Fourier 余弦级数

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2}$$

刻画的函数的图形, 这里

$$a_0 = \int_0^1 x dx \qquad a_n = \int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx, \quad n = 1, 2, \cdots$$

该级数在 $x = 1$ 的和是什么? 该级数是否一致收敛?

12. 考虑由在正方形的四条边上的外半圆弧构成的闭曲线, 证明在以此正方形中心为极点的极坐标中, 此曲线的方程 $r = r(\vartheta)$ 有 Fourier 级数展开式

$$\frac{\pi r}{4a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{15}\cos 4\vartheta - \frac{1}{63}\cos 8\vartheta + \frac{1}{143}\cos 12\vartheta + \cdots, \tag{*}$$

这里 a 表示该正方形边长. 从 (*) 和分别地已知的该曲线的周长能得出什么推论?

13. 给出对受外力 $f(x,t)$ 作用的均匀杆的横向位移 $y(x,t)$ 的偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{i}$$

和齐次边初值条件

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=L} = 0, \quad t > 0 \tag{ii}$$

和

$$u(x,0) = 0, \quad \left.\frac{\partial}{\partial t}u\right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < L.$$

证明方程组 (i), (ii) 的本征函数是

$$\sin\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

采用解的级数形式

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L},\quad 0<x<L,\quad t>0,\tag{iii}$$

当外力有周期时间依赖性时，即

$$f(t+\tau)=f(t),\quad \tau>0,$$

描述确定函数 $T_n(t)$ 的方式.

14. 考虑按变量 x 有周期 2π 且带有任意参数 α 的复值函数

$$f(x,\alpha)=e^{i\alpha\sin x}=\cos(\alpha\sin x)+i\sin(\alpha\sin x)\tag{i}$$

采用相对于 x 的 Fourier 级数的复形式，即

$$f(x,\alpha)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n(\alpha)e^{inx},\tag{ii}$$

由此推导出

$$A_n(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(\alpha\sin x-nx)}dx.$$

此积分提供了整数 n 阶的 Bessel 函数的一个表示式，即

$$A_n(\alpha)=J_n(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(\alpha\sin x-nx)}dx,\tag{iii}$$

这里

$$\left[\frac{d^2}{d\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\alpha}+1-\frac{n^2}{\alpha^2}\right]J_n(\alpha)=0,\quad J_n(0)\text{有限}.\tag{iv}$$

在 $n=0$ 的特殊情形，(iii) 得出

$$\begin{aligned}J_0(\alpha)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\cos(\alpha\sin x)+i\sin(\alpha\sin x)]dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\alpha\sin x)dx,\end{aligned}\tag{v}$$

如将原积分区间 $0<x<2\pi$ 分成一对 $0<x<\pi,\pi<x<2\pi$ 且把变量替换 $x=\pi+\zeta$ 用到第二个积分后，即得到上面的结果. 另一个对区间 $0<x<\pi$ 的对称剖分且把变换 $x=\frac{\pi}{2}-\zeta$ 用到 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ 上导出一个以前给出过的结果 (式 (33.28))

$$J_0(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(\alpha\sin x)dx.$$

证明 (iii) 的替代形式包括

$$J_n(\alpha) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^\pi e^{i\alpha \cos x} \cos nx dx$$

和

$$J_n(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\alpha \sin x - nx) dx$$

带有一个从前者得到的容易的推论

$$J_{-n}(\alpha) = (-1)^n J_n(\alpha), \quad n \text{ 为整数},$$

它构成以下展开式

$$\begin{aligned} e^{i\alpha \sin x} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) e^{inx} \\ &= J_0(\alpha) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\alpha) \cos 2nx + 2i \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n+1}(\alpha) \sin(2n+1)x \end{aligned}$$

的基础.

很容易提供 Fourier 展开的进一步的例子, 因为它们出现在诸如行星轨道运动、光波经过晶体的衍射、周期磁场中带电粒子的运动等各种各样的研究和学科中.

第三十四章

Fourier 积分和 Fourier 变换

定义在有限长度为 $L = x_2 - x_1 (> 0)$ 的区间 $x_1 < x < x_2$ 上的可积函数 $f(x)$ 的 Fourier 展开, 即

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{2n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{L}\right], \tag{34.1}$$

其中

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{2}{L}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\begin{bmatrix} \cos\dfrac{2n\pi x}{L} \\ \sin\dfrac{2n\pi x}{L} \end{bmatrix} dx, \quad n = 0, 1, \cdots$$

容许有一个替代形式

$$f(x) \sim \frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(2n\pi\frac{x}{L} - \delta_n\right), \tag{34.2}$$

其中各项分别由振幅和相测度 c_n, δ_n 所规定; 此外, 显然

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad c_0 = a_0, \tag{34.3}$$

和

$$\tan\delta_n = \frac{b_n}{a_n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

出现于 Fourier 级数 (34.1) 中的函数有公共周期, 即 L, 也有成比例地较小周期 $L/n, n=1,2,\cdots$ 设 $\zeta = n/L$, 取极限 $L\to\infty, \zeta$ 的连续地变化的样子就显示出来了, 因为由 n 的单位增量引起的 ζ 的改变量

$$\Delta\zeta = \frac{1}{L}$$

是无穷小量. 对应地, 级数展开式 (34.1),(34.2) 能用对 ζ 的积分来改写, 即

$$f(x) \sim \int_0^\infty [A(\zeta)\cos 2\pi\zeta x + B(\zeta)\sin 2\pi\zeta x]dx \tag{34.4}$$

和

$$f(x) \sim \int_0^\infty C(\zeta)\cos[2\pi\zeta x - \delta(\zeta)]d\zeta, \tag{34.5}$$

这里, 假设 $x_1 \to -\infty$ 和 $x_2 \to \infty$, 则有

$$\begin{bmatrix} A(\zeta) \\ B(\zeta) \end{bmatrix} = 2\int_{-\infty}^\infty f(x)\begin{bmatrix} \cos 2\pi\zeta x \\ \sin 2\pi\zeta x \end{bmatrix} dx, \tag{34.6}$$
$$A(\zeta) = C(\zeta)\cos\delta(\zeta), \quad B(\zeta) = C(\zeta)\sin\delta(\zeta).$$

按照 (34.6), 就包含定义在 $0<\zeta<\infty$ 上的**谱函数** $A(\zeta), B(\zeta)$ 或 $C(\zeta), \delta(\zeta)$ 的所谓的 Fourier 积分表示式 (34.4),(34.5) 的存在性而言, $f(x)$ 在全范围 $-\infty < x < \infty$ 上的绝对可积性已足够了. 在分别的 $OA\zeta$ 和 $OB\zeta$ 平面上给出的由 $A(\zeta), B(\zeta)$ 所规定的一对曲线 (见图 55), 可变向量 $\underline{C}(\zeta)$, 它到 $OA\zeta$ 平面的倾角为 $\delta(\zeta) = \tan^{-1}(B(\zeta)/A(\zeta))$, 就被确定了; 而且端点位于一空间曲线 $\Gamma: 0<\zeta<\infty$ 上的这样的向量的完全族与 Fourier 级数表示有关的离散集形成对比.

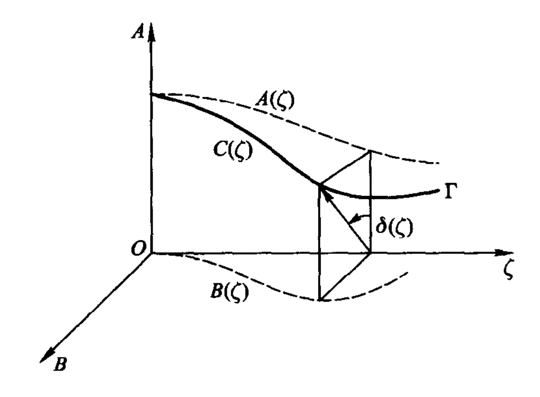


图 55

在宽有限, 例如说 L 的区间上的可积函数 $f(x)$ 既可以有一个级数表示也可以有一个基于 (非周期地) 把区间外的函数值指定为 $f\equiv 0$ 的积分表示; 按后者

的选择, 由此得出

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\begin{bmatrix}\cos 2\pi\zeta x\\ \sin 2\pi\zeta x\end{bmatrix} dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\begin{bmatrix}\cos 2\pi\zeta x\\ \sin 2\pi\zeta x\end{bmatrix} dx,$$

而且得到了级数系数和谱函数之间的关系式

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}A\left(\frac{n}{L}\right),\\ b_n &= \frac{2}{L}B\left(\frac{n}{L}\right), \quad n=0,1,\cdots \end{aligned} \tag{34.7}$$

这样, 除了标量因子 $2/L$ 外, $f(x)$ 在 $x_1 < x < x_2$ 中的离散 Fourier 系数对应于其 Fourier 积分表示式的谱函数的一个选取集合.

给出具有有限或无限定义域的一个孤立函数 $f(x)$, 考虑其紧密关联的周期函数

$$F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+mL)$$

使得

$$F(x+L) = F(x).$$

$F(x)$ 的 Fourier 级数展开式包含系数

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{(L)}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+mL)\right]\cos 2n\pi\frac{x}{L}dx,\\ b_n &= \int_{(L)}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+mL)\right]\sin 2n\pi\frac{x}{L}dx, \end{aligned}$$

考虑关系式

$$\begin{aligned} \cos\left(2n\pi\frac{x+mL}{L}\right) &= \cos\left(2n\pi\frac{x}{L}\right),\\ \sin\left(2n\pi\frac{x+mL}{L}\right) &= \sin\left(2n\pi\frac{x}{L}\right), \end{aligned}$$

它们能改写成形式

$$\begin{Bmatrix} a_n\\ b_n\end{Bmatrix} = \frac{2}{L}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\begin{bmatrix}\cos\left(2n\pi\dfrac{x}{L}\right)\\ \sin\left(2n\pi\dfrac{x}{L}\right)\end{bmatrix}dx = \begin{Bmatrix}\dfrac{2}{L}A\left(\dfrac{n}{L}\right)\\ \dfrac{2}{L}B\left(\dfrac{n}{L}\right)\end{Bmatrix},$$

因此再次得到关系式 (34.7).

作为例子, 选择有无界定义域的偶孤立函数,

$$f(x,\alpha)=\frac{\alpha}{\alpha^2+4\pi^2x^2}=\int_0^\infty e^{-\alpha\zeta}\cos 2\pi\zeta x d\zeta,\quad \alpha>0,\ -\infty<x<\infty,$$

它的积分表示中有一个指数谱函数

$$A(\zeta)=e^{-\alpha\zeta},\quad \zeta>0;$$

这里对应的周期函数

$$F(x,\alpha)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+4\pi^2(x+mL)^2}$$

分别有显式和级数形式表示

$$F(x,\alpha)=\frac{1}{2L}\frac{\sinh\frac{\alpha}{L}}{\cosh\frac{\alpha}{L}-\cos 2\pi\frac{x}{L}}=\frac{1}{2L}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha n/L}\cos 2n\pi\frac{x}{L}\right]. \tag{34.8}$$

另一值得注意的例子由 Fourier 积分

$$f(x,\alpha)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}e^{-4\pi^2x^2/\alpha^2}=\int_0^\infty e^{-\alpha^2\zeta^2}\cos 2\pi\zeta x d\zeta,\quad -\infty<x<\infty$$

提供, 给定函数和它的谱函数显然都有指数形式. 所得的周期函数之间的等式

$$\begin{aligned}F(x,\alpha)&=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{4\pi^2}{\alpha^2}(x+mL)^2\right]\\&=\frac{1}{2L}+\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-\alpha^2n^2/L^2]\cos 2n\pi\frac{x}{L},\end{aligned}\tag{34.9}$$

是以前用过的类型的等式 (见第二十三章和方程 (23.6)), 以前用以得到一个偏微分方程的参数依赖解的替代的和互补的形式.

包含复值函数基的 Fourier 级数

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{2in\pi x/L}$$

和它的系数积分

$$c_n=\frac{1}{L}\int_{(L)}f(x)e^{-2in\pi x/L}dx,\quad n=0,\pm1,\cdots$$

扩张到任何跨度 L 的区间, 对有无界定义域的适当的函数有分别的对应部分

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}F(\zeta)e^{2\pi i\zeta x}d\zeta,\\F(\zeta)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-2\pi i\zeta x}dx.\end{aligned}\tag{34.10}$$

在 $f(x)$ 和它的所谓的复 Fourier 变换 $F(\zeta)$ 之间后一对关系式中完全的对称性是显然的; 前者的一个变体

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \tag{34.11}$$

推断出时间变量 t 的任一 (然而是可积的) 函数能从在频率范围 $\omega,\omega+d\omega$ 的具有密度

$$\frac{F(\omega)}{2\pi}d\omega=\frac{d\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

的周期分量的连续分布综合而成.

用相当的一对置换, 即

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\zeta)e^{i\zeta x}d\zeta,\quad F(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x')e^{-i\zeta x'}dx',$$

来替代 (34.10), 然后消去 $F(\zeta)$, 发现

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x')e^{i\zeta(x-x')}d\zeta dx'\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x')\cos\zeta(x-x')d\zeta dx'\end{aligned} \tag{34.12}$$

由于 $\sin\zeta(x-x')$ 对 ζ 有奇对称性; 因此

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\zeta\int_{-\infty}^{\infty}f(x')\cos\zeta(x-x')dx'\\&=\int_{0}^{\infty}[\widetilde{A}(\zeta)\cos\zeta x+\widetilde{B}(\zeta)\sin\zeta x]d\zeta,\end{aligned} \tag{34.13}$$

这里

$$\widetilde{A}(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\zeta x dx,\quad \widetilde{B}(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\zeta x dx. \tag{34.14}$$

关系式 (34.13),(34.14) 和 (34.5),(34.6) 彼此的区分仅在于自变量和标量因子的差别; 此外, 当 $f(x)$ 有偶或奇对称性时, (34.13) 可以简化, 分别有 $\widetilde{B}(\zeta)=0$ 或 $\widetilde{A}(\zeta)=0$.

如果表示式 (34.12) 理解成以下意义:

$$f(x)=\lim_{\Lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x')\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\cos\zeta(x-x')d\zeta dx',$$

对其中的一个正常 ζ 积分有明显好处, 分析结果得出结论, 其广义形式

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x')\cos\zeta(x-x')d\zeta dx' \tag{34.15}$$

考虑了 $f(x)$ 的可能的不连续性状.

选取不连续的偶函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<a,\\ 0, & |x|>a,\end{cases}$$

作为例子它将证实 (34.15) 成立, 且注意谱函数.

$$\widetilde{A}(\zeta)=\frac{2}{\pi}\int_0^a \cos\zeta x dx=\frac{2}{\pi\zeta}\sin\zeta a,\quad \widetilde{B}(\zeta)=0$$

导致了 Fourier 余弦积分表示式

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\zeta a}{\zeta}\cos\zeta x d\zeta\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\zeta(x+a)-\sin\zeta(x-a)}{\zeta}d\zeta,\quad -\infty<x<\infty.\end{aligned}$$

考虑到结果

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}dx=\pm\frac{\pi}{2},\quad \alpha\gtrless 0,$$

由此推导出

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\zeta(x+a)-\sin\zeta(x-a)}{\zeta}d\zeta=\begin{cases}1, & |x|<a,\\ 1/2, & x=\pm a,\\ 0, & |x|>a,\end{cases}$$

因此就验证了表示式 (34.15) 的性质.

在函数和它们的 Fourier 变换的积分之间有一个重要类型的等式, 类似平方可积 (即 L_2) 函数和其 Fourier 系数之间的 Parseval 型等式. 作为启发式的推导, 设 $F(\omega), G(\omega)$ 表示实函数 $f(t), g(t)$ 按 (34.11) 所得到的变换式, 且观察到 (这里符号 $*$ 表示复共轭量)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(\omega)G^*(\omega)e^{i\omega t}d\omega&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(\omega)e^{i\omega t}\int_{-\infty}^\infty g(t')e^{i\omega t'}dt'd\omega\\ &=\int_{-\infty}^\infty g(t')\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(\omega)e^{i\omega(t-t')}d\omega\right]dt'\\ &=\int_{-\infty}^\infty g(t')f(t+t')dt'.\end{aligned}$$

这里令 $t=0$ 于是得到下面的结果: 首先是

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)g(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(\omega)G^*(\omega)d\omega; \tag{34.16}$$

其次使函数 f, g 相等, 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \tag{34.17}$$

平方可积函数, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt < \infty$$

构成 Fourier 变换理论中重要的一类, 且在有有限总能量的时变信号这方面来解释它们证明是有用的. 则关系式 (34.17) 表示从与时间相关的信号函数或从与频率相关的关联谱函数

$$E_f(\omega) = F(\omega)F^*(\omega)$$

去计算总能量之间的等价性.

其平均能量转移率或功率流保持有限的信号, 与有有限总能量的那些信号不同, 能用满足条件

$$\langle f^2(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f^2(t)dt < \infty \tag{34.18}$$

的函数来表示. 这样, 设

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), & |t| < T, \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

定义一个平方可积函数, 具有 Fourier 变换

$$F_T(\omega) = \int_{-T}^{T} f_T(t)e^{-i\omega t}dt; \tag{34.19}$$

则 f_T 和 F_T 之间的关系式 (34.17) 适用, 且可能换成

$$\langle f^2(t)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_f(\omega)d\omega, \tag{34.20}$$

这里

$$P_f(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}F_T(\omega)F_T^*(\omega). \tag{34.21}$$

(34.20) 的含意是在信号中的平均能量转移率能用两种方法计算, 一个是基于时间域内的信号函数, 另一个是基于频率域内的功率谱函数.

为解释后者的可行性, 考虑阶梯函数

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

和它的截尾形式

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & 0 < t < T, \\ 0, & t > T, \end{cases}$$

这里

$$\langle f^2(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T dt = \frac{1}{2},$$

且由于

$$F_T(\omega) = \int_0^T e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega}(1 - e^{-i\omega T}),$$

它推导出

$$F_T(\omega) F_T^*(\omega) = \frac{4}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega T}{2},$$

由此, 正如 (34.20) 所要求的得出

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_f(\omega) d\omega &= \frac{1}{\pi} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

虽然 Fourier 积分和 Fourier 变换关系式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

具有形式对称性 (用采取同一数值因子 $1/(2\pi)^{1/2}$ 进一步加强其形式对称性), 它不能得出 f 和 F 有共同的函数特征. 为说明这一点, 选取函数

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \exp(-\alpha t), & t > 0, \alpha > 0, \end{cases}$$

其变换

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t - i\omega t} dt = \frac{1}{\alpha + i\omega} = \frac{\alpha - i\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

有绝对值

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \sim \frac{1}{|\omega|}, \quad |\omega| \to \infty.$$

这样

$$\int_0^{\infty} |f(t)| dt = \frac{1}{\alpha}$$

而

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| d\omega = \infty.$$

此外, 也注意到 $f(t)$ 在 $t = 0$ 不连续, 而 $F(\omega)$ 是 ω 的连续函数.

如果 $f(t), f'(t), f''(t)$ 是绝对可积的,$F(\omega)$ 的绝对可积性能得到保证; 为验证这一断言, 相继的进行分部积分且利用 $|t| \to \infty$ 时必须有的极限 $f, f' \to 0$, 得出结果

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = -\frac{1}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} f''(t) e^{-i\omega t} dt,$$

由此推断出

$$|F(\omega)| < \frac{C}{\omega^2}, \quad |\omega| \to \infty, \quad C \text{ 为常数},$$

在构造线性偏微分方程的通解中, 一旦具有特征指数因子的特解可用, Fourier 积分表示就起直接作用; 例如考虑无界区间上扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{34.22}$$

它容许有对所有 $x, t > 0$ 和 ζ 保证有界的分离变量解

$$u(x, t, \zeta) = e^{i\zeta x - k\zeta^2 t}.$$

关于参数 ζ 的积分, 即

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta) e^{i\zeta x - k\zeta^2 t} d\zeta \tag{34.23}$$

表示一个更一般的解; 这里 $F(\zeta)$ 简单地是 $u(x, 0)$ 的 Fourier 变换, 因而如果补充初始条件, 则可以从关系式得到

$$F(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-i\zeta x} dx.$$

假设

$$u(x, 0) = U_0 e^{-(x/l)^2}, \quad -\infty < x < \infty \tag{34.24}$$

规定了初始分布且注意到对应的变换

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= U_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x/l)^2 - i\zeta x} dx = 2U_0 \int_0^{\infty} e^{-(x/l)^2} \cos \zeta x dx \\ &= \sqrt{\pi} U_0 l e^{-(\zeta l)^2/4}, \end{aligned} \tag{34.25}$$

由结果

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\beta^2/4\alpha}, \quad \alpha > 0 \tag{34.26}$$

而得到. 联合 (34.23),(34.25) 且再一次利用 (34.26) 后出现的函数

$$u(x,t)=\frac{U_0 l}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\cos\zeta x\exp\left[-\zeta^2\left(kt+\frac{1}{4}l^2\right)\right]d\zeta$$
$$=\frac{U_0}{\sqrt{1+\dfrac{4kt}{l^2}}}\exp\left[-\frac{(x/l)^2}{1+\dfrac{4kt}{l^2}}\right] \tag{34.27}$$

满足 (34.22),(34.24) 且显示其渐近性状为

$$u(x,t)\to 0,\quad |x|\to\infty.$$

按照 (34.27) 当时间增加时扩散连续地加宽且初始函数的大小变小了.

如果特殊的初始规定 (34.24) 换成更一般的函数, 即

$$u(x,0)=f(x),\quad -\infty<x<\infty,$$

则

$$F(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x')e^{-i\zeta x'}dx',$$

且

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx' f(x')\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\zeta(x-x')-k\zeta^2 t}d\zeta$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4kt}\right]f(x')dx',\quad t>0 \tag{34.28}$$

表示扩散方程在无穷区间上的解. 热能量 (或热量) 的守恒性内含于由 (34.28) 导出的关系式

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)dx=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$$

之中.

阐明 Fourier 分析的功用的另一例子涉及修正扩散方程

$$\frac{\partial c}{\partial t}+V\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\frac{\partial c}{\partial x}=D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial c}{\partial r}\right), \tag{34.29}$$

这里 c 是沿半径 a 的圆柱形管的轴向 (x 方向) 流中当考虑径向扩散时的溶质的浓度; 涉及项 $\dfrac{\partial c}{\partial x}$ 的系数包含该流穿过此管的每个横截面的抛物面型速度分布, D 是扩散常数. 为得到满足初始条件

$$c=f(x),\quad 在\ t=0 \tag{34.30}$$

和在取极限 $t \to \infty$ 时趋于零的 (34.29) 的精确解, Lighthill, M. J. (莱特希尔, 1924—1998) 于 1966 年首先选择

$$f(x) = e^{ikx}$$

然后采用带有两个任意函数 $A(t), B(t)$ 的形式

$$c(x,r,t,k) = \exp[ikx + A(t) + B(t)r^2]. \tag{34.31}$$

上式构成给定偏微分方程的解, 如果这两个函数满足耦合一阶常微分方程

$$A'(t) + Vik = 4DB(t) \tag{34.32}$$

和

$$B'(t) - \frac{Vik}{a^2} = 4DB^2(t), \tag{34.33}$$

第二个方程是 Riccati, V. (里卡蒂, 1707—1775) 型方程. (34.33) 的一个特解是显然的, 即:

$$B_1^2 = -\frac{Vik}{a^2}\frac{1}{4D} = q^2\left(\frac{1}{4D}\right)^2$$

或

$$B_1 = \frac{q}{4D}, \tag{34.34}$$

这里

$$q = \left(-\frac{4DVik}{a^2}\right)^{1/2}, \tag{34.35}$$

因而令

$$B(t) = B_1 + \frac{1}{\xi(t)},$$

$\xi(t)$ 通过线性方程

$$\frac{d}{dt}\xi + 2q\xi(t) = -4D$$

求得其表示式, 则通解 $B(t)$ 能找到. 容易得出

$$\xi(t) = -2\frac{D}{q} + C_1 e^{-2qt}, \quad C_1 \text{ 为常数}$$

因而在选择积分常数

$$C_1 = -\frac{2D}{q}$$

后随之得到

$$B(t) = -\frac{q}{4D}\frac{1-e^{-2qt}}{1+e^{-2qt}} = -\frac{q}{4D}\tanh qt. \tag{34.36}$$

有了 $B(t)$, 关于 $A(t)$ 的方程 (34.32) 现在就确定了, 即

$$\frac{dA}{dt} = -Vik - q\tanh qt$$

其解除了一个不重要的附加常数外, 为

$$A(t) = -Vikt - \ln\cosh qt, \tag{34.37}$$

所以将 $A(t), B(t)$ 的表达式 (34.36),(34.37) 代入 (34.31) 中, 即得出 (34.29) 的一个显式解

$$c(x,r,t,k) = \exp\left[ik(x-Vt) - \frac{qr^2}{4D}\tanh qt\right]\text{sech }qt, \tag{34.38}$$

它在 $t=0$ 时等于 $\exp(ikx)$. 如果 $\text{Re }q>0$, 这个解在取极限 $t\to\infty$ 时趋于零, 能用 Fourier 分析推广, 使之满足一般的初始条件 (34.30); 合适的关系式是

$$c(x,r,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\exp\left[ik(x-Vt) - \frac{qr^2}{4D}\tanh qt\right]\text{sech }qtdk \tag{34.39}$$

和

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx. \tag{34.40}$$

Lighthill 详细讨论了如何用后者去研究一管内某处局部注射染料后立即的扩散和对流的联合效应; 于是假设初始分布函数 $f(x)$ 的狭小范围且当 $r\to\infty$ 时 $c\to 0$ 的渐近性状有效地取代在管壁的实际边界条件 $\dfrac{\partial c}{\partial r}=0$.

习 题 34

1. 考虑孤立 (或有限范围) 函数

$$f(x,l) = \begin{cases} 1-\dfrac{|x|}{l}, & |x|<l, \\ 0, & |x|>l, \end{cases}$$

决定其 Fourier 变换且得出包括 f 及其变换的平方之间的 Parseval 等式的具体形式. 考察在 f 的不连续点的 Fourier 积分表示. 用 Fourier 级数表示与其紧密关联的周期函数

$$F(x,l,L) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+mL,l),$$

且讨论 $L=2l, L=\infty$ 的极限情形.

2. (i) 验证自变量为 t 和 ω 的函数及其 Fourier 变换之间的对应关系

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{|t|}}\leftrightarrow F(\omega)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\omega|}}$$

(ii) 对函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{a^2-x^2}, & |x|\leqslant a,\\ 0, & |x|\geqslant a\end{cases}$$

求得其 Fourier 积分表示, 且用 Parseval 等式计算包含一个 Bessel 函数的定积分 (见第三十三章例 7).

3. 证实对应关系

$$f(x)=\frac{l}{x^2+l^2}\leftrightarrow F(\zeta)=\pi e^{-|\zeta|l},$$

且决定它们的曲线在半极大值的宽度. 应用 Parseval 等式去计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+l^2)^2}.$$

4. 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是平方可积函数, 它们的卷积

$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)g(x-\xi)d\xi$$

对所有 x 存在; 证明

$$H(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\zeta x}h(x)dx=F(\zeta)G(\zeta),$$

这里 F,G 表示 f,g 的对应的 Fourier 变换. 如果

$$f(x)=\frac{\sin x}{x},$$

计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}\frac{\sin(x-\xi)}{x-\xi}d\xi.$$

5. 证明: 如果 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$, 则

$$\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)F^*(\omega')\frac{\sin(\omega-\omega')T}{\omega-\omega'}d\omega d\omega'$$

且指出如何推断出 $T\to\infty$ 的极限.

6. 将 Fourier 级数表示式

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos 2n\frac{\pi x}{L} + b_n \sin 2n\frac{\pi x}{L}\right]$$

代入到谱函数 [见 (34.6)]

$$\begin{bmatrix} A(\zeta) \\ B(\zeta) \end{bmatrix} = 2\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\begin{bmatrix} \cos 2\pi\zeta x \\ \sin 2\pi\zeta x \end{bmatrix} dx$$

中, 验证所得表示式

$$A(\zeta) = \frac{a_0}{2\pi}\frac{\sin 2\pi\zeta L}{\zeta} - \frac{\zeta}{\pi}\sin 2\pi\zeta L \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\left(\frac{n}{L}\right)^2 - \zeta^2},$$

$$+2\frac{\sin^2 \pi\zeta L}{\pi L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nb_n}{\left(\frac{n}{L}\right)^2 - \zeta^2},$$

$$B(\zeta) = \frac{a_0}{\pi}\frac{\sin^2 \pi\zeta L}{\zeta} + 2\frac{\zeta}{\pi}\sin^2 \pi\zeta L \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\left(\frac{n}{L}\right)^2 - \zeta^2}$$

$$-\frac{\sin 2\pi\zeta L}{\pi L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nb_n}{\left(\frac{n}{L}\right)^2 - \zeta^2}.$$

用取极限的方法, 即

$$\lim_{\zeta\to\frac{n}{L}}\left(\frac{\zeta\sin 2\pi\zeta L}{\left(\frac{n}{L}\right)^2 - \zeta^2}\right) = \lim_{\zeta\to\frac{n}{L}}\left(\frac{\zeta}{\frac{n}{L}+\zeta}\cdot\frac{\sin 2\pi\zeta L}{\frac{n}{L}-\zeta}\right) = \frac{1}{2}\left.\frac{\frac{d}{d\zeta}\sin 2\pi\zeta L}{\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{n}{L}-\zeta\right)}\right|_{\zeta=\frac{n}{L}}$$

$$= -\pi L$$

去得到 $a_n, A\left(\frac{n}{L}\right)$ 和 $b_n, B\left(\frac{n}{L}\right)$ 之间的联系 (34.7).

7. 解偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

使之满足初始条件

$$u(x,0) = xe^{-x^2/2},$$

计算

$$\int_{-\infty}^{\infty}(u(x,t))^2 dx.$$

8. 导出偏微分方程

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial c}{\partial x}$$

的在 $t=0$ 满足

$$c(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$$

的一般解.

9. Sommerfeld, A. I. W. (佐默费尔德, 1865—1951) 和 Brillouin, M. L. (布里尤安, 1854—1948) 于 1914 年在其经典研究工作中分析在一规定点发生的, 有限持续时间的给定电信号如何通过物质介质传播的; 这里用信号函数的 Fourier 积分或频率综合, 且对各个频率按照 Marxwell, J. C. (麦克斯韦, 1831—1879) 电磁方程组和一个分子模型分别决定其相速度 $V(\omega)$. 如果信号强度有有限的正弦变化, 即

$$f(t) = \begin{cases} \sin\omega_0 t, & 0 < t < T, \\ 0, & t < 0, t > T, \end{cases}$$

这里

$$T = \frac{2N\pi}{\omega_0},$$

证实替代的 Fourier 表示式为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{\omega-\omega_0} - \frac{1}{\omega+\omega_0}\right)[\cos\omega(t-T) - \cos\omega t]d\omega \\ &= \frac{2\omega_0}{\pi}\int_0^\infty \sin\frac{\omega T}{2}\sin\omega\left(t-\frac{T}{2}\right)\frac{d\omega}{\omega^2-\omega_0^2} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty [\cos\omega(t-T) - \cos\omega t]\frac{d\omega}{\omega-\omega_0} \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^\infty [e^{i\omega(t-T)} - e^{i\omega t}]\frac{d\omega}{\omega-\omega_0}, \end{aligned} \tag{i}$$

其中的一个或另一个表示式在不同的关联中证明是更有利的.

找出由第二个表示式选出的信号谱强度函数, 即

$$I(\omega) = \left[\frac{2\omega_0}{\pi}\frac{\sin\omega T/2}{\omega^2-\omega_0^2}\right]^2, \quad T = \frac{2N\pi}{\omega_0}, \quad N \text{ 为整数}$$

的最大值, 且对无量纲参数 $\omega_0 T$ 的不同的量作这个函数的几个草图. 注意观察 $\Delta\omega = 2\pi/T$ 是 $I(\omega)$ 在半最大值的峰的宽度的数量阶, 且分数宽度等于 $\Delta\omega/\omega_0 = 2\pi/\omega_0 T$; 信号持续时间 T 及其频谱的半宽度之间的关系, 即 $T\Delta\omega \sim 2\pi$ 是许多个别代表的特征.

如果该信号与在一给定点, 例如 $x=0$, 的光波发射有关, 其他处所得扰动可以通过假设其中每个频率以对应相速度 $V(\omega)$ 传播到相关的范围 x 上而求得; 这样基于 (i) 的最后一个表示式接收信号函数有形式

$$f(x,t)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{i\omega\left(t-T-\frac{x}{V(\omega)}\right)}-e^{i\omega\left(t-\frac{x}{V(\omega)}\right)}\right]\frac{d\omega}{\omega-\omega_0}.$$

10. Fourier 积分和 Fourier 级数有助于得到线性非齐次微分方程的解; 这样, 如果

$$L[y(t)]=f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{i}$$

和

$$\hat{y}(t,\omega)=G(\omega)e^{i\omega t}$$

满足 (i) 的特殊形式, 即

$$L[\hat{y}(t,\omega)]=e^{i\omega t},$$

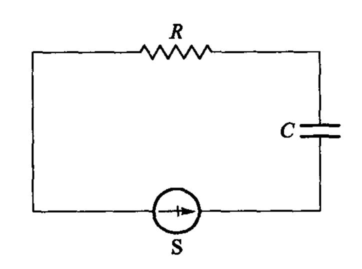
则

$$\begin{aligned}y(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{y}(t,\omega)F(\omega)d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)G(\omega)e^{i\omega t}d\omega\end{aligned}$$

表示 (i) 的一个解.

作为说明性的例子, 考虑一个有调节开关 S 的 RC 电路回路 (见图); 如果开关在瞬时 $t=0$ 前关闭, 在 $t=0$ 和 $t=T$ 之间开启, 随后在 $t=T$ 再关闭, 外加电压, 例如说为

$$V(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ V, & 0<t<T,\\ 0, & t>T,\end{cases} \tag{ii}$$



容许有 Fourier 积分表示

$$V(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \tag{iii}$$

具有谱函数

$$F(\omega) = V\frac{1-e^{-i\omega T}}{i\omega}. \tag{iv}$$

考虑到穿过电容器的电压 $v_C(t)$ 满足线性常微分方程

$$RC\frac{d}{dt}v_C + v_C = V(t) \tag{v}$$

以及

$$\hat{v}_C(t,\omega) = \frac{e^{i\omega t}}{1+i\omega RC}$$

满足方程

$$RC\frac{d}{dt}\hat{v}_C + \hat{v}_C = e^{i\omega t},$$

(v) 的一个解可表成形式

$$v_C(t) = \frac{V}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{-i\omega T}}{i\omega}\frac{e^{i\omega t}}{1+i\omega RC}d\omega. \tag{vi}$$

计算上面的积分 (用复分析方法直接计算), 得出互补的表示式

$$v_C(t) = \begin{cases} 0, & t<0, \\ V[1-e^{-t/RC}], & 0<t<T, \\ V[e^{-(t-T)/RC}-e^{-t/RC}], & t>T. \end{cases} \tag{vii}$$

在该回路中的电流 $i(t)$ 有不同的表示式

$$i(t) = C\frac{d}{dt}v_C = \frac{CV}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1-e^{-i\omega T})\frac{e^{i\omega t}}{1+i\omega RC}d\omega, \tag{viii}$$

显式表示式

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t<0, \\ (V/R)\exp(-t/RC), & 0<t<T, \\ (V/R)[1-\exp(T/RC)], & t>T. \end{cases} \tag{ix}$$

直接可用来计算由于该电路中的电阻而损耗的总能量, 即

$$E = \int_0^{\infty} Ri^2(t)dt. \tag{x}$$

利用 (ix) – (xi) 检验积分 (x) 的来自区间 $(0,T)$ 和 (T,∞) 的贡献 E_1, E_2, 即

$$E_1 = \frac{1}{2}CV^2[1 - e^{-2T/RC}],$$
$$E_2 = \frac{1}{2}CV^2 e^{-2T/RC}[1 - e^{-T/RC}]^2,$$

它们的和

$$E = E_1 + E_2 = CV^2[1 - e^{-T/RC}] \tag{xi}$$

确定整个能量损耗.

决定 E 的另一个式子依赖于 Parseval 等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} i^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |I(\omega)|^2 d\omega, \tag{xii}$$

相关的 Fourier 变换由 (viii) 推导出, 即

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} i(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{CV}{1 + i\omega RC}(1 - e^{-i\omega T});$$

验证表示式

$$|I(\omega)|^2 = \frac{2C^2V^2}{1 + (\omega RC)^2}(1 - \cos\omega T),$$

且通过 (vii) 推演出

$$E = \frac{V^2}{\pi R}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos\omega T}{\omega^2 + \left(\dfrac{1}{RC}\right)^2} d\omega = CV^2[1 - e^{-T/RC}], \tag{xiii}$$

与较早的结论 (xi) 一致.

有另一种方法去求能量损耗, 这依赖于计算由电压电源释放的能量; 这样, 利用 Parseval 等式的推广形式 (34.16),

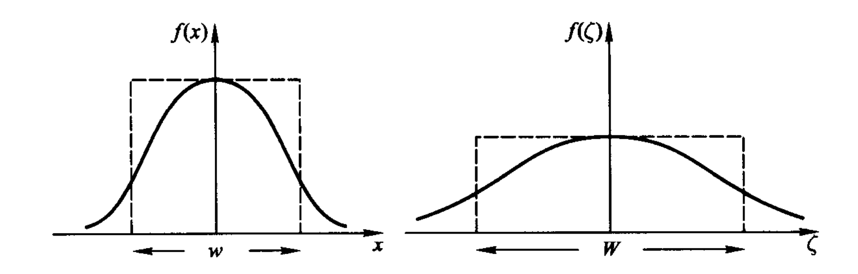
$$\int_{-\infty}^{\infty} V(t)i(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V(\omega)I^*(\omega)d\omega,$$

这里左边的积分表示维持这电路的电源作用, 证明右边积分和 (xiii) 中的积分之间的等价性.

11. 考虑一对实的正的且对称的函数 $f(x), F(\zeta)$, 它们通过 Fourier 变换相互地且互反地相关联; 且设 w, W 分别表示有同样面积的矩形图形的宽度, 而其面积分别等于 f, F 所确定面积 (见图).

利用关系式

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta)d\zeta, \quad F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$



刻画乘积 wW 并作出解释.

第三十五章

Fourier 变换的应用

Fourier 积分和 Fourier 变换在偏微分方程的分析中的应用很多而且是多种多样的; 一些有关的和共同的特征将在以下的阐明性例子中表明.

考虑在无限带形域 $-\infty < x < \infty, 0 < y < H$ 内部的 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{35.1}$$

分别的沿边界给出规定

$$\begin{aligned} &u(x,0) = f(x), \\ &u(x,H) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \end{aligned} \tag{35.2}$$

还有

$$u \to 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \to 0, \quad |x| \to \infty, \quad 0 < y < H.$$

用 $e^{-i\zeta x}$ 乘偏微分方程 (35.1) 且在无限区间 $(-\infty, \infty)$ 上对 x 积分; 运算作用在两项上的结果是: 在第一项中相继分部积分且用 (35.2) 中的渐近性质得出

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-i\zeta x} dx = -\zeta^2 U(y, \zeta),$$

第二项交换微分与积分次序得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{-i\zeta x} dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(y, \zeta),$$

这里

$$U(y,\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)e^{-i\zeta x}dx \tag{35.3}$$

是 u 对 x 的 Fourier 变换. 所以该偏微分方程替换成用变换 (35.3) 表示的常微分方程

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\zeta^2\right]U(y,\zeta)=0,\quad 0<y<H; \tag{35.4}$$

这里变换变量 ζ 是一个参数. (35.4) 所要求的满足边界条件

$$U(0,\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\zeta x}dx=F(\zeta),\quad U(H,\zeta)=0$$

的解是

$$U(y,\zeta)=F(\zeta)\frac{\sinh\zeta(H-y)}{\sinh\zeta H}.$$

其次借助于逆关系式 (34.11), 得出

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U(y,\zeta)e^{i\zeta x}d\zeta$$

或

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\zeta)\frac{\sinh\zeta(H-y)}{\sinh\zeta H}e^{i\zeta x}d\zeta$$

作为所述问题的解; 一个替代形式值得注意, 即

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x-x',y)f(x')dx', \tag{35.5}$$

这里

$$G(x-x',y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sinh\zeta(H-y)}{\sinh\zeta H}e^{i\zeta(x-x')}d\zeta \tag{35.6}$$

起到了 Green 函数的作用. 导出 Green 函数的替代表示式 (特别是级数) 的方法毋需在此详述.

其次设要求在第一象限 $x>0,y>0$ 内解 Laplace 方程 (35.1), 这时指定的边界值是在图 56 中给出的那些. 这里一对 Fourier 正弦变换关系式

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}U(y,\zeta)\sin\zeta x d\zeta, \tag{35.7}$$

$$U(y,\zeta)=\int_{0}^{\infty}u(x,y)\sin\zeta x dx \tag{35.8}$$

(容易从 (34.13),(34.14) 得到) 是合适的, 因为第一个式子满足条件 $u(0,y)=0$. 用 $\sin\zeta x$ 乘该偏微分方程且在 $0<x<\infty$ 上积分; 然后, 注意结果

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin\zeta x dx = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\sin\zeta x - \zeta u\cos\zeta x\right|_{x=0} - \zeta^2\int_0^\infty u\sin\zeta x dx$$

$$= -\zeta^2 U(y,\zeta),$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin\zeta x dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2}U(y,\zeta),$$

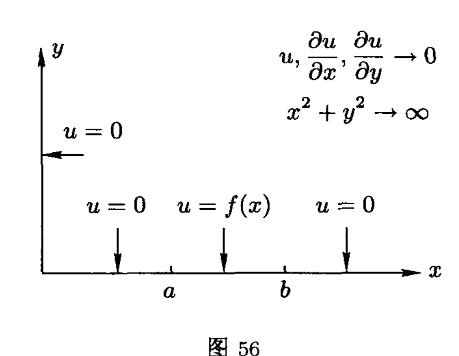


图 56

考虑到 $u=0, x=0, y>0$ 和当 $x^2+y^2\to\infty$ 时, $u, \dfrac{\partial u}{\partial x}\to 0$; 得出方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \zeta^2 U = 0, \quad 0<y<\infty. \tag{35.9}$$

(35.9) 的相关的积分有形式

$$U(y,\zeta) = U(0,\zeta)e^{-\zeta y}, \quad y>0, \zeta>0,$$

这里

$$U(0,\zeta) = \int_a^b f(x)\sin\zeta x dx$$

通过在半直线 $y=0, x>0$ 上的边界条件而被确定. 因此一对关系式

$$u(x,y) = \int_a^b G(x,x',y)f(x')dx', \tag{35.10}$$

$$G(x,x',y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\zeta x\sin\zeta x' e^{-\zeta y}d\zeta \tag{35.11}$$

正好是所要求的解.

特别选取 $a=0, b=1$ 和 $f(x)=1$; 则

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\zeta}{\zeta}e^{-\zeta y}\sin\zeta x d\zeta,$$

且由于

$$\int_0^\infty \cos\alpha\zeta e^{-\beta\zeta}d\zeta = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}, \quad \beta > 0,$$

对 x 微分得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty [1-\cos\zeta]e^{-\zeta y}\sin\zeta x d\zeta \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{y}{x^2+y^2} - \frac{1}{2}\frac{y}{(x+1)^2+y^2} - \frac{1}{2}\frac{y}{(x-1)^2+y^2}\right].\end{aligned} \tag{35.12}$$

积分 (35.12) 且利用条件 $u(0,y)=0$, 得到

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi}\left[\tan^{-1}\frac{x}{y} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x+1}{y} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{|x-1|}{y}\right], \quad x,y \geqslant 0 \tag{35.13}$$

构成一个显式解. 容易证实后者满足对 $u(x,y)$ 规定的所有条件.

为求解一维扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x>0, t>0 \tag{35.14}$$

连同齐次初始条件

$$u(x,0)=0, \quad x>0$$

和非齐次边界条件

$$-\frac{\partial}{\partial x}u\bigg|_{x=0} = f(t), \quad t>0, \tag{35.15}$$

选取 Fourier 积分表示式

$$u(x,t) = \int_0^\infty T(t,\zeta)\cos\zeta x d\zeta, \tag{35.16}$$

它的三角因子 $\cos\zeta x$ 的 x 导数在 $x=0$ 为零, 规定这种选择的理由类似于 (第十八章) 有限区间上对相关本征函数给出的理由. (35.16) 的相伴关系式

$$T(t,\zeta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty u(x,t)\cos\zeta x dx \tag{35.17}$$

微分后再分部积分, 利用边界条件和渐近性状

$$u\to 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\to 0, \quad x\to\infty, \quad t>0,$$

推导出

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\cos\zeta x dx = \frac{2}{\pi}k\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos\zeta x dx \\ &= \frac{2k}{\pi}f(t) - k\zeta^2 T.\end{aligned}$$

这样 $T(t,\zeta)$ 满足常微分方程

$$\frac{dT}{dt}+k\zeta^2T=\frac{2}{\pi}kf(t),$$

它的解

$$T(t,\zeta)=\frac{2k}{\pi}\int_0^t \exp[-k(t-t')\zeta^2]f(t')dt' \tag{35.18}$$

满足由 (35.16) 和对 u 所述的初始条件导出的初始条件 $T(0,\zeta)=0$.

联合 (35.16),(35.18) 且利用 (34.26), 要找的函数 $u(x,t)$ 表示成

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{2k}{\pi}\int_0^t f(t')dt'\int_0^\infty \cos\zeta x\exp[-k(t-t')\zeta^2]d\zeta\\&=2k\int_0^t G(x,t-t')f(t')dt',\quad x>0\quad t>0,\end{aligned} \tag{35.19}$$

这里

$$G(x,t-t')=\frac{1}{2\sqrt{\pi k(t-t')}}\exp\left[-\frac{x^2}{4k(t-t')}\right]. \tag{35.20}$$

$u(x,t)$ 对 x 微分, 接着用积分变量的替换, 得出

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=-\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{\pi k}}\int_0^t\frac{f(t')}{(t-t')^{3/2}}\exp\left[-\frac{x^2}{4k(t-t')}\right]dt'\\&=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x/2\sqrt{kt}}^\infty f\left(t-\frac{x^2}{4k\sigma^2}\right)e^{-\sigma^2}d\sigma,\end{aligned}$$

因而

$$-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f(t)e^{-\sigma^2}d\sigma=f(t),\quad t>0,$$

正如所要求的那样.

值得注意的是一个公共的和基本的 Green 函数, 即

$$G(x-x',t-t')=\frac{1}{2\sqrt{\pi k(t-t')}}\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4k(t-t')}\right], \tag{35.21}$$

构成了对应于一对不同的边/初值问题的分别的表示式 (34.28),(35.19) 中的一部分; 前者中 $f(x)=u(x,0),-\infty<x<\infty$ 描述在无穷直线上的初始条件且积分是关于 Green 函数 $G(x-x',t)$ 的自变量 x' 的. 在后一问题中 $f(t)=-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0},t>0$ 描述在半直线 $x>0$ 的端点 $x=0$ 处的指定的流量变化, 且积分是关于 Green 函数 $G(x,t-t')$ 的自变量 t' 的.

特殊的表示式

$$G(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\exp\left[-\frac{x^2}{4kt}\right]$$

定义齐次扩散方程 (35.19) 在 $-\infty < x < \infty$ 中对所有 $t > 0$ 的一个有界解, 而且由于性质

$$G \to 0, \quad t \to 0, \quad x \neq 0$$

和

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x,t)dx = 1, \quad t > 0, \tag{35.22}$$

可以把它称为一个瞬时局部源函数, 它描述在极限 $t \to 0$ 时在 $x = 0$ 的一个可积奇点. 更一般地, (35.21) 规定在极限 $t \to t'$ 时在 $x = x'$ 具有一个奇点的对应的源函数. 这样表示式 (34.28) 刻画带有一个公共瞬时作用点源的无穷分布, 而 (35.19) 反映具有连续变化强度的固定局部源. 如 (35.22) 中的源函数的与时间无关的积分表示由该源释放的热的重新分布和守恒性.

假设在时刻 $t = 0$, 在一半径为 R 的球面空腔外都处于均匀温度 U_0; 且此后 $(t > 0)$ 在空腔表面保持温度为零. 显然空腔外面的介质中的温度将随时间的改变而改变且有球对称形式, 即 $u = u(r,t), r > R, t > 0$, 这里 r 表示从空腔中心起的距离. 用球坐标 (r, ϑ, φ) 改写三维扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right],$$

这里

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta,$$

且消去关于角变量 ϑ, φ 的导数之后, 该偏微分方程变成

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right] = \frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right], \quad r > R, t > 0. \tag{35.23}$$

这里函数的变换 $u \to v$ 使得

$$u(r,t) = \frac{v(r,t)}{r}, \quad \text{或} \quad v(r,t) = ru(r,t), \tag{35.24}$$

它推导出关系式

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2},$$

(35.23) 变成形式

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \tag{35.25}$$

因此可用一维扩散分析的方法.

由于空腔外的介质是无界的, 渐近性状

$$u \to U_0, \quad \text{当 } r \to \infty, \quad t > 0$$

适用, 写成

$$u(r,t) = U_0 - \hat{u}(r,t) \tag{35.26}$$

证明是方便的, 这里当 $r \to \infty, t > 0$ 时 $\hat{u} \to 0$, 且 $\hat{u}(r,0) = 0, r > R$. 令 $\hat{v} = r\hat{u}$, 则对 $\hat{v}$ 的方程组包括

$$\begin{gathered}\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} = k\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial r^2}, \quad r > R, \quad t > 0, \\ \hat{v}(R,t) = RU_0, \quad \hat{v}(r,0) = 0, \quad r > R\end{gathered} \tag{35.27}$$

和

$$\hat{v} \to 0, \quad r \to \infty, \quad t > 0.$$

$\hat{v}$ 的 Fourier 正弦积分表示式为

$$\hat{v}(r,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty V(t,\zeta)\sin\zeta(r-R)d\zeta, \tag{35.28}$$

而

$$V(t,\zeta) = \int_R^\infty \hat{v}(r,t)\sin\zeta(r-R)dr \tag{35.29}$$

表示 $\hat{v}$ 的正弦变换. 对 (35.29) 作运算且考虑刻画 $\hat{v}$ 性质的 (35.27), 由此得出

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= k\int_R^\infty \frac{\partial^2}{\partial r^2}\hat{v}\sin\zeta(r-R)dr = -k\zeta\int_R^\infty \frac{\partial \hat{v}}{\partial r}\cos\zeta(r-R)dr \\ &= -k\zeta[-RU_0 + \zeta\int_R^\infty \hat{v}(r,t)\sin\zeta(r-R)dr],\end{aligned}$$

所以

$$\frac{dV}{dt} + k\zeta^2 V = k\zeta RU_0. \tag{35.30}$$

(35.30) 的在 $t = 0$ 的值为零的合适解是

$$V(t,\zeta) = \frac{RU_0}{\zeta}(1 - e^{-k\zeta^2 t}),$$

因此利用 (35.28) 后,

$$\begin{aligned}\hat{v}(r,t) &= \frac{2R}{\pi}U_0\int_0^\infty (1 - e^{-k\zeta^2 t})\frac{\sin\zeta(r-R)}{\zeta}d\zeta \\ &= U_0 R - \frac{2}{\pi}U_0 R\int_0^\infty e^{-kt\zeta^2}\frac{\sin\zeta(r-R)}{\zeta}d\zeta.\end{aligned} \tag{35.31}$$

为完成 (35.31) 的简化, 记

$$I(a,b) = \int_0^\infty e^{-bx^2}\frac{\sin ax}{x}dx, \quad I(0,b) = 0, b > 0,$$

且注意 I 的导数的显式表示式, 即

$$\frac{\partial I}{\partial a}=\int_0^\infty e^{-bx^2}\cos ax dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}e^{-a^2/4b};$$

所以

$$I(a,b)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}\int_0^a e^{-\lambda^2/4b}d\lambda=\sqrt{\pi}\int_0^{a/2\sqrt{b}}e^{-\sigma^2}d\sigma$$
$$=\frac{\pi}{2}\text{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{b}}\right),$$

这里 erf 表示误差函数, 因此 (35.31) 的完全简化式是

$$\hat{v}(r,t)=U_0R-U_0R\text{erf}\left(\frac{r-R}{2\sqrt{kt}}\right).$$

最后

$$u(r,t)=U_0\left(1-\frac{R}{r}\right)-U_0\frac{R}{r}\text{erf}\left(\frac{r-R}{2\sqrt{kt}}\right),\quad r>R,t>0 \tag{35.32}$$

在给定初/边值要求的特定条件下规定了介质中的可变温度. 注意从介质到空壳中流量 (或热)

$$\kappa\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R}=U_0\left[\frac{1}{R}+\frac{1}{\sqrt{\pi kt}}\right]$$

有一个大的初始量 ($t\ll R^2/k$) 且最终趋于一个定常量 ($t\gg R^2/k$).

在柱极坐标 (r,ϑ,z) 中的 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\vartheta^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$$

当 $u=u(r,z)$ 与角坐标 ϑ 无关时, 取较简单的形式

$$\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0. \tag{35.33}$$

假设要在区域 $0\leqslant r<R,-\infty<z<\infty$ 内解 (35.33), 如果

$$u(R,z)=f(z),\quad -\infty<z<\infty, \tag{35.34}$$

这里 $f(z)$ 表示一个绝对可积函数. 为此引入一对 Fourier 积分关系式

$$u(r,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U(r,\zeta)e^{i\zeta z}d\zeta, \tag{35.35}$$

$$U(r,\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}u(r,t)e^{-i\zeta z}dz; \tag{35.36}$$

给定当 $|z| \to \infty, u, \dfrac{\partial u}{\partial z} \to 0$, 变换 $U(r,\zeta)$ 满足常微分方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} - \zeta^2 U = 0, \quad 0 \leqslant r < R \tag{35.37}$$

连同条件

$$U(R,\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i\zeta z} dz,$$
$$U(0,\zeta) \text{ 有限.}$$

(35.37) 的有界解可用具有虚自变量的 Bessel 函数来表示 (回顾 (33.27)), 即

$$U(r,\zeta) = U(R,\zeta)\frac{I_0(r\zeta)}{I_0(R\zeta)},$$

这里

$$I_0(x) = J_0(ix);$$

因此

$$u(r,z) = \int_{-\infty}^{\infty} G(r, z - z') f(z') dz' \tag{35.38}$$

是用有关的 Green 函数

$$G(r,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_0(r\zeta)}{I_0(R\zeta)} e^{i\zeta z} d\zeta \tag{35.39}$$

来表示的所述问题的解.

Fourier 积分在非齐次偏微分方程解的构造中是有用的; 例如, 取 Poisson 型方程或 Laplace 方程的非齐次形式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] u = -f(x,y,z), \tag{35.40}$$

这里函数 f 可以认为是一个连续质量的密度或电荷分布. 假设有对 u 和 f 两者的三维积分表示, 即

$$u(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\zeta x + \eta y + \xi z)] U(\zeta,\eta,\xi) d\zeta d\eta d\xi$$
$$f(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\zeta x + \eta y + \xi z)] F(\zeta,\eta,\xi) d\zeta d\eta d\xi;$$

则偏微分方程 (35.40) 推导出 u 和 f 的 Fourier 变换之间的一个比例关系, 即

$$\begin{aligned} U(\zeta,\eta,\xi) &= \frac{F(\zeta,\eta,\xi)}{\zeta^2+\eta^2+\xi^2} \\ &= \frac{1}{\zeta^2+\eta^2+\xi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x',y',z') e^{-i(\zeta x' + \eta y' + \xi z')} dx'dy'dz', \end{aligned}$$

所以

$$u(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\zeta,\eta,\xi)}{\zeta^2+\eta^2+\xi^2}\exp[i(\zeta x+\eta y+\xi z)]d\zeta d\eta d\xi$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(x-x',y-y',z-z')f(x',y',z')dx'dy'dz', \qquad (35.41)$$

其中

$$G(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\zeta x+\eta y+\xi z)}}{\zeta^2+\eta^2+\xi^2}d\zeta d\eta d\xi. \qquad (35.42)$$

(35.42) 中出现的组合 $\zeta x+\eta y+\xi z$ 可解释成两个向量

$$\underline{\sigma} = (\zeta,\eta,\xi) \quad 和 \quad \underline{r} = (x,y,z)$$

的标量积, 它们有标示出的分量和分别的长度

$$|\underline{\sigma}| = \sigma = \sqrt{\zeta^2+\eta^2+\xi^2}, \quad |\underline{r}| = R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

如果 (35.42) 中对变向量 $\underline{\sigma}$ 的参考系的极轴取成与固定向量 $\underline{r}$ 共线, 则上述标量积取形式

$$\underline{\sigma}\cdot\underline{r} = \sigma R\cos\psi,$$

这里 (σ,ψ,χ) 表示 (ζ,η,ξ) 空间中的球极坐标.

由于

$$d\zeta d\eta d\xi = \sigma^2 d\sigma\sin\psi d\psi d\chi,$$

积分 (35.42) 成为

$$G(R) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{\infty}d\sigma\int_0^{2\pi}d\chi\int_0^{\pi}\sin\psi e^{i\sigma R\cos\psi}d\psi$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}d\sigma\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{iR\sigma}\right)de^{i\sigma R\cos\psi}$$
$$= \frac{1}{2\pi^2 R}\int_0^{\infty}\frac{\sin\sigma R}{\sigma}d\sigma = \frac{1}{4\pi R},$$

且 Poisson 方程 (35.40) 的特解 (35.41) 取形式

$$u(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x',y',z')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}dx'dy'dz'. \qquad (35.43)$$

除 Fourier 变换外, 已知的包括不同 (和非三角的) 基函数的其他积分变换, 对包括偏微分方程的分析在内的各种问题也是很有用的.

习　题　35

1. 应用 Fourier 正弦积分表示去证明在半平面 $y>0$ 内 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

在 x 轴上取特定值

$$u(x,0)=f(x),\quad -\infty<x<\infty$$

的一个有界解可表示成

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x')dx'}{(x-x')^2+y^2};$$

如果 $f(x)=\sin x$, 计算此积分且检验对应函数 $u(x,y)$ 的性质.

2. 找出在第 I 象限 $x>0,y>0$ 内的 Laplace 方程的满足边界条件

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)\right|_{x=0}=f(y),\quad y>0,\quad u(x,0)=0,\quad x>0$$

的处处有界的解, 并证明结果

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right|_{y=0}=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{x'f(x')}{x^2+x'^2}dx'.$$

按照平面散度定理, 在该象限的分别的边界线上 u 的对应法向导数的两个积分必须相等且反号; 这是否正确?

验证在无穷带形区域 $-\infty<x<\infty,0<y<a$ 内 Laplace 方程的满足边界条件

$$u(x,0)=f(x),\quad u(x,a)=g(x),\quad -\infty<x<\infty$$

的有界解可表示成形式

$$u(x,y)=\frac{1}{2a}\sin\frac{\pi y}{a}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x')dx'}{\cosh\dfrac{\pi(x-x')}{a}-\cos\dfrac{\pi y}{a}}\right.$$
$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(x')dx'}{\cosh\dfrac{\pi(x-x')}{a}+\cos\dfrac{\pi y}{a}}\right].$$

注意特定函数和其变换的配对

$$f(x)=\frac{\sinh ax}{\sinh \pi x},\quad -\pi<a<\pi\leftrightarrow F(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\zeta x}dx=\frac{\sin a}{\cosh\zeta+\cos a}.$$

3. 考虑一个半无限圆柱 $0 \leqslant r \leqslant a, 0 \leqslant z < \infty$, 其平面端面 $(z=0)$ 保持常温度 U_0, 而其弯曲表面 $(r=a)$ 保持零温度. 证明该圆柱内定常温度分布, 即轴对称 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

的解可表示成

$$u(r,z) = U_0\left[1 - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{I_0(\zeta r)}{I_0(\zeta a)}\frac{\sin\zeta z}{\zeta}d\zeta\right],$$

这里 I_0 表示具有虚自变量的零阶 Bessel 函数,

4. 给定齐次扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x>0, \quad t>0 \tag{i}$$

连同初始条件

$$u(x,0)=0, \quad x>0$$

和边界条件

$$u(0,t)=f(t), \quad t>0, \quad u, \frac{\partial u}{\partial x} \to 0, \quad x\to\infty, \quad t>0,$$

证明解为

$$u(x,t) = 2k\frac{\partial}{\partial x'}\int_0^t G(x-x', t-t')\bigg|_{x'=0} f(t')dt' \tag{ii}$$

$$= \frac{x}{2\sqrt{\pi k}}\int_0^t \frac{f(t')}{(t-t')^{3/2}}\exp\left[-\frac{x^2}{4k(t-t')}\right]dt', \tag{iii}$$

这里

$$G(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}}\exp\left[-\frac{x^2}{4kt}\right], \quad -\infty < x < \infty, \quad t>0$$

是 (i) 的基本解或 Green 函数. 在 (iii) 中用变量替换 $t' \to \sigma$

$$\sigma = \frac{x}{2\sqrt{k(t-t')}},$$

然后检验解所要求的性质

$$\lim_{x\to 0} u(x,t) = f(t), \qquad t>0.$$

5. 设边界数据

$$-\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\bigg|_{x=0} = \varphi(t), \quad u(0,t)=\psi(t), \quad t>0 \tag{i}$$

分别地确定齐次扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{ii}$$

在 $x > 0$ 上具有公共的零初始值的两个解; 由前面的分析中已知它们分别的特征表示为

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{k}{\pi}}\int_0^t \frac{\varphi(t')}{(t-t')^{1/2}}\exp\left[-\frac{x^2}{4k(t-t')}\right]dt', \tag{iii}$$

$$u(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi k}}\int_0^t \frac{\psi(t')}{(t-t')^{3/2}}\exp\left[-\frac{x^2}{4k(t-t')}\right]dt'. \tag{iv}$$

(iv) 式对 x 积分, 其次用对 t 的偏导数且在给定 (i), (ii) 和渐近性状 $\frac{\partial u}{\partial x} \to 0, x \to \infty, t > 0$ 条件下, 证实以下结果

$$\int_0^\infty u(x,t)dx = \sqrt{\frac{k}{\pi}}\int_0^t \frac{\psi(t')}{(t-t')^{1/2}}dt',$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)dx = \int_0^\infty k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx = k\varphi(t) = \sqrt{\frac{k}{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\psi(t')dt'}{(t-t')^{1/2}}.$$

后一关系式提供了 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 之间的联系, 即

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi k}}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\psi(t')dt'}{(t-t')^{1/2}}, \quad t > 0, \tag{v}$$

这使得这两函数之一确定后即可求得另一个函数. (v) 中积分的直接转换就可用 $\psi(t)$ 来得出 $\varphi(t)$, 然而为了用 $\varphi(t)$ 得到 $\psi(t)$, 就需要解一个积分 (更确切地, 积分微分) 方程.

利用表示式 (iii) 去得到该积分方程的显式解, 且如果

$$\varphi(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \tau, \\ 0, & t > \tau, \end{cases}$$

做同样的事情. 当必须考虑非零初始分布

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < \infty$$

时, 讨论以上分析中所必须做的修改.

6. 设函数 $u(x,t)$ 定义在 (x,t) 平面的正象限上, 且在那里满足偏微分方程: $u_t = ku_{xx}$; 此外, 给定 $u(x,t)$ 沿每一条半直线边界的性状,

$$u(x,0) = e^{-x/L}, \quad x > 0, \quad u(0,t) = 1, \quad t > 0,$$

要求 u 及其偏导数有界, 得到表示式

$$u(x,t)=1-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\frac{x}{L}\sigma}{\sigma(1+\sigma^2)}e^{-\frac{kt}{L^2}\sigma^2}d\sigma.$$

求当 $x/L\ll 1$ 时和 $kt/L^2\gg 1$ 时对 $u(x,t)$ 的估计.

7. 假设有一半径为 R 和初始温度为 U_0 的均匀球, 其外被同样物质的无穷介质所包围, 其中初始温度为零. 用支配球对称热传导的偏微分方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(ru)=k\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru),$$

这里温度 $u(x,t)$ 是作为从该球中心出发的径向距离 r 和时间 t 的函数, 在 $r>R$ 中证明公式

$$\begin{aligned}u(r,t)=&\frac{1}{2}U_0\left[\operatorname{erf}\left(\frac{R+r}{2\sqrt{kt}}\right)+\operatorname{erf}\left(\frac{R-r}{2\sqrt{kt}}\right)\right]\\&+U_0\frac{1}{r}\sqrt{\frac{kt}{\pi}}\left\{\exp\left[-\frac{(R+r)^2}{4kt}\right]-\exp\left[-\frac{(R-r)^2}{4kt}\right]\right\},\end{aligned}$$

成立, 这里

$$\operatorname{erf}z=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\sigma^2}d\sigma$$

表示误差函数.

8. 有限区间上的积分变换有时可应用于涉及无界区域的问题; 作为例子, 注意有限正弦变换对

$$u(r,\vartheta)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}U(r,n)\sin n\vartheta, \tag{i}$$

$$U(r,n)=\int_0^{\pi}u(r,\vartheta)\sin n\vartheta d\vartheta,\quad n=1,2,\cdots \tag{ii}$$

要求找出一个在半平面 $y>0$ 内的 Laplace 方程的正则势函数或解, 这里

$$0<r<\infty,\quad 0<\vartheta<\pi,$$

给出规定

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\right]u=0,$$
$$u(r,0)=f(r),\quad r>0,\quad u(r,\pi)=0,\quad r>0.$$

把微分算子

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

用到 (ii) 中的函数 $U(r,n)$ 上, 且证实所得的常微分方程为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}\right]U=-\frac{nf(r)}{r^2},$$

它的解为

$$U(r,n)=\frac{1}{2}\int_0^r\left(\frac{r'}{r}\right)^n\frac{f(r')}{r'}dr'+\frac{1}{2}\int_r^\infty\left(\frac{r}{r'}\right)^n\frac{f(r')}{r'}dr',\tag{iii}$$

它在 $r=0$ 时保持有限, 且取极限 $r\to\infty$ 时趋于零. 将 (iii) 代入 (i) 中且交换求和与积分的次序以得到特征表示

$$u(r,\vartheta)=\frac{1}{\pi}\int_0^r\frac{f(r')}{r}S\left(\frac{r'}{r},\vartheta\right)dr'+\frac{1}{\pi}\int_r^\infty\frac{f(r')}{r'}S\left(\frac{r}{r'},\vartheta\right)dr',\tag{iv}$$

这里

$$\begin{aligned}S(\rho,\vartheta)&=\sum_{n=1}^\infty\rho^n\sin n\vartheta=\operatorname{Im}\sum_{n=1}^\infty(\rho e^{i\vartheta})^n\\&=\operatorname{Im}\left[\frac{1}{1-\rho e^{i\vartheta}}-1\right]=\frac{\rho\sin\vartheta}{1+\rho^2-2\rho\cos\vartheta},\rho>1.\end{aligned}$$

求用 $f(r)=u(r,0)$ 表示的 $u(r,\vartheta)$ 和 $u(x,y)$ 的单积分形式, 这里 $x=r\cos\vartheta, y=r\sin\vartheta$.

回顾表示式 (35.5),(35.6)

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{-\infty}^\infty G(x-x',y)f(x')dx',\\G(x,y)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\frac{\sinh\zeta(H-y)}{\sinh\zeta H}e^{i\zeta x}d\zeta,\end{aligned}\tag{v}$$

它们描述在无限带形区域 $-\infty<x<\infty, 0<y<H$ 内 Laplace 方程的满足

$$\begin{aligned}&u(x,0)=f(x),\\&u(x,H)=0,\quad -\infty<x<\infty\end{aligned}$$

的一个有界解, 注意到 Green 函数的极限形式

$$\begin{aligned}\lim_{H\to\infty}G(x,y)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-|\zeta|y}e^{i\zeta x}d\zeta\\&=\frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2},\quad y>0.\end{aligned}\tag{vi}$$

将上面导出的在半平面 $y>0$ 内对 u 的积分与 (v), (vi) 的规定作比较.

9. 求 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad -\infty<x<\infty,\quad y>0$$

的满足沿 x 轴的混合 (即不同型) 边界条件

$$u(x,0)=f(x),\quad x>0,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0,\quad x<0$$

的解, 应用包含平面极角变量的变换关系式

$$u(r,\vartheta)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}U(r,n)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta$$

和

$$U(r,n)=\int_0^{\pi}u(r,\vartheta)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta d\vartheta,\quad n=0,1,\cdots$$

10. 积分表示式

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x')\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4kt}\right]dx' \tag{i}$$

表示扩散方程满足初始条件

$$u(x,0)=f(x),\quad -\infty<x<\infty$$

的解, 当 t 变得很大, 保持 k 任意固定时, 用指数函数

$$\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4kt}\right]=\exp\left[-\frac{x^2}{4kt}\right]\cdot\exp\left[\frac{xx'}{2kt}-\frac{x'^2}{4kt}\right]$$

的近似, 容许有一个容易的估计; 为此应用按照 t 的倒数幂的展开式

$$\exp\left[\frac{xx'}{2kt}-\frac{x'^2}{4kt}\right]=1+\frac{xx'}{2kt}-\frac{x'^2}{4kt}+\frac{x^2x'^2}{8(kt)^2}+\cdots$$

且假设

$$|x|^p f(x)\to 0\quad 当\quad x\to\infty,\quad p=0,1,\cdots$$

得到一个展开式

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\exp\left[-\frac{x^2}{4kt}\right]\left[A_0+\frac{x}{2kt}A_1+\frac{x^2-2kt}{8(kt)^2}A_2+\cdots\right], \tag{ii}$$

它带有系数

$$A_p=\int_{-\infty}^{\infty}x^p f(x)dx,\quad p=0,1,\cdots$$

一种替代方法依赖于积分

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\zeta)e^{i\zeta x-k\zeta^2 t}d\zeta, \tag{iii}$$

它给予初始分布的 Fourier 变换

$$F(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\zeta x}dx$$

以显著地位. (iii) 中显示出, 在 t 的范围中对积分的重大贡献是与 ζ 的小的值相联系的; 展开 $F(\zeta)$ 为 ζ 的幂级数, 证明所得表示式

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\left[A_0-A_1\frac{d}{dx}-\frac{1}{2}A_2\frac{d^2}{dx^2}+\cdots\right]e^{-x^2/4kt},$$

与 (ii) 完全一致.

(ii) 中每一项满足该齐次扩散方程, 特别地第一项描述了强度为

$$A_0=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$$

的位于原点 $x=0$ 的一个瞬时 (简单) 源; 接着的项显示在 $t=0$ 是更强的奇点, 称为双极点, 四极点, $\cdots$ 类型的源, 且所有的项都归入一般形式

$$t^{-p/2}\mathcal{F}_p\left(\frac{x}{\sqrt{kt}}\right),\quad p=0,1,\cdots$$

11. 在导电 (和电阻) 介质中低频电磁场的变化近似地受一个扩散型偏微分方程支配; 设 $E(x,t)$ 表示半空间 $x>0$ 中 (向量) 电场的一个 (标量) 分量, 且假设方程

$$\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{c^2}{\sigma}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2},$$
$$E(0,t)=f(t),\quad t>0,\quad E(x,0)=0,\quad x>0,$$
$$E\to 0,\quad x\to\infty,\quad t>0$$

是适用的; 这里 σ 确定电导参数, 而 c 是真空中光速 (它的出现是由于考虑了电磁场强度所采用的单位). 得出用 $f(t'),0<t'<t$ 的前面的值对 $E(x,t)$ 的一个积分表示, 然后导出瞬时能量损耗公式

$$Q(t)=\int_0^{\infty}\sigma E^2(x,t)dx=\frac{1}{2}c\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}}\int_0^t\frac{f(t')f(t'')}{[2t-t'-t'']^{3/2}}dt'dt''. \tag{i}$$

基于 Parseval 等式

$$\int_0^{\infty}E^2(x,t)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}[F(t,\zeta)]^2d\zeta$$

和

$$F(t,\zeta)=\int_0^\infty E(x,t)\sin\zeta x dx,$$

给出 (i) 的另一种推导.

12. 方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{i}$$

$$u(0,t)=f(t),\quad t>0,\quad u(x,0)=0,\quad x>0, \tag{ii}$$

$$u\to 0,\quad x\to\infty,\quad t>0 \tag{iii}$$

的解也能通过对所规定的边界函数的 Fourier 积分表示, 即

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega,\quad t>0 \tag{iv}$$

和

$$F(\omega)=\int_0^\infty f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{v}$$

来求得. 由于当

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}-\frac{i\omega}{k}\right]X=0\quad 或\quad X=\exp\left[\pm\sqrt{\frac{i\omega}{k}}x\right]$$

时, $u(x,t)=X(x)e^{i\omega t}$ 刻画偏微分方程 (i) 的一个分离变量解, 解的更一般形式

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A(\omega)\exp\left(-\sqrt{\frac{i\omega}{k}}x\right)+B(\omega)\exp\left(+\sqrt{\frac{i\omega}{k}}x\right)\right]e^{i\omega t}d\omega \tag{vi}$$

被提出. 考虑到

$$\sqrt{\pm i}=\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$$

和

$$\exp\left[\sqrt{\frac{i\omega}{k}}x\right]=\exp\left[(1\pm i)\sqrt{\frac{|\omega|}{2k}}x\right],\quad \pm\to\omega\gtrless 0,$$

渐近性质 (iii) 规定选择 $B(\omega)=0$, 且 (vi) 的随之得出的变化形式

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega)\exp\left[-\sqrt{\frac{i\omega}{k}}x+i\omega t\right]d\omega$$

满足边界条件 $u(0,t)=f(t)$, 如果

$$A(\omega)=F(\omega).$$

这样

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{0}^{\infty}f(t')\exp\left[i\omega(t-t')-\sqrt{\frac{i\omega}{k}}x\right]dt' \qquad \text{(vii)}$$

可以认为它表示 (i) – (iii) 的解; 在对 ω 积分且确认所得结果与前面习题 4 的结果, 即

$$u(x,t)=\frac{x}{2\sqrt{\pi k}}\int_{0}^{t}\frac{f(t')}{(t-t')^{3/2}}\exp\left[-\frac{x^2}{4k(t-t')}\right]dt' \qquad \text{(viii)}$$

一致之后, (vii) 是 (i) – (iii) 的解就得到肯定. 在复平面 (将 ω 看成复变量) 上积分的方法适合于这一目的, 且 (将积分周线位置从实轴转移到半虚轴) 给出

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\omega t-\sqrt{\frac{i\omega}{k}}x\right]d\omega=0, \qquad t<0,$$

$$=2\int_{0}^{\infty}e^{-\mu t}\sin\sqrt{\frac{\mu}{k}}x d\mu$$

$$=4\int_{0}^{\infty}e^{-\nu^2 t}\sin\frac{x\nu}{\sqrt{k}}\nu d\nu=4\sqrt{k}\frac{\partial}{\partial x}\int_{0}^{\infty}e^{-\nu^2 t}\cos\frac{x\nu}{\sqrt{k}}d\nu$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{k}}\frac{x}{t^{3/2}}\exp\left[-\frac{x^2}{4kt}\right], \qquad t>0;$$

然后能直接验证 (vii) 和 (viii) 实际上是同样的表示.

虽然 (viii) 的较简单形式只是一个单积分, 除了 $f(t)$ 的很少几个具体函数外实际的计算是不可能的; 另一方面, (vii) 中对 t' 的积分定义 $f(t)$ 的 Fourier 变换, 在许多情形下能解析地求出来. 特别地假设

$$f(t)=\exp[-t/\tau]$$

导出对 $u(x,t)$ 的一个实单积分表示; 检验在 $x=0$ 处所要求的性状, 得出当 τ 很小时的一个估计.

13. 考虑函数 $u(x,t)$ 满足方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \alpha>0, \quad x>0, \qquad \text{(i)}$$

$$u(0,t)=U, \quad t>0, \quad u(x,0)=0, \quad x>0 \qquad \text{(ii)}$$

和

$$u, \frac{\partial u}{\partial x}\to 0, \quad x\to\infty, \quad t>0.$$

对 $u(x,t)$ 关于自变量 x 用 Fourier 正弦表示是有利的, 包含 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 的项可换成包含 u 本身的项; 验证这是用变换

$$u(x,t)=\exp\left[-\frac{\alpha}{2k}x\right]v(x,t)$$

的方法来实现的, 证实从 (i), (ii) 得出的对 $v(x,t)$ 的规定是

$$\frac{\partial v}{\partial t}=k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\alpha^2}{4k}v,$$
$$v(0,t)=U,\quad t>0,\quad v(x,0)=0,\quad x>0$$

和

$$v,\frac{\partial v}{\partial x}\to 0,\quad x\to\infty,\quad t>0.$$

应用积分表示和积分变换对

$$v(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V(t,\zeta)\sin\zeta x d\zeta,$$
$$V(t,\zeta)=\int_0^\infty v(x,t)\sin\zeta x dx$$

首先决定 $V(t,\zeta)$, 然后证明

$$u(x,t)=Ue^{-\alpha x/2k}-\frac{2}{\pi}U\exp\left[-\frac{\alpha}{2k}\left(x+\frac{1}{2}\alpha t\right)\right]\int_0^\infty\frac{\sigma\sin\frac{\alpha x}{2k}\sigma}{\sigma^2+1}e^{-\frac{\alpha^2 t}{4k}\sigma^2}d\sigma.$$

讨论取极限 $x\to\infty, t\to\infty$ 的情形且与其中 $\alpha=0$ 的情形作比较.

14. 考虑一密度为 ρ 的均匀弦沿 x 轴拉紧, 在一对轻的 (无质量) 环之间, 这两环能沿分别位于直线 $x=0$ 和 $x=L$ 上的细金属线上自由滑动, 假设在 $x=L$ 的环给出一个规定的位移 $y(L,t)=f(t)$, 且一个大小为 $k\left(\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)\Big|_{x=0}$ 的摩擦阻力作用于在 $x=0$ 处的环上. 研究对该弦的小横向位移 $y(x,t)$ 的相关方程组, 即

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},\quad 0<x<L,$$
$$\rho c^2\frac{\partial y}{\partial x}=k\frac{\partial y}{\partial t}\quad 在\quad x=0,$$
$$y(L,t)=f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(\omega)e^{i\omega t}d\omega,$$

借助于 Fourier 积分表示

$$y(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\left[A(\omega)e^{i\frac{\omega x}{c}}+B(\omega)e^{-i\frac{\omega x}{c}}\right]e^{i\omega t}d\omega;$$

找出用 $F(\omega)$ 表示 $A(\omega), B(\omega)$ 的显式表示.

15. 设沿 x 方向的一维波传播满足线性偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad k > 0. \tag{i}$$

得出对应于表示成 Fourier 积分形式

$$u(x,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta)e^{i\zeta x}d\zeta$$

的初始扰动的 (i) 的解.

16. 给出弹性杆的横向振动 $u(x,t)$ 的偏微分方程

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + k^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < L$$

和边界条件

$$u(0,t) = f(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = g(t),$$
$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=L} = 0, \quad \left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{x=L} = 0;$$

用 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的 Fourier 变换求该问题的解.

第三十六章

Legendre 多项式和有关展开式

对带有合适补充条件的线性偏微分方程的分析已经描述过的方法有类似形式, 其中本征函数、正交展开式和积分变换刻画不同类型的特殊函数. 即使对这些函数及其应用的有限研究都将需要相当大的篇幅, 且由于这个原因, 仅对两种著名函数, 分别称为 Legendre 函数和 Bessel 函数在本章和下一章中用各种说明性例子来进行详细讨论.

把含三个笛卡儿变量 (x, y, z) 的势函数的 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

转换成变系数方程

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}+\frac{\cot\vartheta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]u=0, \tag{36.1}$$

这里 (r, ϑ, φ) 表示球极坐标而

$$x=r\sin\vartheta\cos\varphi,\quad y=r\sin\vartheta\sin\varphi,\quad z=r\cos\vartheta$$

定义了变换方程; 新变量的整个变化区域是

$$0\leqslant r<\infty,\quad 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\varphi<2\pi.$$

如果势函数有轴对称性 (如 z 轴), 则方位角 φ 不出现于 u 的自变量中, (36.1) 取形式

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)=0. \tag{36.2}$$

引入对 u 的分离变量表示式

$$u(r,\vartheta)=R(r)S(\vartheta), \tag{36.3}$$

从 (36.2) 推导出函数 R,S 必须满足带有共同分离常数 λ 的分别的常微分方程

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{\lambda R}{r^2}=0 \tag{36.4}$$

和

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dS}{d\vartheta}\right)-\lambda S=0. \tag{36.5}$$

方程 (36.4) 是等量纲型方程 (Euler 方程), 且有包含一对任意常数 C_1,C_2 的通解

$$R(r)=C_1r^{-1/2}r^{\frac{1}{2}\sqrt{1+4\lambda}}+C_2r^{-1/2}r^{-\frac{1}{2}\sqrt{1+4\lambda}}. \tag{36.6}$$

方程 (36.5) 在 $\vartheta=0$ 和 $\vartheta=\pi$ 有奇点, 这意味着决定其有界解成为重要的, 除非对称轴从有兴趣的区域中排除. 设 (36.5) 中的角变量 ϑ 换成 $\xi=\cos\vartheta$, 则

$$\frac{d}{d\vartheta}=\frac{d\xi}{d\vartheta}\frac{d}{d\xi}=-\sin\vartheta\frac{d}{d\xi}$$

且 (36.5) 转换成 Legendre 方程

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{dS}{d\xi}\right]-\lambda S=0. \quad -1<\xi<1. \tag{36.7}$$

采用幂级数表示

$$S(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\xi^n$$

代入 (36.7) 中, 随之得出的恒等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nn(n-1)\xi^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[n(n+1)+\lambda]\xi^n$$

提供了递推公式

$$a_{n+2}(n+2)(n+1)=a_n[n(n+1)+\lambda], \quad n=0,1,\cdots \tag{36.8}$$

它使此级数的系数 a_n 互相关联. 系数对 a_0, a_1 能任意指定, 然后 (36.8) 唯一决定

$$a_2, a_4, \cdots, a_{2n}, \cdots \text{ 用 } a_0,$$
$$a_3, a_5, \cdots, a_{2n+1}, \cdots \text{ 用 } a_1,$$

这样确定的 (36.7) 的线性无关级数解

$$S_1(\xi) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (a_{2n}/a_0)\xi^{2n}, \quad S_2(\xi) = a_1 \sum_{n=0}^{\infty} (a_{2n+1}/a_1)\xi^{2n+1},$$

分别包含 ξ 的偶次或奇次幂. 对 λ 的任意值, 这些级数在区间的端点 $\xi = \pm 1$ 发散 (由于 $a_{n+2}/a_n \to 1$, 当 $n \to \infty$) 且一般也是不合适的; 当 λ 取特征 (或本征) 值

$$\lambda = -n(n+1), \quad n = 0, 1, \cdots \tag{36.9}$$

之一时, 级数只有有限项, 因而定义该常微分方程的一个有界的多项式解. 这些解称为整数次 Legendre 多项式 $P_n(\xi)$, 且

$$S_n(\vartheta) = P_n(\cos\vartheta), \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$$

是势函数 (36.3) 的相伴角因子.

按照由 (36.9) 所规定的 λ, 径向因子 (36.6) 成为

$$R_n(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-n-1},$$

因此 (36.2) 的通解可表示成

$$u(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right] P_n(\cos\vartheta), \tag{36.10}$$

这里角因子在整个区间 $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$ 上有限; 如果 u 在原点 $r = 0$ 保持有限, r 的倒数幂项必须排除 (通过选择 $B_n = 0$); 类似地, r 的任何正幂的保留依 u 在离原点很大距离处的规定性状而定.

在 (36.10) 中有一个不依赖于 ϑ 的特殊项, 即

$$u = 1/r, \tag{36.11}$$

它本身就是有意义的而且便于描述各 Legendre 多项式; 上面的 (36.11) 构成势方程的在原点具有奇点的一个基本解或源解, 且如果奇点转移到 z 轴 ($\vartheta = 0$) 上与原点有距离 R 的一个点上, 则对应的基本解有轴对称形式

$$u(r, \vartheta) = [R^2 + r^2 - 2rR\cos\vartheta]^{-1/2}. \tag{36.12}$$

(36.12),(36.10) 之间的连接是必需的, 即

$$[R^2 - 2rR\cos\vartheta + r^2]^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}]P_n(\cos\vartheta), \tag{36.13}$$

这里系数 A_n, B_n 能利用左边部分的已知性态来找到. 为此在 (36.13) 中令 $\vartheta = 0$, 且应用规范化

$$P_n(1) = 1, \text{ 对所有 } n, \tag{36.14}$$

这得到关系式

$$\frac{1}{|R-r|} = \sum_{n=0}^{\infty}[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}], \quad r \neq R.$$

如果 $0 \leqslant r < R$, 则

$$\frac{1}{|R-r|} = \frac{1}{R-r} = \frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n,$$

因而得出确定式

$$A_n = \frac{1}{R^{n+1}}, B_n = 0, n = 0, 1, \cdots, r < R. \tag{36.15}$$

此外, 如果 $r > R$, 则

$$\frac{1}{|R-r|} = \frac{1}{r-R} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n,$$

所以

$$A_n = 0, \quad B_n = R^n, \quad n = 0, 1, \cdots, r > R.$$

因此有互补的展开式

$$(R^2 - 2rR\cos\vartheta + r^2)^{-1/2} = \begin{cases} \dfrac{1}{R}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\vartheta), & 0 \leqslant r < R, \\ \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\cos\vartheta), & r > R, \end{cases} \tag{36.16}$$

这反映 Legendre 多项式的 (生成) 函数的对称性; 这些展开式在球面 $r = R$ 上除了基本源函数 (36.12) 中的奇点的特定位置 $(r = R, \vartheta = 0)$ 外光滑地连接在一起. 上面这一对展开式联合地构成一个单独的式子

$$H(\xi, t) = (1 - 2t\xi + \xi^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\xi)t^n, \quad |t| < 1, \quad |\xi| < 1, \tag{36.17}$$

由于它有明显的性质

$$H(-\xi,-t)=H(\xi,t),$$

推断出

$$P_n(-\xi)=(-1)^n P_n(\xi). \tag{36.18}$$

事实上, Legendre 多项式是描述方程为

$$L[y]=\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]=-\lambda y,\quad -1<x<1$$

和

$$U_1[y]=(1-x^2)\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1}=0,$$

$$U_2[y]=(1-x^2)\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=-1}=0$$

的自伴齐次边值问题的本征函数. 由于

$$\int_{-1}^{1} yL[y]dx=-\lambda\int_{-1}^{1} y^2dx=-\int_{-1}^{1}(1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

最小的本征值 $\lambda=0$ 对应于一个常本征函数 $P_0(x)=1$, 且本征值的完全集

$$\lambda=n(n+1),\quad n=0,1,\cdots$$

取非负值.

本征函数 $P_n(x)$ 的正交性由相关的边值问题的自伴性推断出, 可以联合以下一对不同的微分方程

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n\right]+n(n+1)P_n=0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_m\right]+m(m+1)P_m=0$$

而容易地证实; 确切的表述

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx=0,\quad m\neq n \tag{36.19}$$

反映按直接方式的正交性, 且与变体

$$\int_0^{\pi} P_m(\cos\vartheta)P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta=0,\quad m\neq n \tag{36.20}$$

相比, 后者有一个权因子 $\sin\vartheta$.

这些多项式的生成函数 $H(\xi,t)$ 推断出它们的规范化 (36.14), 只要在 (36.17) 中令 $\xi=1$, 并且注意结果

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)t^n,\quad t<1.$$

为计算

$$N_n=\int_{-1}^{1}P_n^2(\xi)d\xi$$

的值, 构造生成函数的平方

$$\frac{1}{1-2\xi t+t^2}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}t^m t^n P_m(\xi)P_n(\xi)$$

且在 $\xi=-1$ 和 $\xi=+1$ 之间积分; 利用正交关系式 (36.19), 由此得出:

$$N_n = \text{以下积分展开式中 } t^{2n} \text{的系数},$$

$$I(t)=\int_{-1}^{1}\frac{dt}{1-2\xi t+t^2}=-\frac{1}{\xi}\ln\frac{1-\xi}{1+\xi}.$$

现在

$$\ln(1-\xi)=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\xi^m}{m},$$

因此

$$-\ln\frac{1-\xi}{1+\xi}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\xi^{2m+1}}{2m+1},$$

所以

$$N_n=\int_{-1}^{1}P_n^2(\xi)d\xi=\frac{2}{2n+1},\quad n=0,1,\cdots \tag{36.21}$$

开始几个 $P_n(x)$ 的显式是

$$P_0=1, P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-2), \tag{36.22}$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\quad P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).$$

依靠 Legendre 多项式的类似于三角级数或 Fourier 展开的展开式, 即对任意可积函数 $f(x)$

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n(x),\quad -1<x<1 \tag{36.23}$$

可以通过系数的规定

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx, \quad n = 0, 1, \cdots \tag{36.24}$$

而确定; 展开式 (36.23) 仅在有限区间 $-1 < x < 1$ 上有意义, 并没有基于三角函数的正交集的 Fourier 展开式的周期性特征. 在生成函数的跳跃不连续点 x^* 处, 展开式 (36.23) 的收敛性正好由关系式

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x^*) = \frac{f(x^*+0) + f(x^*-0)}{2} \tag{36.25}$$

确定.

为了阐明, 取在原点不连续的特殊的函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & -1 < x < 0, \end{cases} \tag{36.26}$$

则展开式 (36.23) 的系数表示成

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^1 P_n(x)dx.$$

利用对 $P_n(x)$ 的微分方程, 由此得出

$$n(n+1)\int_0^1 P_n(x)dx = -(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{d}{dx}P_n(x)\bigg|_{x=0},$$

考虑到给出的规定

$$\frac{d}{dx}P_{2n}(x)\bigg|_{x=0} = 0, \quad n > 0,$$
$$\frac{d}{dx}P_{2n+1}(x)\bigg|_{x=0} = (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots 2n}, \quad n > 0,$$

就有相关的结果

$$\int_0^1 P_{2n}(x)dx = 0 \tag{36.27}$$

和

$$\int_0^1 P_{2n+1}(x)dx = \frac{\left(\dfrac{dP_n}{dx}\right)_{x=0}}{(2n+1)(2n+2)} = (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\frac{1}{2n+2}.$$

利用这些式子, 连同简单的计算求值

$$\int_0^1 P_0(x)dx = 1, \quad \int_0^1 P_1(x)dx = \frac{1}{2},$$

用 Legendre 多项式表示的所要求的函数 (36.26) 展开式最后是

$$f(x) \sim \frac{1}{2}P_0 + \frac{3}{4}P_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4n+3}{4n+4}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}P_{2n+1}(x), \quad -1 < x < 1. \tag{36.28}$$

代入值

$$x = \pm 1, \quad f(x) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

给出分别的数值级数关系式

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4n+3}{4n+4}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}$$

和

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4n+3}{4n+4}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n},$$

它们显然是相同的. 在 $x=0$ 处, (36.28) 的右边简化为 1/2, 恰好是极限值 $f(x\pm 0)$ 的算术平均值, 与 (36.25) 一致.

常微分方程

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\right]Y_n + n(n+1)Y_n = 0$$

的通解是第一类 Legendre 函数 $P_n(x)$ 和第二类 Legendre 函数 $Q_n(x)$ 的线性组合, 即

$$Y_n(x) = C_1P_n(x) + C_2Q_n(x);$$

$Q_n(x)$ 展示在 $x = \pm 1$ 处的无界性状, 由于这两点是该常微分方程的奇点; 此外, 可以注意到多项式 $P_n(x)$ 和其无关 (非多项式) 函数 $Q_n(x)$ 在区间 $|x| < 1, |x| > 1$ 上都有确切定义.

考虑由 x, y 平面所界定在它们的正侧 $(z > 0)$ 无限扩展的一个固体. 设在圆 $x^2 + y^2 = a, z = 0$ 内部维持均匀温度 1, 而该平面的所有其余点温度为零 (见图 57); 假设要确定该固体内的定常温度 $u(r, \vartheta)$, 即要求 (36.2)

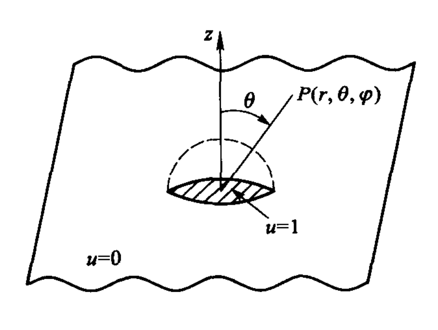


图 57

的满足边界及渐近条件

$$u = \begin{cases} 1, & 0 < r < a \\ 0, & r > a \end{cases}, \quad \vartheta = \frac{1}{2}\pi,$$

$$u \to 0, \quad r \to \infty, \quad 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$$

的解.

展开式

$$u(r,\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n-1}(\cos\vartheta), \quad r > a$$

和

$$u(r,\vartheta) = P_0(\cos\vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{r}{a}\right)^{2n-1} P_{2n-1}(\cos\vartheta), \quad 0 \leqslant r < a$$

是合适的, 因为

$$P_{2n-1}(0) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

和 $P_0 = 1$. 在半球面

$$r = a, \quad 0 < \vartheta < \frac{1}{2}\pi, \quad z > 0$$

上的两个要求, 即 u 和 $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ (即温度和法向热流量) 的连续性提供了决定系数 a_n, b_n 的关键, 而此半球面构成上述两展式适用的两区域之间的边界; 由 $u, \dfrac{\partial u}{\partial r}$ 在 $r = a$ 的连续性得出关系式

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) P_{2n-1}(\cos\vartheta) = 0, \quad 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}, \tag{36.29}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n (2n-1) P_{2n-1}(\cos\vartheta) = -\sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n P_{2n-1}(\cos\vartheta), \quad 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}.$$

由后者 (因为 Legendre 多项式是线性无关的) 得出

$$b_n = -\frac{2n}{2n-1} a_n,$$

因此

$$b_n - a_n = -\frac{4n-1}{2n-1} a_n,$$

所以 (36.29) 的第一个表示式取只包含 a_n 的形式是

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{2n-1} a_n P_{2n-1}(\cos\vartheta), \quad 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \tag{36.30}$$

由于 Legendre 多项式构成区间 $0 < \vartheta < \pi$ 而不是 $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ 上的正交集这一事实, 考虑表示式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n P_{2n-1}(\cos\vartheta) = \begin{cases} 1, & 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}, \\ -1, & \frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi, \end{cases}$$

其中两部分关于 $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ 有反对称性状; 然后系数 γ_n 由关系式 (回忆 (36.20), (36.21))

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2} \sin\vartheta P_{2n-1}(\cos\vartheta)d\vartheta - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\vartheta P_{2n-1}(\cos\vartheta)d\vartheta \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \sin\vartheta P_{2n-1}(\cos\vartheta)d\vartheta \\
&= \gamma_n \frac{2}{2(2n-1)+1} = \gamma_n \frac{2}{4n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots
\end{aligned}$$

得到, 即

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_n}{4n-1} &= \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta P_{2n-1}(\cos\vartheta)d\vartheta = \int_0^1 P_{2n-1}(x)dx \\
&= (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots 2n},
\end{aligned}$$

以上推导中利用了 (36.27) 和奇次 Legendre 多项式的奇对称性

$$P_{2n-1}(-x) = -P_{2n-1}(x).$$

参照 (36.30) 就说明

$$a_n = \frac{2n-1}{4n-1}\gamma_n = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n},$$

且还有

$$b_n = (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)};$$

这样, 互补展开式

$$\begin{aligned}
u(r,\vartheta) = &\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_1(\cos\vartheta) - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{a}{r}\right)^4 P_3(\cos\vartheta) \qquad (r > a) \\
&+ \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n-1}(\cos\vartheta) + \cdots
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
u(r,\vartheta) = &P_0 - \frac{r}{a}P_1(\cos\vartheta) + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^3 P_3(\cos\vartheta) \qquad (r < a) \\
&+ \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\vartheta) + \cdots
\end{aligned}$$

刻画整个半空间 $0 \leqslant r < \infty, 0 < \vartheta < \pi/2$ 上所要求的温度分布.

在静电学中有一重要结果, 涉及围绕一任意点电荷系统的球面内的平均场, 这能应用位于 z 轴上与坐标原点距离为 s 的点电荷 e 的电势的展开式 (见图 58)

$$u(r,\vartheta) = e[s^2 - 2rs\cos\vartheta + r^2]^{-1/2} = \frac{e}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n P_n(\cos\vartheta), \quad s < r \qquad (36.31)$$

而容易地证明. 电场强度向量与标量势函数的梯度成比例, 即

$$\underline{E} = -\nabla u,$$

它在半径 a 的球形区域上的平均值

$$\langle \underline{E} \rangle = \frac{1}{V}\int \underline{E} dV = -\frac{3}{4\pi a^3}\int \nabla u dV,$$

有包含其边界曲面上积分的一个替代表示式

$$\langle \underline{E} \rangle = -\frac{3}{4\pi a^3}\int u d\underline{A},$$

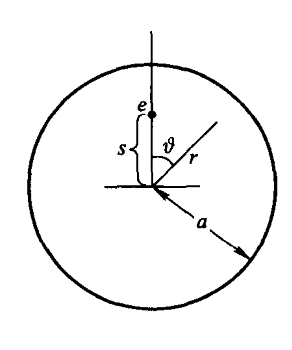


图 58

这里 $d\underline{A}$ 表示向量面积元素.

该场关于 z 轴的明显对称性推断出此平均场仅有一个 z 分量, 考虑到表示式 (36.31) 和 Legendre 多项式的正交性质, 所以

$$\begin{aligned}
\langle \underline{E} \rangle_z &= -\frac{3}{4\pi a^3}\int u \cos\vartheta dA \\
&= -\frac{3}{4\pi a^3}\int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} [u(a,\vartheta)\cos\vartheta] \cdot a^2 \sin\vartheta d\varphi \\
&= -\frac{3}{2a}\int_0^{\pi} u(a,\vartheta) P_1(\cos\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta = -\frac{es}{a^3}.
\end{aligned}$$

这结果有另一形式, 即用该电荷对原点的**电矩**

$$\underline{m} = se\underline{k}$$

来表示

$$\langle \underline{E} \rangle = -\frac{1}{a^3}\underline{m},$$

前面的 $\underline{k}$ 表示 z 方向的单位向量; 如果

$$\underline{m} = \sum_i e_i \underline{r}_i$$

表示聚集在位置 $\underline{r}_i$ 的电荷的总电矩, 则上式也适用于大的求平均的体积内的任意 (不相互作用的) 电荷系统. 在一个中性 (或纯量为零) 电荷聚集的环境, $\underline{m}$ 不依赖于坐标原点的选择且称为**电双极矩**.

习　题　36

1. 证明

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\frac{d}{dx}P_m\frac{d}{dx}P_n dx=0,\quad m\neq n$$

和

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\left(\frac{d}{dx}P_n\right)^2 dx=\frac{2n(n+1)}{2n+1}.$$

2. 在生成函数方程

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n(x)$$

中对变量 t 作适当的选取且证明对实数 σ

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)}{(\cosh 2\sigma-x)^{1/2}}dx=\frac{2^{3/2}}{(2n+1)e^{(2n+1)\sigma}},$$

然后求出展开式

$$f(x,\sigma)=(\cosh 2\sigma-x)^{-1/2}\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n(x),\quad -1<x<1$$

中的系数, 讨论后者的一些特殊情形.

3. 利用积分

$$\int_0^1(1-2xt+t^2)^{-1/2}xdx$$

去证实

$$\int_0^1 xP_n(x)dx=0,\quad n \text{ 为奇数},$$

计算

$$\int_0^1 xP_{2n}(x)dx.$$

得出关于函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1<x\leqslant 0,\\ x, & 0\leqslant x<1\end{cases}$$

利用偶次 Legendre 多项式展开的细节, 考虑在 $x=0$ 时此展式的含意.

4. 函数

$$f(\vartheta)=\begin{cases}1, & 0<\vartheta<\pi/2,\\ -1, & \pi/2<\vartheta<\pi\end{cases}$$

在整个球面的上 (北) 和下 (南) 半球两部分取符号相反的单位值, 容许有包含奇次 Legendre 多项式的一个展开式

$$f(\vartheta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} P_{2n+1}(\cos\vartheta), \quad 0 < \vartheta < \pi.$$

在北和南半球面分别取值 $A+B$ 和 $A-B$ 的对应函数能如何表示? 找出在两半球表面

$$r = R, \begin{cases} 0 < \vartheta < \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi}{2} < \vartheta < \pi \end{cases}$$

上等于 $A \pm B$ 而在范围 $r > R, r < R$ 内正则 (有界) 的调和函数.

5. 设一个点电荷 e 位于其表面是零水平的等势面的一个基球外; 设对应的外势函数写成复合形式

$$u(r,\vartheta) = u_1(r,\vartheta) + u_2(r,\vartheta),$$

这里 u_1 表示奇异 (或源) 部分而 u_2 是处处有界的, 随着离该球的距离增加两者均趋于零. 如果电荷位于极轴 ($\vartheta = 0$) 上与半径为 R 的该球中心的距离为 d, 则

$$u_1(r,\vartheta) = e[d^2 + r^2 - 2rd\cos\vartheta]^{-1/2}.$$

求得对 $u_2(r,\vartheta)$ 的一个级数展开式且验证此级数有显式和

$$u_2(r,\vartheta) = \frac{-e\dfrac{R}{d}}{\sqrt{\left(\dfrac{R^2}{d}\right)^2 - 2\dfrac{R^2}{d} r\cos\vartheta + r^2}}, \quad \frac{R}{d} < 1,$$

它描述了与该球中心相距 $R^2/d(< R)$ 处电量为 $-eR/d(< e)$ 的一点电荷的电势; 后者或原电荷的像位于球内, 在 e 所占点关于球面的反演点处. 从表示式

$$-e\frac{\partial}{\partial r}u_2\bigg|_{r=a,\vartheta=0}$$

计算在给定电荷上径向地指向球面的引力, 应用结果

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}, \quad \alpha < 1$$

得到该力的显式表示. 计算在面临该电荷 e 的半个球表面上

$$-\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R}$$

的积分, 且确定其上诱导电荷的总量.

6. 设要求确定球面 $r = R$ 外的势函数, 它在球外 $r = d, \vartheta = 0$ 处有单独一个奇点, 且其法向 (径向) 导数在球面上处处为零, 又取极限 $r \to \infty$ 时它本身趋于零值; 此函数与围绕一刚体球面 (在该处流体速度的法向分量必须为零) 的不可压缩非黏性流体内一个点源的问题有关. 引入前面问题中所用的外势函数的复合形式

$$u(r, \vartheta) = u_1(r, \vartheta) + u_2(r, \vartheta),$$

其中

$$u_1(r, \vartheta) = e[d^2 + r^2 - 2rd\cos\vartheta]^{-1/2}$$

表示奇异项, 推导出对正则项 $u_\alpha(r, \vartheta), r > R$ 的级数展开式. 验证关系式

$$\int_0^b \frac{d\lambda}{(r^2 - 2r\lambda\cos\vartheta + \lambda^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{r}\right)^{n+1} \frac{P_n(\cos\vartheta)}{n+1},$$

用它去证明

$$u_2(r, \vartheta) = \frac{e\dfrac{R}{d}}{\sqrt{\left(\dfrac{R^2}{d}\right)^2 - 2\dfrac{R^2}{d}r\cos\vartheta + r^2}} - \frac{e}{R}\int_0^{R^2/d} \frac{d\lambda}{\sqrt{r^2 - 2r\lambda\cos\vartheta + \lambda^2}}, \quad R/d < 1.$$

这里第一项确定位于外源点关于球面的反演点 (或像) 上强度为 eR/d 的一个源, 而第二项表示从反演点 $(R^2/d, 0)$ 扩展到球心的一条源线.

7. 假设球腔外为均匀的绝缘介质, 要求球腔 (即球形空洞 —— 校注) 中一个偏心点电荷 e 的场的静电势函数 u. 如果半径等于 R 的球腔的中心与坐标原点重合, 且电荷 e 位于 z 轴 $(\vartheta = 0)$ 上与中心的距离为 s 的地方, 则合适的表示是

$$u = \begin{cases} u_0 + u_1, & 0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \vartheta < \pi, \\ u_2, & r > R, \quad 0 \leqslant \vartheta < \pi, \end{cases}$$

这里

$$u_0 = e[r^2 - 2rs\cos\vartheta + s^2]^{-1/2}$$

且 $u_1(r, \vartheta), u_2(r, \vartheta)$ 构成 Laplace 方程的有界解. 利用边界条件和极限条件

$$u_0(0, \vartheta) + u_1(0, \vartheta) = \text{有限},$$

$$\left. u_0 + u_1 \right|_{r=R} = \left. u_2 \right|_{r=R}, \qquad 0 \leqslant \vartheta < \pi$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial r}(u_0 + u_1) \right|_{r=R} = \epsilon \left. \frac{\partial}{\partial r} u_2 \right|_{r=R},$$

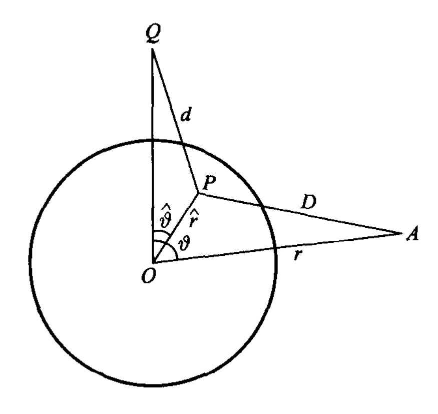
和

$$u_2 \to 0, \quad r \to \infty,$$

这里 ϵ 是在 $r > R$ 中介质的电介质常数, 导出对 u_1, u_2 的显式表示. 在 $\epsilon \to \infty$ 的极限情况下, 该解取什么形式?

8. 考虑一固体球, 它在任意点 P 处的质量密度与 P 到球外一固定点 Q 的距离成反比, 如图所示, 验证密度表示式

$$\rho(\widehat{r}, \widehat{\vartheta}) = \frac{3Mc}{4\pi R^3}[\widehat{r}^2 - 2\widehat{r}c\cos\widehat{\vartheta} + c^2]^{-1/2},$$



其中用到了该球的全质量 M, 它的半径 R 和 O 与 ϑ 之间的距离 c. 由该球质量引起的在 $A(r, \vartheta, \varphi)$ 处的引力势为 Laplace 方程的一个解, 有形式

$$u(A) = \int_V \frac{\rho(\widehat{r}, \widehat{\vartheta})}{D}\widehat{r}^2 d\widehat{r} \sin\widehat{\vartheta} d\widehat{\vartheta} d\widehat{\varphi}, \tag{i}$$

这里积分展布在球体 V 上,

$$D = [r^2 - 2r\widehat{r}\cos\Theta + \widehat{r}^2]^{1/2}$$

和

$$\cos\Theta = \cos\vartheta\cos\widehat{\vartheta} + \sin\vartheta\sin\widehat{\vartheta}\cos(\varphi - \widehat{\varphi});$$

这里 Θ 表示方向 OP 和 OA 之间的角. 给出展开式

$$P_n(\cos\Theta) = \sum_{m=-n}^{m=n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\vartheta) P_n^m(\cos\widehat{\vartheta}) e^{im(\varphi - \widehat{\varphi})},$$

其中包含阶乘

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

和满足常微分方程

$$\left[\frac{d}{d\xi}(1-\xi^2)\frac{d}{d\xi}+n(n+1)-\frac{m^2}{1-\xi^2}\right]P_n^m(\xi)=0$$

的连带 Legendre 函数 $P_n^m(\xi)$, 从积分 (i) 得到一个级数等价表示式

$$u(r,\vartheta)=\frac{3M}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R^2}{rc}\right)^n\frac{P_n(\cos\vartheta)}{(2n+1)(2n+3)}.$$

注意渐近估计

$$u\sim\frac{M}{r},\quad r\to\infty,$$

它依赖于该球的总质量而与参照点 O 无关.

9. 有定常电流 I 流过的单个圆形电线回路, 所产生的磁场强度仅在轴向点处有简单的形式; 如果该回路 (半径为 R) 位于平面 $z=0$ 且 C 表示一个量纲常数, 则

$$H_z=C\frac{IR^2}{(R^2+z^2)^{3/2}},\quad H_x=H_y=0. \tag{i}$$

与静电学中一样, 该静磁场一般从一个标量势函数, 即

$$H_x=-\frac{\partial u}{\partial x},\quad H_y=-\frac{\partial u}{\partial y},\quad H_z=-\frac{\partial u}{\partial z},$$

导出, 且由于在现在的结构中对 z 轴的对称性, u 的合适形式是

$$u(r,\vartheta)=\sum_{n=0}^{\infty}[a_nr^n+b_nr^{-n-1}]P_n(\cos\vartheta). \tag{ii}$$

对 (ii) 沿 z 轴 (这里 $r=z,\vartheta=0$) 微分后且随后与 (i) 相等, 利用关系式

$$C\frac{IR^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}=-\sum_{n=0}^{\infty}[a_nnz^{n-1}-b_n(n+1)z^{-n-2}]$$

就能决定系数 a_n,b_n. 证实结果

$$b_n=0,\quad a_{2n}=0,\quad a_1=-\frac{CI}{R},$$
$$a_{2n+1}=CI\frac{(-1)^{n+1}}{R^{2n+1}}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots2n},\quad n\geqslant1,z<R$$

和

$$a_n=0,\quad b_{2n}=0,\quad b_1=\frac{CI}{R^2},$$
$$b_{2n+1}=CI(-1)^n\frac{R^{2n+2}}{2n+2}\frac{1\cdot3\cdots(2n+1)}{2\cdot4\cdots2n},\quad n\geqslant1,z>R,$$

由此通过 (ii) 确定围绕该回路的磁场分量

$$H_r = -\frac{\partial u}{\partial r}, \quad H_\vartheta = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vartheta},$$

以及远离此回路的点处 u 和该场的表示式是什么?

10. 考虑偏微分方程

$$L[\psi] = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \tag{i}$$

由于第二项的符号是负号, 它与按柱极坐标 ρ, z 的 Laplace 方程或势方程的轴对称形式不同. 验证 (i) 的极坐标形式是

$$M[\psi] = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\sin\vartheta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}\right) = 0, \tag{ii}$$

注意存在一个特解

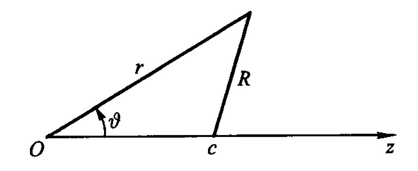
$$\psi = r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \tag{iii}$$

它也满足 (i). 由于坐标原点沿 z 方向的一个任意移位后 (i) 保持形式不变, 从 (iii) 推演出表示式为

$$\psi = R = \sqrt{c^2 + r^2 - 2cr\cos\vartheta} = r\sqrt{1 - \frac{2c}{r}\cos\vartheta + \left(\frac{c}{r}\right)^2},$$

的解的一个单参数族, 这里 (见图) c 能取任意的正值或负值. 设 $R_n(\cos\vartheta)$ 表示生成函数的展开式

$$(1 - 2t\cos\vartheta + t^2)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(\cos\vartheta)t^n \tag{iv}$$



中 t^n 的系数 (与 Legendre 多项式的展式作比较), 然后

$$\psi_n(r, \vartheta) = r^n R_n(\cos\vartheta), \quad n = 0, 1, \cdots$$

确定 (ii) 的一组多项式解; 证实特定规定式

$$
\begin{aligned}
R_0(\cos\vartheta) &= 1, \\
R_1(\cos\vartheta) &= -\cos\vartheta, \\
R_2(\cos\vartheta) &= \frac{1}{2}(1-\cos^2\vartheta), \\
R_3(\cos\vartheta) &= \frac{1}{2}\cos\vartheta(1-\cos^2\vartheta), \\
R_4(\cos\vartheta) &= -\frac{1}{8}(1-6\cos^2\vartheta+5\cos^4\vartheta),
\end{aligned}
$$

求有关多项式的显式表示.

对 $r\to\infty$ 时趋于零的另一组解

$$\overline{\psi}_n(r,\vartheta) = R_n(\cos\vartheta)/r^{n-1}, \quad n\geqslant 2$$

找出几个代表.

验证非齐次偏微分方程

$$L[\psi] = A\rho^2$$

的带有可任意处置常数 α,β,δ 的解, 即

$$\psi(\rho,z) = \rho^2[\alpha+\beta z+\delta\rho^2-4\delta z^2]+\frac{A}{8}\rho^4.$$

如上形式的解描述了一些具有定常旋度的黏性流.

第三十七章

Bessel 函数和有关展开式

表示成径向 (r) 和极角 (ϑ) 变量的函数之积的 Laplace 方程的某些特解可以通过对 ϑ (或 $\xi=\cos\vartheta$) 的 Legendre 常微分方程, 以及满足非常系数的径向因子常微分方程的幂函数解得到. 包括所有三个球极坐标 r,ϑ,φ 的类似解或调和函数可用同样的径向因子, 对方位角变量 φ 的简单周期依赖性, 即

$$\begin{cases}\cos m\varphi, & m=0,1,\cdots, \quad 0<\varphi<2\pi,\\ \sin m\varphi, & m=0,1,\cdots, \quad 0<\varphi<2\pi\end{cases}$$

和满足常微分方程

$$\left[\frac{d}{d\xi}(1-\xi^2)\frac{d}{d\xi}+n(n+1)-\frac{m^2}{1-\xi^2}\right]P_n^m(\xi)=0$$

的连带 Legendre 函数 $P_n^m(\xi)$ 来描述.

为取代 Laplace 偏微分方程, 取一个包含附加项和刻画轴对称性的波运动的方程, 即

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{37.1}$$

且考虑具有周期时间依赖性的解类

$$u(r,\vartheta,t)=R(r)S(\vartheta)\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\omega t.$$

(37.1) 的变量分离产生对 $S(\vartheta)$ 的 Legendre 方程和径向因子常微分方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-\frac{n(n+1)}{r^2}\right]R=0, \tag{37.2}$$

任意单个的幂函数 r^α 并不满足 (37.2). 记

$$R(r)=\frac{Z(r)}{r^{1/2}},$$

$Z(r)$ 满足的方程是

$$\frac{d^2Z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dZ}{dr}+\left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-\frac{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right]Z=0,$$

它是 ν 阶和自变量为 λx 的柱函数的一般方程, 即

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}+\lambda^2-\frac{\nu^2}{x^2}\right)Z_\nu(\lambda x)=0 \tag{37.3}$$

或

$$\left[\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right)+\lambda^2x-\frac{\nu^2}{x}\right]Z_\nu(\lambda x)=0 \tag{37.4}$$

的一种特殊形式.

当 Laplace 算子包含柱极坐标 ρ,ϑ,z 时, 这样的函数直接出现在, 例如偏微分方程

$$\nabla^2u=\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\vartheta^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$$

中; 这里分离变量解

$$u(\rho,\vartheta,z)=R(\rho)e^{in\vartheta}e^{-\lambda z},\quad \rho>0,\quad 0\leqslant\vartheta<2\pi,\quad z>0$$

对 ϑ 是周期变化的, 对 z 是有界变化 (对实的 $\lambda>0$) 的, 径向函数 $R(\rho)$ 有着显著地位, 其定义方程是

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}+\lambda^2-\frac{n^2}{\rho^2}\right]R(\rho)=0.$$

因而

$$R(\rho)=Z_n(\lambda\rho).$$

对满足不等式 $\dfrac{\nu}{x}\gg\lambda$ 的 x 的很小的值, (37.3) 能用

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}-\frac{\nu^2}{x^2}\right)F_\nu(x)=0$$

来近似, 且因而

$$Z_\nu(x) \sim \begin{cases} a_\nu x^\nu + b_\nu x^{-\nu}, & \nu \neq 0, \quad x \ll \nu, \\ a_0 + b_0 \ln x, & \nu = 0, \quad x \ll \nu. \end{cases}$$

因此, 常微分方程 (37.3) 的两个无关解中只有一个在奇点 $x=0$ 保持有界.

(可能复的) 自变量 x 和 (可能复的) 阶 ν 的柱函数可以定义为一对递推关系式

$$\begin{aligned} Z_{\nu-1}(x) + Z_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} Z_\nu(x), \\ Z_{\nu-1}(x) - Z_{\nu+1}(x) &= 2\frac{d}{dx} Z_\nu(x) \end{aligned} \tag{37.5}$$

的解, 或等价地,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} Z_\nu(x) + \frac{\nu}{x} Z_\nu(x) &= Z_{\nu-1}(x), \\ -\frac{d}{dx} Z_\nu(x) + \frac{\nu}{x} Z_\nu(x) &= Z_{\nu+1}(x) \end{aligned} \tag{37.6}$$

的解.

从关系式 (37.6) 的第一式得出

$$\begin{aligned} &x\frac{d^2}{dx^2} Z_\nu + \frac{d}{dx} Z_\nu + \nu \frac{d}{dx} Z_\nu \\ &= x\frac{d}{dx} Z_{\nu-1} + Z_{\nu-1} = (\nu-1) Z_{\nu-1} - x Z_\nu + Z_{\nu-1} \text{ (用第二式)} \\ &= \nu Z_{\nu-1} - x Z_\nu = \nu \left[\frac{d}{dx} Z_\nu + \frac{\nu}{x} Z_\nu\right] - x Z_\nu \text{ (再用第一式)}, \end{aligned}$$

因而再次得到对自变量 x 的柱函数的定义常微分方程 (37.3)

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} + 1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right] Z_\nu(x) = 0. \tag{37.7}$$

方程 (37.7) 按升幂级数形式的特解, 是 Bessel 函数

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{\nu+2n}}{n!\Gamma(\nu+n+1)}; \tag{37.8}$$

这里 $\Gamma(x)$ 表示 Euler Γ 函数, 满足

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

且注意规范化

$$J_0(0) = 1.$$

如果 ν 不是整数, 函数 $J_{-\nu}(x)$ 提供 (37.7) 的第二个并且是线性无关的解, 虽然为了满足递推关系式 (37.6), 它必须乘以一个周期为 1 的 ν 的奇周期函数. 然而, 当 $\nu = m$ 是整数时,

$$J_m(-x) = (-1)^m J_{-m}(x),$$

还需要另一个函数. 为此, 常微分方程 (37.7) 的, 称为 Neumann, C. G. (诺伊曼, 1832—1925) (1867) 函数的第二个解, 其定义为

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\sin\nu\pi}[\cos\nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)], \tag{37.9}$$

而且线性无关的函数 J_ν, N_ν 满足 Wronski 关系式

$$x\begin{vmatrix} J_\nu(x) & N_\nu(x) \\ \dfrac{d}{dx}J_\nu(x) & \dfrac{d}{dx}N_\nu(x) \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi}. \tag{37.10}$$

当 ν 是整数时, 表示式 (37.9) 成为未定式, 于是整数阶 Neumann 函数的定义由取极限步骤得到, 即

$$N_m(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x) - (-1)^m\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(x)\right]_{\nu=m} = (-1)^m N_{-m}(x).$$

特别地

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x)\right]_{\nu=0}. \tag{37.11}$$

从 (37.11) 推演出的整数阶 Neumann 函数的展开式是

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi}\ln\frac{\gamma x}{2}\cdot J_0(x) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x/2)^{2n}}{(n!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \tag{37.12}$$

和

$$\begin{aligned} N_m(x) = {} & \frac{2}{\pi}\ln\frac{\gamma x}{2}\cdot J_m(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-n-1)!}{n!}\left(\frac{2}{x}\right)^{m-2n} \\ & -\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x/2)^{m+2n}}{n!(m+n)!}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+m}\right], \end{aligned} \tag{37.13}$$

这里量 $\gamma = 1.7811$ 与 Euler 常数 $C = \ln\gamma = 0.5722$ 有关, 当 $n = 0$ 时, 最后的和式中的方括号项理解为

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}.$$

引入 Bessel 函数和 Neumann 函数的组合证明是方便的, 即

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x)$$

和

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x),$$

它们分别称为第一类和第二类 Hankel, H. (汉克尔, 1839—1873) (1868) 函数. 此外, 定义

$$I_\nu(x) = e^{-i\nu\pi/2} J_\nu(xe^{i\pi/2})$$

和

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}[I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)] = \frac{\pi i}{2} e^{i\nu\pi/2} H_\nu^{(1)}(ix),$$

规定基本柱函数常微分方程 (37.7) 的修改形式

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - 1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right]\begin{pmatrix} I_\nu(x) \\ K_\nu(x) \end{pmatrix} = 0 \tag{37.14}$$

的线性无关解.

$J_\nu(x)$ 在原点 $x=0$ 附近的性状容易从 (37.8) 推导出, 即

$$J_\nu(x) \doteq \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu, |x| \ll 1;$$

这样, 所有 Bessel 函数, 只要其阶数 ν 非负, 在原点保持有限. 参照 (37.9), 由于 $\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) = \pi\csc\nu\pi$ 表明

$$N_\nu(x) \doteq -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu, \quad \nu > 0,$$

且

$$N_0(x) \doteq \frac{2}{\pi}\ln\frac{\gamma x}{2} \qquad |x| \ll 1,$$

所以没有 Neumann 函数在原点保持有限.

对充分大的 x, Bessel 和 Neumann 函数的性状的标示通过将

$$Z_\nu(\lambda x) = \frac{1}{\sqrt{x}} F_\nu(\lambda x)$$

代入到 (37.3) 而得到, 由此得到描述 $F_\nu(\lambda x)$ 的常微分方程, 即

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 + \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)\frac{1}{x^2}\right] F_\nu(\lambda x) = 0.$$

取极限 $x \to \infty$, 以上方程的比较方程

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2\right]\widehat{F}(\lambda x) = 0$$

表明

$$F_\nu(\lambda x) \sim \widehat{F}(\lambda x) = A\cos(\lambda x - \delta(\nu)),$$

因此

$$Z_\nu(\lambda x) \sim \frac{A}{\sqrt{x}}\cos(\lambda x - \delta(\nu)), \quad x \to \infty,$$

这说明当自变量无限增大时, Bessel 和 Neumann 函数的值趋于零, 也说明这两种函数存在无穷多个零值或零点.

当自变量大大超过其阶数时, 柱函数的精细渐近展开式已经知道; 这样

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\cos\left[x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right]P_\nu(x) - \sin\left[x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right]Q_\nu(x)\right\}, \quad |x| \gg 1,$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\sin\left[x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right]P_\nu(x) + \cos\left[x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right]Q_\nu(x)\right\}, \quad |x| \gg 1,$$

这里

$$P_\nu(x) = 1 - \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{2!(8x)^2} + o(1/x^4),$$

$$Q_\nu(x) = \frac{4\nu^2-1}{8x} - \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)}{3!(8x)^3} + o(1/x^5),$$

有按 x 的倒数幂的级数形式. $K_\nu(x)$ 的渐近展开式

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}\left[1 + \frac{4\nu^2-1}{8x} + \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{2!(8x)^2} + \cdots\right]$$

包含一个单独的指数因子, 所以 $I_\nu(x)$ 的渐近展式包含分开的一对 $e^{\pm x}$.

确定 J_m 的根 γ_{mn} (m, n 为整数) 的显式公式能从 Bessel 函数渐近表示式中推演出; 这样

$$\gamma_{mn} = \left(m + 2n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} - \frac{4m^2-1}{4\pi\left(m + 2n - \frac{1}{2}\right)} - \frac{(4m^2-1)(28m^2-31)}{48\pi^3\left(m + 2n - \frac{1}{2}\right)^3} - \cdots$$

这里对每个 m, 由令 $n = 1, 2, \cdots$ 就得到相继的根 γ_{mn}. 它的数值在附表中展示.

γ_{mn}; J_m 的第 n 个根

$m\diagdown n$	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2.40483	5.52008	8.65373	11.79153	14.93092	18.07106	21.21164	24.35247
1	3.83171	7.01559	10.17347	13.32369	16.47063	19.61586	22.76008	
2	5.13562	8.41724	11.61984	14.79595	17.95982	21.11700	24.27112	
3	6.38016	9.76102	13.01520	16.22347	19.40942	22.58273		
4	7.58834	11.06471	14.37254	17.6160	20.8269	24.1990		
5	8.77142	12.33860	15.70017	18.9801	22.2178			
6	9.93611	13.58929	17.0038	20.3208	23.5861			
7	11.08637	14.82127	18.2876	21.6416	24.9349			
8	12.22509	16.0378	19.5545	22.9452				
9	13.35430	17.2412	20.8070	24.2339				
10	14.47550	18.4335	22.0470					
11	15.58985	19.6160	23.2759					
12	16.6983	20.7899	24.4949					
13	17.8014	21.9562						
14	18.9000	23.1158						
15	19.9944	24.2692						
16	21.0851							
17	22.1725							
18	23.2568							
19	24.3383							

整数阶 Bessel 函数也能借助一个生成函数 (母函数) 来定义, 即

$$\exp\left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)x\right]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(x)t^n.$$

令 $t=e^{i\vartheta}$, 所得到的展开式

$$e^{ix\cos\vartheta}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}i^m J_m(x)e^{im\vartheta}=J_0(x)+2\sum_{m=1}^{\infty}i^m J_m(x)\cos m\vartheta$$

是关于 ϑ 的 Fourier 型展式, 因此补充了积分表示式

$$\begin{aligned} i^m J_m(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\cos\vartheta-im\vartheta}d\vartheta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ix\cos\vartheta}\cos m\vartheta d\vartheta \end{aligned} \tag{37.15}$$

或

$$(-1)^{m/2}J_m(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\cos\vartheta)\cos m\vartheta d\vartheta, \quad m \text{ 为偶数}$$

和

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} J_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x\cos\vartheta)\cos m\vartheta d\vartheta, \quad m \text{ 为奇数}.$$

来自 (37.6) 的特殊推论

$$\frac{d}{dx}Z_0(x) = -Z_1(x), \quad \frac{d}{dx}(xZ_1(x)) = xZ_0(x)$$

连同不定积分

$$\int xZ_\nu(\alpha x)\overline{Z}_\nu(\beta x)dx = \frac{x}{\alpha^2-\beta^2}\left[Z_\nu(\alpha x)\frac{d}{dx}\overline{Z}_\nu(\beta x) - \overline{Z}_\nu(\beta x)\frac{d}{dx}Z_\nu(\alpha x)\right], \tag{37.16}$$

$$\int xZ_\nu^2(x)dx = \frac{1}{2}x^2\left[\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)Z_\nu^2(x) + \left(\frac{d}{dx}Z_{-\nu}(x)\right)^2\right] \tag{37.17}$$

一起是有用的, 这里 Z_ν 和 $\overline{Z}_\nu$ 表示任意两个 ν 阶柱函数.

Bessel 函数是有限区间 $0 < x < L$ 上一个齐次边值问题的特征函数或本征函数, 其定义方程组为

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) - \frac{\nu^2 y}{x} = -\lambda^2 xy, \quad 0 < x < L, \tag{37.18}$$

$$y(0) = 0, \quad \nu > 0, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0, \quad \nu = 0 \tag{37.19}$$

和

$$L\frac{dy}{dx} + \alpha y = 0, \quad x = L, \quad \alpha \text{ 为实数}, \tag{37.20}$$

其中 λ^2 起展开参数的作用. 该方程组的自伴性由于关系式

$$\int_0^L \{yL[z] - zL[y]\}dx = \left(xy\frac{dz}{dx} - xz\frac{dy}{dx}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=L} = 0$$

而变得显然, 由另一关系式

$$\int_0^L yL[y]dx = -\lambda^2\int_0^L xy^2dx = -\alpha y^2(L) - \int_0^L\left[x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\nu^2y^2}{x^2}\right]dx$$

可推出

$$\lambda^2 > 0, \quad \text{当} \quad \alpha > 0.$$

在特殊情形 $\nu = 0, \alpha = 0$ 存在零本征值且对应的本征函数简单地是一常数.

常微分方程 (37.18) 的正则解 $J_\nu(\lambda x)$ 满足在 $x=0$ 的边界条件 (37.19), 不论 λ 的值如何, 由在 $x=L$ 的边界条件可推出

$$\gamma\frac{d}{d\gamma}J_\nu(\gamma)+\alpha J_\nu(\gamma)=0, \tag{37.21}$$

或 $$\gamma=\lambda L$$

$$\gamma J_{\nu-1}(\gamma)+(\alpha-\nu)J_\nu(\gamma)=0$$

这就是所述问题的本征值方程. 后面的方程有无穷多个实的单根 $\pm\gamma_n, n=1, 2,\cdots$, 具有相反符号的根是由于最后一式子中的两个 γ 的函数有相反 (偶或奇) 对称性. 对每个正根, 有对应的本征函数

$$y_n(x)=J_\nu\left(\gamma_n\frac{x}{L}\right),\quad n=1,2,\cdots$$

且这一集合是正交集, 参考 (37.16),(37.21) 就可以证明

$$\begin{aligned}&\int_0^L xJ_\nu\left(\gamma_m\frac{x}{L}\right)J_\nu\left(\gamma_n\frac{x}{L}\right)dx\\&=\frac{L^3}{\gamma_m^2-\gamma_n^2}\left[J_\nu(\gamma_m)\frac{d}{dx}J_\nu\left(\gamma_n\frac{x}{L}\right)\bigg|_{x=L}-J_\nu(\gamma_n)\frac{d}{dx}J_\nu\left(\gamma_m\frac{x}{L}\right)\bigg|_{x=L}\right]\\&=\frac{L^2}{\gamma_m^2-\gamma_n^2}[J_\nu(\gamma_m)(-\alpha J_\nu(\gamma_n))-J_\nu(\gamma_n)(-\alpha J_\nu(\gamma_m))]\\&=0,\quad m\neq n.\end{aligned}$$

本征函数的正交性表明可以用它们作为基, 用所谓的 Fourier-Bessel 级数来表示 $0<x<L$ 上的可积函数 $f(x)$, 即

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_nJ_\nu\left(\gamma_n\frac{x}{L}\right),\quad 0<x<L, \tag{37.22}$$

这里系数 c_n 能用以下关系式决定

$$N_nc_n=\int_0^L xf(x)J_\nu\left(\gamma_n\frac{x}{L}\right)dx,\quad n=1,2,\cdots, \tag{37.23}$$

且利用 (37.17),(37.21) 后得

$$\begin{aligned}N_n&=\int_0^L xJ_\nu^2\left(\gamma_n\frac{x}{L}\right)dx\\&=\frac{1}{2}L^2\left[\left(1-\frac{\nu^2}{\gamma_n^2}\right)J_\nu^2(\gamma_n)+\left(\frac{d}{d\gamma}J_\nu(\gamma)\bigg|_{\gamma=\gamma_n}\right)^2\right]\\&=\frac{1}{2}L^2\left[1+\frac{\alpha^2-\nu^2}{\gamma_n^2}\right]J_\nu^2(\gamma_n).\end{aligned}$$

分析显示出 Fourier–Bessel 级数的收敛性类似于三角 Fourier 级数; 特别是, 它们在 $f(x)$ 的连续点上等于 $f(x)$, 而在生成函数的不连续点 x^* 处等于

$$\frac{f(x^*+0)+f(x^*-0)}{2}.$$

考虑零阶 Bessel 函数

$$J_0\left(\gamma_{0n}\frac{x}{L}\right),\quad n=1,2,\cdots$$

它们各自在 $x=0$ 取值 1, 而如果 $J_0(\gamma_{0n})=0, n=1,2,\cdots$ 则在 $x=L$ 的值为零; 且假设选用它们来表示在端点取值相等的

$$f(x)=1-\frac{x}{L}, 0<x<L.$$

Fourier–Bessel 级数

$$1-\frac{x}{L}\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_nJ_0\left(\gamma_{0n}\frac{x}{L}\right),\quad 0<x<L$$

由于系数的如下公式而确定,

$$\begin{aligned}N_nc_n&=\int_0^L\left(1-\frac{x}{L}\right)xJ_0\left(\gamma_{0n}\frac{x}{L}\right)dx\\&=L^2\int_0^1(1-\zeta)\zeta J_0(\gamma_{0n}\zeta)d\zeta,\quad n=1,2,\cdots\end{aligned}$$

这里

$$N_n=\int_0^L xJ_0^2\left(\gamma_{0n}\frac{x}{L}\right)dx=\frac{1}{2}L^2J_1^2(\gamma_{0n}),$$

如同从 (37.17),(37.6) 推导出.

由于关系式 (37.6) 的第一个推导出

$$\frac{d}{dx}(xJ_1(x))=xJ_0(x),$$

立即得出 c_n 的表示中出现的一个积分的直接简化, 即

$$\int_0^1\zeta J_0(\gamma_{0n}\zeta)d\zeta=\frac{1}{\gamma_{0n}}J_1(\gamma_{0n}).$$

此外, 用相继的分部积分

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \zeta^2 J_0(\gamma_{0n}\zeta)d\zeta &= \frac{1}{\gamma_{0n}}\int_0^1 \zeta d[\zeta J_1(\gamma_{0n}\zeta)] \\
&= \frac{1}{\gamma_{0n}}J_1(\gamma_{0n}) - \frac{1}{\gamma_{0n}}\int_0^1 \zeta J_1(\gamma_{0n}\zeta)d\zeta \\
&= \frac{1}{\gamma_{0n}}J_1(\gamma_{0n}) + \frac{1}{\gamma_{0n}^2}\int_0^1 \zeta d[J_0(\gamma_{0n}\zeta)] \\
&= \frac{1}{\gamma_{0n}}J_1(\gamma_{0n}) - \frac{1}{\gamma_{0n}^2}\int_0^1 J_0(\gamma_{0n}\zeta)d\zeta \\
&= \frac{1}{\gamma_{0n}}J_1(\gamma_{0n}) - \frac{1}{\gamma_{0n}^3}\int_0^{\gamma_{0n}} J_0(\sigma)d\sigma,
\end{aligned}
$$

所以

$$
c_n = \frac{2}{\gamma_{0n}^3}\frac{1}{J_1^2(\gamma_{0n})}\int_0^{\gamma_{0n}} J_0(\sigma)d\sigma, \quad n = 1, 2, \cdots
$$

上面的积分能用所谓的 Struve (斯特拉弗) 函数 $S_0(x)$ 来表示, 它满足一个非齐次柱函数常微分方程, 即

$$
\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}S_0\right) + xS_0 = \frac{2}{\pi},
$$

且有极限性状

$$
\begin{aligned}
&S_0(0) = 0, \\
&S_0(x) \sim N_0(x) + \frac{2}{\pi x} \to 0, \quad x \to \infty.
\end{aligned}
$$

这样, 联合对 $S_0(x)$ 的常微分方程和对 $J_0(x)$ 的方程,

$$
\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_0\right) + xJ_0 = 0,
$$

得出

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{\pi}J_0(x) &= J_0\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}S_0\right) - S_0\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_0\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left[xJ_0(x)\frac{d}{dx}S_0(x) - xS_0(x)\frac{d}{dx}J_0(x)\right].
\end{aligned}
$$

因此

$$
\frac{2}{\pi}\int_0^x J_0(\sigma)d\sigma = xJ_0(x)\frac{d}{dx}S_0(x) - xS_0(x)\frac{d}{dx}J_0(x),
$$

所以由给定的 $J_0(\gamma_{0n}) = 0$ 得出

$$
\int_0^{\gamma_{0n}} J_0(\sigma)d\sigma = \frac{\pi}{2}\gamma_{0n}S_0(\gamma_{0n})J_1(\gamma_{0n}).
$$

利用这个结果, 就得到所求的展开式

$$1 - \frac{x}{L} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_0(\gamma_{0n})}{\gamma_{0n}^2 J_1(\gamma_{0n})} J_0\left(\gamma_{0n}\frac{x}{L}\right), \quad 0 < x < L; \tag{37.24}$$

这个级数是一致收敛的, 与其生成函数在 $x = L$ 同样取零值, 而在另一端点的相容性必须有关系式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_0(\gamma_{0n})}{\gamma_{0n}^2 J_1(\gamma_{0n})} = \frac{1}{\pi}. \tag{37.25}$$

展开式 (37.24) 适宜于刻画由以下方程组定义的势函数 $u(\rho, z)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < \rho < L, \quad z > 0,$$

$$u(\rho, 0) = A\left(1 - \frac{\rho}{L}\right), \quad 0 < \rho < L$$

和

$$u(L, z) = 0; \quad z > 0, \quad u \to 0, \quad z \to \infty, \quad 0 < \rho < L.$$

按照在 $\rho = L$ 的边界条件, 假设

$$u(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) J_0\left(\gamma_{0n}\frac{\rho}{L}\right), \qquad J_0(\gamma_{0n}) = 0;$$

代入 u 的偏微分方程且应用 Bessel 函数常微分方程, 得出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{d^2}{dz^2} - (\gamma_{0n}/L)^2\right] f_n(z) J_0\left(\gamma_{0n}\frac{\rho}{L}\right) = 0, \quad 0 < \rho < L,$$

所以由于 Bessel 函数的无关性和正交性, 函数 $f_n(z)$ 的各个常微分方程随之得出, 即

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - (\gamma_{0n}/L)^2\right] f_n(z) = 0, \quad z > 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

合适的解是

$$f_n(z) = c_n \exp\left[-\frac{\gamma_{0n}}{L} z\right],$$

其中系数 $c_n = f_n(0)$ 出现于前面导出的 Fourier–Bessel 展开式

$$u(\rho, 0) = A\left(1 - \frac{\rho}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0\left(\gamma_{0n}\frac{\rho}{L}\right), \quad 0 < \rho < L$$

中. 所以

$$c_n = \pi A \frac{S_0(\gamma_{0n})}{\gamma_{0n}^2 J_1(\gamma_{0n})},$$

而且

$$u(\rho,z)=A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_0(\gamma_{0n})}{\gamma_{0n}^2J_1(\gamma_{0n})}J_0\left(\gamma_{0n}\frac{\rho}{L}\right)e^{-(\gamma_{0n}/L)z} \tag{37.26}$$

提供所要找的势函数的明确的表示式. (37.26) 中级数的一致收敛性证实了数值关系式 (37.25).

假设现在要求分析半无限圆柱区域 $0<\rho<L, z>0$ 内的冷却问题, 给定轴对称扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u, \tag{37.27}$$

边界条件

$$\begin{aligned}&u(L,z,t)=0,\quad z>0,t>0,\\&u(\rho,0,t)=0,\quad 0<\rho<L,t>0\end{aligned} \tag{37.28}$$

和一个初始条件

$$u(\rho,z,0)=U_0e^{-z/D},\quad z>0, \tag{37.29}$$

这连带地说明其渐近性状为

$$u\to 0,\quad z\to\infty,\quad t>0. \tag{37.30}$$

引入对 $u(\rho,z,t)$ 的 Fourier – Bessel 展开式, 即

$$u(\rho,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z,t)J_0\left(\gamma_{0n}\frac{\rho}{L}\right), \tag{37.31}$$

这里

$$J_0(\gamma_{0n})=0,\quad n=1,2,\cdots$$

特征表示式

$$N_nf_n(z,t)=\int_0^L\rho u(\rho,z,t)J_0\left(\gamma_{0n}\frac{\rho}{L}\right)d\rho$$

$$N_n=\frac{1}{2}L^2J_1^2(\gamma_{0n}),\quad n=1,2,\cdots$$

随之得出. 下一步, 二元函数 $f_n(x,t)$ 的初始值由所加条件 (39.29) 推演出, 即

$$\begin{aligned}f_n(z,0)&=\frac{2}{L^2}\frac{U_0}{J_1^2(\gamma_{0n})}\int_0^L\rho e^{-z/D}J_0\left(\gamma_{0n}\frac{\rho}{L}\right)d\rho\\&=2U_0\frac{\exp[-z/D]}{\gamma_{0n}J_1(\gamma_{0n})},\quad n=1,2,\cdots\end{aligned} \tag{37.32}$$

函数 $f_n(z,t)$ 满足由 (37.27),(37.31) 得到的偏微分方程

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-k\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-(\gamma_{0n}/L)^2\right)\right]f_n(z,t)=0,$$

对它的分析能够基于由

$$F_n(\zeta,t)=\int_0^\infty f_n(z,t)\sin\zeta z dz \tag{37.33}$$

定义的 Fourier 正弦积分变换及其相伴的表示式

$$f_n(z,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_n(\zeta,t)\sin\zeta z d\zeta \tag{37.34}$$

来进行. 利用明显的性质

$$f_n(0,t)=0,\quad t>0,\quad f_n(z,t)\to 0,\quad z\to\infty,$$

得到 $F(\zeta,t)$ 的一个齐次常微分方程

$$\left(\frac{d}{dt}+k(\gamma_{0n}/L)^2+k\zeta^2 t\right)F_n(\zeta,t)=0,$$

其解是

$$F_n(\zeta,t)=F_n(\zeta,0)\exp[-k(\gamma_{0n}/L)^2t-k\zeta^2t]. \tag{37.35}$$

(37.33) 和 (37.32) 的联合结果, 即

$$\begin{aligned}F_n(\zeta,0)&=\int_0^\infty f_n(z,0)\sin\zeta z dz\\&=2U_0\frac{1}{\gamma_{0n}J_1(\gamma_{0n})}\frac{\zeta}{\zeta^2+\dfrac{1}{D^2}}\end{aligned}$$

通过 (37.35) 完全确定 $F_n(\zeta,t)$, 且通过 (37.34) 导致确定的表示式

$$f_n(z,t)=\frac{4}{\pi}\frac{U_0}{\gamma_{0n}}\frac{\exp[-k(\gamma_{0n}/L)^2t]}{J_1(\gamma_{0n})}\int_0^\infty\frac{\zeta\sin\zeta z}{\zeta^2+\dfrac{1}{D^2}}e^{-k\zeta^2t}d\zeta, \tag{37.36}$$

其中的积分在 $D\to\infty$ 的极限情形下仍然有意义; 显然

$$f_n(z,t)=\frac{2U_0}{\gamma_{0n}}\frac{1}{J_1(\gamma_{0n})}\exp[-k(\gamma_{0n}/L)^2t]\mathrm{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{kt}}\right),\quad D\to\infty,$$

其中用到了误差函数, 因此

$$u(\rho,z,t)=2U_0\sum_{n=1}^\infty\frac{J_0\left(\gamma_{0n}\dfrac{\rho}{L}\right)}{\gamma_{0n}J_1(\gamma_{0n})}\exp[-k(\gamma_{0n}/L)^2t]\mathrm{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{kt}}\right) \tag{37.37}$$

描述偏微分方程 (37.27) 的满足初始条件 (37.28) 且满足

$$u(\rho,z,t)\to 2U_0\sum_{n=1}^\infty\frac{J_0\left(\gamma_{0n}\dfrac{\rho}{L}\right)}{\gamma_{0n}J_1(\gamma_{0n})}=U_0\qquad 0<\rho<L,\quad z\to\infty,\quad t=0 \tag{37.38}$$

的一个解.

可以认为关系式 (37.38) 是对应于 $0<\rho<L$ 上生成函数等于 1 的 Fourier–Bessel 级数, 此外推导出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_{0n}J_1(\gamma_{0n})}=\frac{1}{2}. \tag{37.39}$$

实际上, 对 $D>0$, 可以计算 (37.36) 中的积分, 于是方程组 (37.27) – (37.29) 定义的问题的解可以表示成形式

$$u(\rho,z,t)=U_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\gamma_{0n}\dfrac{\rho}{L}\right)}{\gamma_{0n}J_1(\gamma_{0n})}\exp[-k(\gamma_{0n}/L)^2t]\exp[kt/D^2] \tag{37.40}$$
$$\cdot\left[e^{z/D}\mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{kt}}{D}+\frac{z}{2\sqrt{kt}}\right)+e^{-z/D}\mathrm{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{kt}}-\frac{\sqrt{kt}}{D}\right)-2\sinh\frac{z}{D}\right].$$

重要的 Fourier 积分和 Fourier 变换方程对

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\zeta)e^{i\zeta x}d\zeta$$

和 (37.41)

$$F(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\zeta x}dx$$

有一种类似的关系, 该关系中的主要角色是 Bessel 函数而非指数函数; 其显式关系是

$$\begin{aligned}f(r)&=\int_0^{\infty}\zeta J_\nu(\zeta r)F(\zeta)d\zeta,\\ F(\zeta)&=\int_0^{\infty}rJ_\nu(\zeta r)f(r)dr,\end{aligned} \tag{37.42}$$

这里第二个式子定义了在 $r>0$ 上一类适当的函数 $f(r)$ 的 Fourier–Bessel 变换. 当 $\nu=n$ 为整数时, (37.42) 的一对关系式的证明可以得到, 为此利用 Fourier 积分和变换表示式 (37.41) 的二维形式, 即

$$\begin{aligned}\widehat{f}(x,y)&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{F}(\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta y)}d\xi\ d\eta,\\ \widehat{F}(\xi,\eta)&=\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(x,y)e^{-i(\xi x+\eta y)}dx\ dy,\end{aligned} \tag{37.43}$$

它们的积分分别取在整个 (ξ,η) 和 (x,y) 平面上. 采用极坐标变量 $(\zeta,\psi),(r,\vartheta)$ 取代 $(\xi,\eta),(x,y)$, 即

$$\begin{aligned}&\xi=\zeta\cos\psi, x=r\cos\vartheta,\quad 0<\zeta,r<\infty,\\ &\eta=\zeta\sin\psi, y=r\sin\vartheta,\quad -\pi<\psi,\vartheta<\pi,\end{aligned}$$

且记

$$\widehat{f}(x,y)=e^{in\vartheta}f(r), \tag{37.44}$$

关系式 (37.43) 的第二个变成

$$\widehat{F}(\zeta,\psi)=\int_0^\infty rf(r)dr\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\zeta r\cos(\vartheta-\psi)}e^{in\vartheta}d\vartheta.$$

现在

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\zeta r\cos(\vartheta-\psi)}e^{in\vartheta}d\vartheta&=e^{in\psi}\int_{-\pi-\psi}^{\pi-\psi}e^{-i\zeta r\cos\alpha}e^{in\alpha}d\alpha\\&=2\pi i^{-n}e^{in\psi}J_n(\zeta r),\end{aligned}$$

因为根据 (37.15) 被积函数对整数 n 是 α 的 2π 周期函数; 这样

$$\frac{1}{2\pi}i^n e^{-in\psi}\widehat{F}(\zeta,\psi)=\int_0^\infty rJ_n(\zeta r)f(r)dr=F(\zeta). \tag{37.45}$$

在关系式 (37.43) 的第一式中再用 (37.44),(37.45) 和 (37.15), 揭示出

$$\begin{aligned}e^{in\vartheta}f(r)&=\frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^\infty\zeta F(\zeta)d\zeta\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\zeta r\cos(\vartheta-\psi)}e^{in\psi}d\psi\\&=\frac{e^{in\vartheta}}{2\pi}i^{-n}\int_0^\infty\zeta F(\zeta)d\zeta\int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta}e^{i\zeta r\cos\beta}e^{-in\beta}d\beta\\&=e^{in\vartheta}\int_0^\infty\zeta J_n(\zeta r)F(\zeta)d\zeta,\end{aligned}$$

这就是所要求的结果.

取函数

$$f(r)=e^{-(r/R)^2},\quad r>0,$$

注意它的基于零阶 Bessel 函数的变换

$$F(\zeta)=\int_0^\infty re^{-(r/R)^2}J_0(\zeta r)dr=\frac{1}{2}R^2e^{-(\zeta R)^2/4};$$

简单的积分提供结果

$$\int_0^\infty f(r)dr=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}R,\int_0^\infty F(\zeta)d\zeta=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}R,$$

与指数型 Fourier 变换情形相对应的以下事实是明显的, 即分别按照

$$R\ll 1,\qquad R\gg 1$$

$f(r)$ 的窄或宽的图形对应到对相伴的变换 $F(\zeta)$ 的宽或窄的图形.

考虑不连续函数

$$f(r)=\begin{cases}1, & 0<r<L,\\ 0, & r>L\end{cases}$$

及其包含零阶 Bessel 函数的积分表示式; 由于

$$F(\zeta)=\int_0^\infty rf(r)J_0(\zeta r)dr=\frac{L}{\zeta}J_1(\zeta L),$$

显式表示式是

$$\begin{aligned}f(r)&=\int_0^\infty \zeta F(\zeta)J_0(\zeta r)d\zeta\\ &=L\int_0^\infty J_0(\zeta r)J_1(\zeta L)d\zeta=\int_0^\infty J_0\left(\mu\frac{r}{L}\right)J_1(\mu)d\mu.\end{aligned}\tag{37.46}$$

参照 Bessel 函数积分公式

$$I(\alpha)=\int_0^\infty J_0(\alpha\mu)J_1(\mu)d\mu=\begin{cases}1, & \alpha<1,\\ 1/2, & \alpha=1,\\ 0, & \alpha>1,\end{cases}\tag{37.47}$$

显示出表示式 (37.46) 正确地分别规定了该生成函数在 $0<r<L$ 和 $r>L$ 中的值 1 和 0, 而且在 $f(r)$ 的不连续点取值

$$\frac{f(L+0)+f(L-0)}{2}.$$

习　题　37

1. 一类轴对称问题与 Fourier 为介绍他的求解满足补充条件的偏微分方程的方法选用的问题 (第十三章) 类似, 与无限柱形区域 $0<\rho<L, z>0$ 内的势方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

有关, 给出在其分别边界上的指定值

$$\begin{aligned}u(\rho,0)&=1, \quad 0<\rho<L,\\ u(L,z)&=0, \quad z>0\end{aligned}$$

和

$$u\to 0, \quad z\to\infty, \quad 0<\rho<L.$$

验证在整个区域上 u 的表示式为

$$u(\rho, z) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{0n} J_1(\gamma_{0n})} J_0\left(\gamma_{0n}\frac{\rho}{L}\right) \exp\left[-\gamma_{0n}\frac{z}{L}\right],$$
$$J_0(\gamma_{0n}) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

证明两个积分

$$I_1 = 2\pi \int_0^L \left[-\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=\delta}\right] \rho d\rho, \quad \delta > 0$$

和

$$I_2 = 2\pi L \int_\delta^\infty \left[\frac{\partial u}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=L}\right] dz, \quad \delta > 0$$

相等, 它们分别度量平行于底的平面圆截面上的向内流量和该截面以上的曲边界上的向外流量.

注意观察当取极限 $\delta \to 0$, 由于 $\gamma_{0n} \to n\pi, n \to \infty$, 则

$$I_1 = I_2 \to 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{0n}} = \infty.$$

把在 $z = 0$ 的边界条件换成

$$u(\rho, 0) = 1 - \frac{\rho}{L}, \quad 0 < \rho < L,$$

讨论当 $\delta \geqslant 0$ 时对应的积分 I_1, I_2.

2. 考虑定义方程为

$$L[u] = \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \lambda^2\right] u = 0, \quad 0 < a < r < b, \tag{i}$$

$$\frac{du}{dr}\bigg|_{r=a} = 0, \qquad u\bigg|_{r=b} = 0 \tag{ii}$$

的齐次边值问题. 令

$$u(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 N_0(\lambda r),$$

建立关系式

$$J_0(\lambda b) N_1(\lambda a) - J_1(\lambda a) N_0(\lambda b) = 0,$$

它决定本征值 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ 证明本征函数

$$u_n(r) = J_0(\lambda_n r) - \delta_n N_0(\lambda_n r),$$
$$\delta_n = \frac{J_0(\lambda_n b)}{N_0(\lambda_n b)} = \frac{J_1(\lambda_n a)}{N_1(\lambda_n a)}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

构成 $a<r<b$ 上的一个正交集, 而且

$$\begin{aligned}N_n &= \int_a^b r u_n^2(r)dr \\ &= \frac{1}{2}b^2[J_1(\lambda_n b) - \delta_n N_1(\lambda_n b)]^2 - \frac{1}{2}a^2[J_0(\lambda_n a) - \delta_n N_0(\lambda_n a)]^2.\end{aligned}$$

根据 Wronski 公式 (37.10) 化简上面的表示式.

3. 在由方程组

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad a<r<b, t>0, \\ &\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \qquad \left.u\right|_{r=b} = U, \quad t>0\end{aligned}$$

和

$$u(r,0) = 0, \quad a<r<b$$

定义的扩散型初/边值问题的分析中应用前面的结果. 验证对由共轴圆定义的区域的内边界上的解或温度的表示式为

$$u(a,t) = U + \pi U \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_1^2(\lambda_n a)}{N_1^2(\lambda_n a) - N_0^2(\lambda_n b)} \frac{J_0(\lambda_n b)}{J_1(\lambda_n a)} e^{-k\lambda_n^2 t}.$$

4. 表示式 [见 (37.37)]

$$u(\rho,z,t) = 2U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\gamma_{0n}\frac{\rho}{L}\right)}{\gamma_{0n}J_1(\gamma_{0n})} \exp[-k(\gamma_{0n}/L)^2 t] \mathrm{erf}\left[\frac{z}{2\sqrt{kt}}\right]$$

(其中 $J_0(\gamma_{0n}) = 0, n = 1, 2, \cdots$) 确定无限圆柱形区域 $0<\rho<L, z>0$ 内扩散方程的解. 它在底面 $(z=0)$ 和侧曲表面 $(z>0, \rho=L)$ 上当 $t>0$ 时为零, 且假设在整个区域上取均匀的初始值 U_0. 证明: 在底面上向外流出的总热流由下式给出

$$F_1 = \int_0^{\infty} dt \int_0^L \left(2\pi\kappa \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}\right) \rho d\rho = 4\pi\rho c U_0 L^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{0n}^3} \left(\rho c = \frac{\kappa}{k}\right).$$

其次, 先验证

$$
\begin{aligned}
&2\pi L\int_0^H\left(-\kappa\frac{\partial u}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=L}\right)dz\\
&=4\pi\kappa U_0\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-k(\gamma_{0n}/L)^2t]\int_0^H\operatorname{erf}\left[\frac{z}{2\sqrt{kt}}\right]dz\\
&=4\pi\kappa U_0\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-k(\gamma_{0n}/L)^2t]\left[H\operatorname{erf}\left(\frac{H}{2\sqrt{kt}}\right)-\frac{1}{\sqrt{\pi kt}}\int_0^H ze^{-z^2/4kt}dz\right]\\
&\sim 4\pi\kappa U_0\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-k(\gamma_{0n}/L)^2t]\left[H-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{kt}\right],\quad H\gg L,
\end{aligned}
$$

再检验在曲边界 $\rho=L, 0<z<H(\gg L)$ 上对应的流出热流为

$$
\begin{aligned}
F_2&=4\pi\kappa U_0\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\exp[-k(\gamma_{0n}/L)^2t]\left[H-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{kt}\right]dt\\
&=4\pi\rho cU_0L^2H\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_{0n}^2}-4\pi\rho cU_0L^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_{0n}^3}.
\end{aligned}
$$

这样

$$F_1+F_2=4\pi\rho cL^2HU_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_{0n}^2}$$

显然必须在数量上等于在区域 $0<\rho<L, 0<z<H$ 内的初始热量, 即

$$2\pi\rho c\int_0^H dz\int_0^L\rho d\rho=\pi\rho cL^2HU_0;$$

所以得到涉及零阶 Bessel 函数的零点的结果,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_{0n}^2}=\frac{1}{4}.$$

5. 偏微分方程

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}+\lambda^2\right]u=0,\quad a<r<b,\quad 0<\vartheta<2\pi \tag{i}$$

的满足条件

$$
\begin{gathered}
u(a,\vartheta)=0,\quad u(b,\vartheta)=0,\quad 0<\vartheta<2\pi,\\
u(r,0)=u(r,2\pi)
\end{gathered}
$$

的特解由

$$u_n(r,\vartheta)=[J_m(\lambda_n r)N_m(\lambda_m a)-N_m(\lambda_n r)J_m(\lambda_n a)]\begin{Bmatrix}\cos m\vartheta\\ \sin m\vartheta\end{Bmatrix},\quad m=0,1,\cdots \tag{ii}$$

与确定本征值 λ_n 的方程

$$\frac{J_m(\lambda b)}{N_m(\lambda b)}=\frac{J_m(\lambda a)}{N_m(\lambda a)} \tag{iii}$$

表出.

当径向变量的外限和内限之差即 $b-a$ 与其平均值相比是小的, 即

$$b-a\ll\frac{a+b}{2}=\bar{r}$$

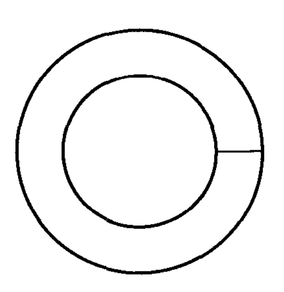
时, 容易得到这些本征函数和本征值的性质的一般概念. 在这种情形下, (ii) 中径向因子的柱函数常微分方程

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\lambda^2-\frac{m^2}{r^2}\right]Z_m(\lambda r)=0 \tag{iv}$$

有一较简单的近似形式

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\lambda^2-\frac{m^2}{\bar{r}^2}\right]Z_m=0. \tag{v}$$

求 (v) 的合适解且验证从 (iv) 转移到 (v) 过程中忽略 $\left(\frac{1}{r}\right)\frac{d}{dr}Z_m$ 这一项是有理由的; 对本征值 λ_n 的对应估计是什么?



假设一条连接内圆和外圆的径向线 $(a<r<b,\vartheta=0)$ 如图所示, 假设要求在这样定义的单连通区域的边界上所有点为零的 (i) 的解. 证实解的表示式为

$$u_n(r,\vartheta)=[J_{m/2}(\lambda_n r)N_{m/2}(\lambda_n a)-N_{m/2}(\lambda_n r)J_{m/2}(\lambda_n a)]\sin\frac{m\vartheta}{2},$$

$$m = 1, 2, \cdots \tag{vi}$$

其中

$$\frac{J_{m/2}(\lambda b)}{N_{m/2}(\lambda b)} = \frac{J_{m/2}(\lambda a)}{N_{m/2}(\lambda a)} \tag{vii}$$

为本征值方程.

半奇数阶的柱函数可用有限项表示, 例如

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad N_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x,$$

容许有 (vi), (vii) 的简化; 特别地, 证明: 如果 $m = 1$, 本征值由

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{b-a}, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{viii}$$

精确地给出. 当边界条件在该径向线上改变而要求 u 的法向导数在那里为零, 同时 u 在边界其他的圆周部分上与以前一样为零时, 建立此条件下成立的 (vi), (vii) 的类似表示式; 得到此情形下 (viii) 的相应部分

$$\frac{\tan \lambda_n(b-a)}{\lambda_n(b-a)} = \frac{2}{4\lambda_n^2 ab + 1}.$$

6. 适用于描述下端自由的悬挂的重链的小振幅运动的方程

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(P(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad 0 < x < l \tag{i}$$

包括了从垂直或静止准线向旁边的位移 $u(x,t)$, 它是沿该链的距离 x 和时间 t 的函数, 连同质量密度 ρ 和张力 $P(x)$. 如果 x 是从链的自由端开始测量的距离, 则

$$P(x) = \rho g x,$$

这里 g 表示重力加速度; 这样 (i) 的具有周期时间依赖性的分离变量解如

$$u(x,t) = X(x)\begin{Bmatrix}\cos \\ \sin\end{Bmatrix}\omega t$$

与对 $X(x)$ 的变系数常微分方程

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dX}{dx}\right) + \lambda^2 X = 0 \tag{ii}$$

或

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dX}{dx} + \frac{\lambda^2}{x}X = 0, \quad \lambda^2 = \frac{\omega^2}{g}$$

相联系，它不是精确的柱函数形式.

证明：在 (ii) 中实行变量变换 $x = s^2$ 后结果得出一个零阶柱函数方程；且给定条件 $X(0) =$ 有限 (由 $x = 0$ 是常微分方程 (ii) 的奇点这事实所必须要求的)，且 $X(l) = 0$ (与该链悬挂的固定点一致)，决定有关本征函数与本征值. 用它们去构造 (i) 的一个级数解，即

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t),$$

它满足边界条件

$$u(0,t) = \text{有限}, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0$$

和一对初始条件

$$u(x,0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial}{\partial t} u\right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < l.$$

详述对应于选择

$$f(x) = A\left(1 - \frac{x}{l}\right), \quad g(x) = 0$$

的解的形式.

7. 考虑半径为 R 的薄圆板中径向对称温度分布的扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0 \tag{i}$$

连同初始和边界条件

$$u(r,0) = f(r), \quad 0 < r < R$$

和

$$u(R,t) = 0, \quad t > 0.$$

验证解能表示为

$$u(r,t) = \int_0^R G(r,r',t)r'f(r')dr', \tag{ii}$$

其中

$$G(r,r',t) = \frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_n r)J_0(\lambda_n r')}{J_1^2(\lambda_n R)}e^{-k\lambda_n^2 t} \tag{iii}$$

且

$$J_0(\lambda_n R) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

如果 $f(r)$ 的非零值局限于 $r=0$ 的一个 ε 邻域且满足

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\rho c\int_0^{\varepsilon} 2\pi r f(r)dr\right]=Q,$$

这里 Q 表示于该板中心在 $t=0$ 瞬时地引导出的总热量, 板的质量密度和比热分别是 ρ, c, 从 (ii), (iii) 得出的板对应温度是

$$u_S(r,t)=\frac{Q}{\pi\rho c R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_n r)}{J_1^2(\lambda_n R)}e^{-k\lambda_n^2 t}. \tag{iv}$$

要求决定当 $R\to\infty$ 时上式的极限; 为此利用渐近特征表示式

$$J_0(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\quad J_1(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\quad x\gg 1,$$

且证实估计式

$$\lambda_n R\sim\left(n+\frac{3}{4}\right)\pi,$$
$$\Delta\lambda=\lambda_n-\lambda_{n-1}\sim\frac{\pi}{R},$$
$$J_1^2(\lambda_n R)\sim\frac{2}{\pi\lambda_n R},\quad \lambda_n R\gg 1,$$

特别地, 它们揭示当 $R\to\infty$ 时本征值 λ_n 得到一个连续分布. 在这极限中得到的 (iv) 的变体, 即

$$\begin{aligned}u_S(r,t)&\sim\frac{Q}{\pi\rho c R^2}\int_0^{\infty}\frac{J_0(\lambda r)}{\dfrac{2}{\pi\lambda R}}e^{-k\lambda^2 t}\frac{R}{\pi}d\lambda\\&=\frac{Q}{2\pi\rho c}\int_0^{\infty}\lambda J_0(\lambda r)e^{-k\lambda^2 t}d\lambda\\&=\frac{Q}{4\pi\rho c}\frac{\exp(-r^2/4kt)}{kt},\quad t>0\end{aligned} \tag{v}$$

描述二维情形中瞬时作用的点热源 (或扩散方程 (i) 的 Green 函数); 验证与此热源相联系的温度分布 (v) 所必须具有的特征为

$$\lim_{t\to 0}u_S(r,t)=0,\quad r>0,$$
$$\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)u_S=\frac{\partial}{\partial t}u_S,\quad t>0$$

和

$$\rho c\int_0^{\infty}2\pi r u_S(r,t)dr=Q,\quad t>0.$$

8. 考虑非齐次偏微分方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(r,z),\quad 0\leqslant r<\infty,\quad 0<z<h \tag{i}$$

连同规定

$$u=0,\quad z=0,\quad z=h,\quad 0\leqslant r<\infty$$

和

$$u\to 0,\quad 0<z<h,\quad r\to\infty.$$

引入对 (i) 中给定函数 f 的一个积分表示, 即

$$f(r,z)=\int_0^\infty \zeta J_0(\zeta r)F(\zeta,z)d\zeta, \tag{ii}$$

这里

$$F(\zeta,z)=\int_0^\infty rf(r,z)J_0(\zeta r)dr; \tag{iii}$$

引入包括 u 的类似的一对, 即

$$u(r,z)=\int_0^\infty \zeta J_0(\zeta r)U(\zeta,z)d\zeta \tag{iv}$$

和

$$U(\zeta,z)=\int_0^\infty rJ_0(\zeta r)u(r,z)dr; \tag{v}$$

验证决定 $U(\zeta,z)$ 的方程组为

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}-\zeta^2 U=-F(\zeta,z),$$
$$U(\zeta,0)=0,\quad U(\zeta,h)=0,$$

且验证表示式

$$U(\zeta,z)=\int_0^h \frac{\sinh\zeta z_<\sinh\zeta(h-z_>)}{\zeta\sinh\zeta h}F(\zeta,z')dz' \tag{vi}$$

满足所述的所有要求, 其中 $(z_<,z_>)$ 表示 (z,z') 中的较小者和较大者.

利用关系式 (ii) − (vi) 去得到 (i) 的解, 即

$$u(r,z)=\int_0^h dz'\int_0^\infty r'G(r,r',z,z')f(r',z')dr', \tag{vii}$$

其中

$$G(r,r',z,z')=\int_0^\infty \frac{\sinh\zeta z_<\sinh\zeta(h-z_>)}{\sinh\zeta h}J_0(\zeta r)J_0(\zeta r')d\zeta.$$

如果 (i) 中的 (源) 函数 f 位于点 $r=0, z=\delta(0<\delta<h)$ 且

$$\lim_{\varepsilon\to 0} 2\pi\int_0^{\varepsilon} rdr\int_{\delta-\varepsilon}^{\delta+\varepsilon} f(r,z)dz = q,$$

则解 (vii) 的对应形式

$$u_S(r,z) = qG(r,0,z,\delta) \tag{viii}$$

描述位于电势为零的两平行平面 $z=0, z=h$ 之间的一个点电荷 q 的势函数.

在此 Green 函数中出现的双曲函数能换成指数函数, 即

$$\begin{aligned}
&\frac{\sinh\zeta z_< \sinh\zeta(h-z_>)}{\sinh\zeta h}\\
=&\frac{1}{2}\frac{\cosh\zeta[h-(z_>-z_<)]-\cosh\zeta[h-(z_>+z_<)]}{\sinh\zeta h}\\
=&\frac{1}{2}\frac{\cosh\zeta[h-|z-z'|]-\cosh\zeta(h-z-z')}{\sinh\zeta h}\\
=&\frac{e^{-\zeta|z-z'|}+e^{-2\zeta h+\zeta|z-z'|}-e^{-\zeta(z+z')}-e^{-2\zeta h+\zeta(z+z')}}{1-e^{-2\zeta h}},
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
G(r,0,z,\delta) = \frac{1}{2h}\int_0^{\infty}&\left[\exp\left[-\frac{|z-\delta|}{2h}\nu\right]+\exp\left[-\left(1-\frac{|z-\delta|}{2h}\right)\nu\right]\right.\\
&\left.-\exp\left[-\frac{z+\delta}{2h}\nu\right]-\exp\left[-\left(1-\frac{z+\delta}{2h}\right)\nu\right]\right]\frac{J_0\left(\frac{\nu r}{2h}\right)}{1-e^{-\nu}}d\nu.
\end{aligned}$$

给定 $J_0(0)=1$ 和

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-\nu}}{\nu}-\frac{e^{-x\nu}}{1-e^{-\nu}}\right)d\nu = \psi(x) = \frac{d}{dx}\ln\Gamma(x),$$

沿着电荷所在的轴 $(r=0)$,

$$\begin{aligned}
G(0,0,z,\delta) = \frac{1}{2h}&\left[\psi\left(\frac{z+\delta}{2h}\right)+\psi\left(1-\frac{z+\delta}{2h}\right)\right.\\
&\left.-\psi\left(\frac{|z-\delta|}{2h}\right)-\psi\left(1-\frac{|z-\delta|}{2h}\right)\right],
\end{aligned} \tag{ix}$$

这里 $\psi(x)$ 是 Γ 函数 $\Gamma(x)$ 的对数导数, 满足函数方程

$$\psi(1+x) = \frac{1}{x}+\psi(x),$$

这使得 (ix) 能表示成形式

$$G(0,0,z,\delta)=\frac{1}{|z-\delta|}+\frac{1}{2h}\left[\psi\left(\frac{z+\delta}{2h}\right)+\psi\left(1-\frac{z+\delta}{2h}\right)\right.$$
$$\left.-\psi\left(1+\frac{|z-\delta|}{2h}\right)-\psi\left(1-\frac{|z-\delta|}{2h}\right)\right],\tag{x}$$

这就把这个 Green 函数在源点 $(r=0,z=\delta)$ 的奇异部分孤立出来了.

由点电荷 q 所经受的 (沿平面的法线作用的) 力 F_z 作为与在分别的平面上诱导电荷相互作用的结果,

$$F_z=-q\frac{\partial}{\partial z}\left[u_S(0,z)-\frac{q}{|z-\delta|}\right]_{z=\delta}$$

能用表示式 (x) 直接计算; 证明:

$$F_z=\frac{q^2}{4h^2}\left[\psi'\left(1-\frac{\delta}{h}\right)-\psi'\left(\frac{\delta}{h}\right)\right]=\frac{q^2}{4h^2}\left[2\psi'\left(1-\frac{\delta}{h}\right)-\frac{\pi^2}{\sin^2\left(\frac{\pi\delta}{h}\right)}\right],$$

其中用到包含 ψ 函数的导数的关系式

$$\psi'(1-x)+\psi'(x)=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}.$$

求当 $h\to\infty$ 时 F_z 所取的极限并作出解释.

9. 考虑关于 z 轴对称的势函数 $u(r,z)$ 的偏微分方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\quad r>0,\tag{i}$$

且注意存在沿该轴正则的包含修正 Bessel 函数

$$I_0(x)=J_0(ix)$$

的特解

$$I_0(\zeta r)e^{i\zeta z},$$

$I_0(x)$ 满足常微分方程

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}-1\right)I_0(x)=0$$

且有积分表示式

$$I_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-x\sin\alpha}d\alpha.\tag{ii}$$

设

$$u(r,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\zeta)I_0(\zeta r)e^{i\zeta z}d\zeta \tag{iii}$$

定义了 (i) 的更一般的解, 然后利用 (ii), 推导出

$$\begin{aligned}u(r,z)&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}d\zeta F(\zeta)\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\zeta(z+ir\sin\alpha)}d\alpha\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}F(\zeta)e^{i\zeta(z+ir\sin\alpha)}d\zeta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(z+ir\sin\alpha)d\alpha,\end{aligned} \tag{iv}$$

这里

$$F(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z)e^{-i\zeta z}dz$$

定义了 $-\infty<x<\infty$ 上可积函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换.

表示式 (iv) 是与电子光学分析相联系的一个有价值的表示式, 用其沿轴上的取值来表示一个轴对称势函数, 由于

$$\lim_{r\to 0}u(r,z)=f(z),\qquad -\infty<z<\infty,$$

(iv) 的一个修改

$$u(r,z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}[f(z+ir\sin\alpha)+f(z-ir\sin\alpha)]d\alpha \tag{v}$$

以实被积函数为其特点, 与表示式

$$u(x,y)=\frac{1}{2}[f(x+iy)+f(x-iy)],\quad u(x,0)=f(x) \tag{vi}$$

作比较, 它刻画关于 x 轴对称的即 $u(x,-y)=u(x,y)$ 的一个势函数, 或 Laplace 方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=0$$

的解.

建立偏微分方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\frac{u}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

的正则解的表示式

$$u(r,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(z+ir\sin\alpha)\sin\alpha d\alpha, \tag{vii}$$

注意性质

$$\lim_{r\to 0} u(r,z)=0,\quad -\infty<z<\infty.$$

对类似于 (iv) 的一个表示式在研究轴对称静电场的力线中有作用. 考虑半径为 r 垂直于对称轴 (具有固定的 z 的值) 的一个圆, 且设 N 度量穿过此圆的力线数; 如果半径从 r 增加到 $r+dr$,增加的流量或力线数用电场强度的法向分量 E_z 来确定, 由

$$dN = 2\pi r E_z dr = -2\pi r \frac{\partial u}{\partial z} dr$$

给出, 这里 $u(r,z)$ 表示势函数, 利用由此得出的推论

$$\frac{\partial N}{\partial r} = -2\pi r \frac{\partial u}{\partial z}$$

连同从 (iv) 得到的另一式子，即

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{i}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\pi}^{\pi} f(z+ir\sin\alpha) r\sin\alpha d\alpha,$$

去得到所要求的表示式

$$N(r,z) = ir\int_{-\pi}^{\pi} f(z+ir\sin\alpha)\sin\alpha d\alpha, \tag{viii}$$

由此推断出在 $r=0, N$ 取零值. 证明: N 满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2 N}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial N}{\partial r} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} = 0, \tag{ix}$$

它容许有预期的形如

$$N(r,z) = rJ_1(\zeta r)e^{i\zeta z}$$

的特解.

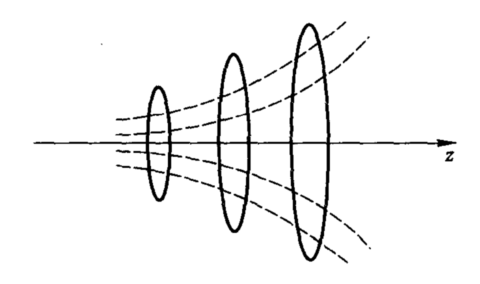
如果测度 N 保持不变而场线穿过的圆的坐标 r, z 两者都变化, 由此得出这些圆上的各点位于沿力线的位置上 (如图所提示的); 且因此条件

$$N = 常数$$

可以用来确定力线.

公式 (iv), (viii) 的一个简单应用涉及选择一个轴分布

$$u(0,z) = f(z) = \frac{1}{z},\quad z\neq 0;$$



检验与其相伴的表示式为

$$u(r,z) = \frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}, \quad N(r,z) = 2\pi\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}\right]. \tag{x}$$

在这种情形下, 曲面 $u=$ 常数是球面, 且由 r, z 平面上一圆绕 z 轴旋转而生成; 此外, 当 $z/r=$ 常数时, 即沿通过 z 轴上点 $r=0, z=0$ 的直线, N 不变. 这样, 表示式 (x) 是由在原点的点电荷引起的静电场的特征.

利用 Taylor 展开式

$$f(z+ir\sin\alpha) = f(z) + ir\sin\alpha f'(z) + \frac{1}{2}(ir\sin\alpha)^2 f''(z) + \cdots$$

求 $u(r,z)$ 和 $N(r,z)$ 在对称轴邻近的近似表示式.

10. 设

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^\infty J_0(\alpha x)e^{-\beta x}dx, \quad \beta > 0$$

定义了两个变量 α, β 的函数; 证明 I 满足一阶偏微分方程

$$\alpha\frac{\partial I}{\partial\beta} - \beta\frac{\partial I}{\partial\alpha} = 0.$$

用上式直接建立具有对 α, β 对称依赖性的函数形式

$$I = f(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}).$$

注意特殊值

$$I(0,\beta) = \frac{1}{\beta}.$$

推导出显式结果

$$\int_0^\infty J_0(\alpha x)e^{-\beta x}dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad \beta > 0.$$

11. 验证函数

$$u(\rho,z)=\int_0^\infty [aJ_1(\zeta a)-bJ_1(\zeta b)]J_0(\zeta\rho)e^{-\zeta z}d\zeta \tag{i}$$

确定了半空间 $z>0$ 内 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

的一个有界解, 且取规定值

$$u(\rho,0)=1,\quad b<\rho<a,$$
$$u(\rho,0)=0,\ \text{在平面上}\ z=0\ \text{的其他点}.$$

考察沿 z 轴 $(\rho=0)$ 分别当

$$b\to 0$$

和

$$b\to 0,\quad a\to\infty$$

时 (i) 的极限, 考虑到结果 (见问题 10)

$$\int_0^\infty J_0(\lambda x)e^{-\mu x}dx=\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}},\quad \mu>0. \tag{ii}$$

将一阶 Bessel 函数估计式

$$J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{16}+0(x^5)$$

引入到势函数

$$u(\rho,z)=a\int_0^\infty J_0(\zeta\rho)J_1(\zeta a)e^{-\zeta z}d\zeta \tag{iii}$$

中, 求得

$$\begin{aligned}u(\rho,z)&=\frac{1}{2}a^2\int_0^\infty \zeta J_0(\zeta\rho)e^{-\zeta z}d\zeta-\frac{a^4}{16}\int_0^\infty \zeta^3J_0(\zeta\rho)e^{-\zeta z}d\zeta+0(a^6)\\&=-\frac{a^2}{2}\frac{\partial}{\partial z}\int_0^\infty J_0(\zeta\rho)e^{-\zeta z}d\zeta\\&\quad+\frac{a^4}{16}\frac{\partial^3}{\partial z^3}\int_0^\infty J_0(\zeta\rho)e^{-\zeta z}d\zeta+0(a^6);\end{aligned}$$

应用 (ii) 以及柱坐标 (ρ,z) 和球极坐标 (r,ϑ) 的关系式

$$z=r\cos\vartheta,\quad z^2+\rho^2=r^2,$$

得到估计

$$u(r,\vartheta)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2P_1(\cos\vartheta)-\frac{3}{8}\left(\frac{a}{r}\right)^4P_3(\cos\vartheta)+0\left(\frac{a}{r}\right)^6,$$

且注意它与第三十六章中的独立分析 (见图 57) 的一致性.

导出对正则势函数的混合边值问题的解的对应方法中出现的关系式, 即在平面 $z=0$ 的互补部分上有不同条件

$$u=1,\quad 0<\rho<a$$

和

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=0,\rho>a;$$

这关系到在一圆盘上有常电势的静电场, 而第二个边界条件表示在该圆盘本身以外的平面部分该电场没有法向分量这一事实.

给出

$$u(\rho,z)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty J_0(\zeta\rho)\frac{\sin\zeta a}{\zeta}e^{-\zeta|z|}d\zeta,\quad z\gtrless 0$$

表示相关的势函数, 由此可以推导出什么样的 Bessel 函数积分?

12. 考虑一很长圆柱体内的黏性不可压缩流体由于沿其中同心圆部分搅动而产生的旋转运动; 忽略终端效应且假定与柱轴垂直的所有平面截面上有相同的运动, 存在一个单独的非零速度分量 $v=v(\rho,t)$, 它在与轴的距离为 ρ 的每一点处横截于半径向量 (与该轴垂直), 它还依赖于时间 t. 对 v 的流体动力学方程, 即

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho}-\frac{v}{\rho^2}\right],\tag{i}$$

包含一个附加项 (不出现于通常的扩散方程中) v/ρ^2, 由于速度向量的变化方向的结果, 且包含运动黏性参数 ν. 显然在轴上有零速度, 连同在柱面 (半径 R) 的无滑条件, 这意味着

$$v(0,t)=0,\quad v(R,t)=0,\quad t>0.\tag{ii}$$

(i) 的解由 (ii) 和初始条件

$$v(\rho,0)=v_0(\rho),\quad 0<\rho<R$$

唯一确定, 这个解能表成 Fourier - Bessel 级数形式; 证明它就是

$$v(\rho,t)=\sum_{n=1}^\infty c_nJ_1\left(\sigma_n\frac{\rho}{R}\right)e^{-\sigma_n^2\nu t/R^2},\tag{iii}$$

这里

$$J_1(\sigma_n) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

且从速度的给定值通过以下积分得到系数 C_n:

$$\begin{aligned} N_n c_n &= \int_0^R \rho v_0(\rho) J_1\left(\sigma_n \frac{\rho}{R}\right) d\rho \\ &= R^2 \int_0^1 \zeta v_0(R\zeta) J_1(\sigma_n \zeta) d\zeta, \quad n = 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{iv}$$

其中

$$N_n = \int_0^R \rho J_1\left(\sigma_n \frac{\rho}{R}\right) d\rho = \frac{1}{2} R^2 J_0^2(\sigma_n).$$

经过相当长的时间后, (iii) 中的第一项占优势, 因此

$$v(\rho, t) \sim \frac{R^2}{N_1} J_1\left(\sigma_1 \frac{\rho}{R}\right) e^{-\sigma_1^2 \nu t / R^2} \int_0^1 \zeta v_0(R\zeta) J_1(\sigma_1 \zeta) d\zeta, \quad t \to \infty, \tag{v}$$

这使得与圆柱轴的距离为 ρ 处的速度变化与一阶 Bessel 函数在 0 与其最小正根 $\sigma_1 = 3.83\cdots$ 之间的变化相联系. 此外, (v) 中因子

$$\int_0^1 \zeta v_0(R\zeta) J_1(\sigma_1 \zeta) d\zeta$$

将任意点的速度大小与初始速度分布 $v_0(\rho) = v_0(R\zeta)$ 相关联. 设初始速度由沿柱轴的一个特殊圆的连续搅动 (用很狭小的桨) 所建立; 证明 Lighthill (1948) 的预言: 如果运动将尽可能长的持续, 那么就要 "在与圆柱同心其半径约为圆柱的 0.63 倍的一个圆中搅动".

13. 考虑关于支配 n 维球形区域内径向对称温度分布的偏微分方程的一个特定问题, 即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right], \quad n = 1, 2, \cdots \tag{i}$$

由此能系统地导出包括 Bessel 函数的零点或根的各种数值求和的公式. 假设此球域的体积为 V 而半径为 R, 有均匀初始温度 U_0 且其表面从此保持温度为零; 验证级数解为

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \left(\frac{r}{R}\right)^{-p} J_p\left(\sigma_m \frac{r}{R}\right) e^{-\sigma_m^2 kt/R^2}, \tag{ii}$$

这里

$$p = \frac{n}{2} - 1$$

和

$$J_p(\sigma_m) = 0, \quad m = 1, 2, \cdots$$

证实系数表示式为

$$c_m = U_0 \frac{\int_0^1 \xi^{p+1} J_p(\sigma_m \xi) d\xi}{\int_0^1 \xi J_p^2(\sigma_m \xi) d\xi},$$

且考虑到积分

$$\int_0^x x^{\nu+1} J_\nu(x) dx = x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)$$

得到结果

$$c_m = \frac{2U_0}{\sigma_m J_{p+1}(\sigma_m)},$$

与 (ii) 联合, 得出

$$u(r,t) = 2U_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_m} \left(\frac{r}{R}\right)^{-p} \frac{J_p\left(\sigma_m \frac{r}{R}\right)}{J_{p+1}(\sigma_m)} \exp[-k(\sigma_m/R)^2 t], \quad p = \frac{n}{2} - 1 \quad \text{(iii)}$$

作为所述问题的解.

在特殊情形

$$n = 1, \quad p = -1/2$$

讨论有关细节.

(iii) 的第一个应用是基于自相容性要求, 即当 $t = 0$ 和 $r = 0$ 时, $u = U_0$; 且这得出 (回顾对 $J_\nu(x)$ 的级数展开式 (37.8))

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_m^{p-1}}{J_{p+1}(\sigma_m)}. \quad \text{(iv)}$$

如果 $n = 2$ 和 $p = 0$, 上面的关系式变成

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_m J_1(\sigma_m)} = \frac{1}{2}, \quad J_0(\sigma_m) = 0,$$

与前面所述的一个关系式 [见 (37.39)] 完全一致. 由 (iv) 且选 $n = 1, p = -1/2$, 将得出什么推论?

(iii) 的第二个应用依赖于一开始出现于该超球中所有的热最终从其表面流出这一明显事实; 其解析表述为

$$VU_0 = -kS \int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=R} dt,$$

利用结果

$$V/S = R/n$$

和 (iii) 的推论

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=R} = -\frac{2U_0}{R}\sum_{m=1}^{\infty}\exp\left[-k\left(\frac{\sigma_m}{R}\right)^2 t\right], \quad t>0$$

之后, 导出关于 Bessel 函数零点的关系式, 即

$$\frac{1}{2n} = \frac{1}{4(p+1)} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma_m^2}, \quad J_p(\sigma_m)=0. \tag{v}$$

在情形

$$n=1, \quad p=-1/2, \quad n=2, \quad p=0, \quad 和 \quad n=3, \quad p=1/2,$$

(v) 的特殊的推论分别是什么?

14. 设 $u(x,y)$ 表示偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$$

在圆

$$x^2 + y^2 = R^2$$

内和其上所有点上的一个有界解; 证明: 沿该圆周 u 的积分是与其在圆心的值 u_0 有关的, 即

$$\int_0^{2\pi} u(R,\vartheta)d\vartheta = 2\pi u_0 J_0(kR),$$

而且它是调和函数的平均值定理的推广.

15. 黏性流体流的速度平行于一个长圆柱形管的 (x) 轴, 受在一端的均匀的压力梯度 $\partial p/\partial x$ 所驱赶且沿轴向速度无变化, 速度例如说是 $v(r,t)$ 是径向变量 r 和时间 t 的函数, 它满足非齐次偏微分方程

$$\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)v - \rho\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x}\ (给定) \tag{i}$$

这里 μ, ρ 是流体黏性和密度参数. 如果所加压力梯度按时间周期地变化且所引起的流体速度也是周期变化的, 记

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -Pe^{i\omega t}, \quad v(r,t) = V(r)e^{i\omega t}, \tag{ii}$$

所以 (i) 换成常微分方程

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}-\frac{i\omega\rho}{\mu}V=-\frac{P}{\mu},\quad 0\leqslant r<R.\tag{iii}$$

证实 (iii) 的在管内处处保持有限且在管壁为零即

$$V(R)=0$$

的解, 用具有负虚自变量如 $i^{-3/2}=-i$ 的零阶 Bessel 函数来表示, 有形式

$$V(r)=-\frac{iP}{\omega\rho}\left[1-\frac{J_0\left(i^{3/2}\alpha\dfrac{r}{R}\right)}{J_0(i^{3/2}\alpha)}\right],\quad \alpha^2=R^2\frac{\omega\rho}{\mu}.\tag{iv}$$

决定由

$$Q=2\pi\int_0^R rv(r,t)dr=2\pi e^{i\omega t}\int_0^R rV(r)dr$$

定义的流率, 且考虑当 $\alpha\to 0$ 时的极限情况.

16. 考虑半空间 $(z>0)$, 整体有零初始温度, 且假设随后 $(t>0)$ 在边界 $z=0$ 上在一半径 R 的圆域内的温度有定常值 U_0 而在该平面的其他处为零. 对温度的有关方程组, 参照从该圆域中心引出的一个轴 $(r=0,z>0)$, 即

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u,$$

$$u(r,0,t)=\begin{cases}U_0, & 0\leqslant r<R,\\ 0, & r>R\end{cases}$$

$$u(r,z,0)=0,\quad z>0,\quad 0\leqslant r<\infty$$

和

$$u\to 0,\quad r^2+z^2\to\infty,$$

能用相继的一对积分变换来得到解. 为此, 引入 Fourier - Bessel 变换

$$U(\zeta,z,t)=\int_0^\infty ru(r,z,t)J_0(\zeta r)dr,$$

验证关系式

$$\frac{\partial U}{\partial t}=k\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\zeta^2\right]U,\quad z>0,\quad t>0,$$

$$U(\zeta,0,t)=U_0\frac{R}{\zeta}J_1(\zeta R),$$

$$U(\zeta,z,0)=0,\quad z>0$$

成立. 其次引入 Fourier 正弦变换

$$\widehat{U}(\zeta,\nu,t)=\int_0^\infty U(\zeta,z,t)\sin\nu z dz,$$

证明

$$\frac{\partial\widehat{U}}{\partial t}+k(\zeta^2+\nu^2)\widehat{U}=k\nu U_0R\frac{J_1(\zeta R)}{\zeta},$$

所以

$$\widehat{U}=\frac{\nu U_0R}{\nu^2+\zeta^2}\frac{J_1(\zeta R)}{\zeta}[1-\exp(-k(\nu^2+\zeta^2))t]$$

保持初始条件 $\widehat{U}(\zeta,\nu,0)=0$.

因此

$$\begin{aligned}U(\zeta,z,t)&=\frac{2}{\pi}U_0R\frac{J_1(\zeta R)}{\zeta}\int_0^\infty\frac{\nu}{\nu^2+\zeta^2}\sin\nu z[1-\exp(-k(\nu^2+\zeta^2))t]d\nu\\&=\frac{1}{2}U_0R\frac{J_1(\zeta R)}{\zeta}\left[2\cosh\zeta z+e^{-\zeta z}\mathrm{erf}\left[\zeta\sqrt{kt}-\frac{z}{2\sqrt{kt}}\right]\right.\\&\quad\left.-e^{\zeta z}\mathrm{erf}\left[\zeta\sqrt{kt}+\frac{z}{2\sqrt{kt}}\right]\right],\end{aligned}$$

随之得出所要求的表示式

$$\begin{aligned}u(r,z,t)=&\ \frac{1}{2}U_0R\int_0^\infty J_0(\zeta r)J_1(\zeta R)\\&\cdot\left[2\cosh\zeta z+e^{-\zeta z}\mathrm{erf}\left(\zeta\sqrt{kt}-\frac{z}{2\sqrt{kt}}\right)-e^{\zeta z}\mathrm{erf}\left(\zeta\sqrt{kt}+\frac{z}{2\sqrt{kt}}\right)\right]d\zeta.\end{aligned}$$

借助于 (37.47), 证实上式真的确定了对 $u(r,0,t)$ 在边界平面 $z=0$ 上的指定温度分布. 验证当取极限 $t\to\infty$ 时,

$$u\to u(r,z)$$

是与问题 11 中表示式 (iii) 完全一致的一个势函数.

第三十八章

双曲型方程

我们先前选择与扩散和定常态场的模式有关的二阶抛物型和椭圆型偏微分方程来详细讲述了一般能应用于这两类方程的各种初边值问题的方法. 相比之下, 二阶双曲型偏微分方程 (回顾第二章) 存在两族实的而且不同的特征线表明它们在相应的各种问题的分析中可以起到重要作用; 而且这些方法确实是值得讲述的. 基于特征线的方法与涉及 Fourier 级数和积分的分离变量法这两种方法的对照也是有启发性的.

考虑双曲型偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{38.1}$$

它的特征线方程

$$x - y = C_1, \quad x + y = C_2, \quad -\infty < C_1, C_2 < \infty$$

确定两族 (互相正交的) 直线. 用特征变量

$$\xi = x - y, \quad \eta = x + y,$$

方程 (38.1) 改写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0;$$

因此相继积分后得到

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta),$$

这里 f, g 表示任意的单变量函数, 所以

$$u(x,y) = f(x-y) + g(x+y) \tag{38.2}$$

表示偏微分方程 (38.1) 的通解.

设要决定 (38.1) 的一个解, 其值在一对特征线段 OP, OR (见图 59) 上已被指定; 即假设

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \varphi(x) \quad \text{在 } x-y=0 \text{ 的线段 } OP \text{ 上}, \\ u(x,y) &= \psi(x) \quad \text{在 } x+y=0 \text{ 的线段 } OR \text{ 上}. \end{aligned} \tag{38.3}$$

如果线段 OP, OR 的长度分别是 L_1, L_2, 则 P 和 Q 两点所在的特征线的方程是

$$y + x = \sqrt{2}L_1$$

而过 Q 和 R 的特征线的方程是

$$y - x = \sqrt{2}L_2.$$

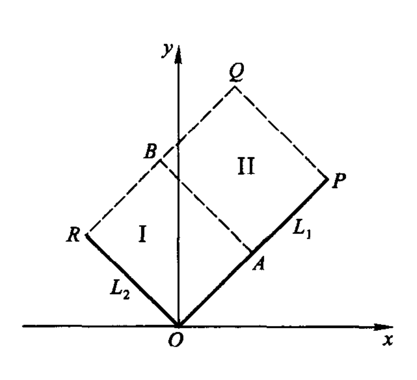


图 59

在引用通解 (38.2) 后, 条件 (38.3) 推出 (38.2) 中的任意函数 f, g 与给定分布 φ, ψ 在特征线上由

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(0) + g(2x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{L_1}{\sqrt{2}}, \\ \psi(x) &= f(2x) + g(0), \quad -\frac{L_2}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant 0 \end{aligned} \tag{38.4}$$

相关联, 这一对关系式是相容的, 如果正如将要假设的

$$\varphi(0) = \psi(0).$$

从 (38.4) 推出

$$\begin{aligned} g(\sigma) &= \varphi\left(\frac{\sigma}{2}\right) - f(0), \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant \sqrt{2}L_1, \\ f(\sigma) &= \psi\left(\frac{\sigma}{2}\right) - g(0), \quad -\sqrt{2}L_2 \leqslant \sigma \leqslant 0 \end{aligned} \tag{38.5}$$

和

$$f(0) + g(0) = \varphi(0) = \psi(0),$$

所以用已知的一对函数 ψ, φ 连同已知道其和的附加条件 $f(0), g(0)$，函数 f, g 就分别被确定了. 将这些确定的式子吸收到 (38.2) 中, 就得到所提问题的完全确定的解, 即

$$u(x,y) = \varphi\left[\frac{x+y}{2}\right] + \psi\left[\frac{x-y}{2}\right] - \psi(0), \tag{38.6}$$

且它满足分别沿 OP 和 OR 的规定分布 $\varphi(x),\psi(x)$ 是显然的; 此外, 沿线段 PQ 和 QR, 通过 φ,ψ 在有关自变量范围上的已知值就完全决定了表示式

$$u=\varphi\left[\frac{L_1}{\sqrt{2}}\right]+\psi\left[x-\frac{L_1}{\sqrt{2}}\right]-\psi(0),\quad \frac{L_1-L_2}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant\frac{L_1}{\sqrt{2}}$$

和

$$u=\varphi\left[x+\frac{L_2}{\sqrt{2}}\right]+\psi\left[-\frac{L_2}{\sqrt{2}}\right]-\psi(0),\quad -\frac{L_2}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant\frac{L_1-L_2}{\sqrt{2}}.$$

特别地, 取分布

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{L_1}{2\sqrt{2}} \\ x-\dfrac{L_1}{2\sqrt{2}}, & \dfrac{L_1}{2\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant\dfrac{L_1}{\sqrt{2}} \end{cases}\tag{38.7}$$

和

$$\psi(x)=x,\quad -\frac{L_2}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant 0,$$

它们有整体连续的性质且在 $x=0$ 光滑地连接; 则解在正方形区域 (I), (II) 内取不同的显式表示, 而这两个正方形一起构成角点在 O,P,Q,R 的一个矩形区域, 即

$$u_{\mathrm{I}}(x,y)=\frac{x-y}{2},\quad u_{\mathrm{II}}(x)=x-\frac{L_1}{2\sqrt{2}}.\tag{38.8}$$

以上两式在由方程

$$y+x=\frac{L_1}{\sqrt{2}}$$

描述的特征线段 AB 上处处有相同的值, 虽然 u_{I} 和 u_{II} 的 x 和 y 偏导数在那里不同; 这样 (38.8) 在上述的矩形域内定义偏微分方程 (38.1) 的一个连续解, 沿 AB 有一个不连续的法向导数 (与 $\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial y}$ 成比例).

上述问题中很多特点可进行评论, 特别是它们对其他问题仍有持久不衰的意义; 一开始值得注意, 在一个区域的邻接线段上而不是沿区域边界处处指定数据提供了解所需要的合适的适定的规定. 此外, 解是在其边界由特征线段所构成的区域内被决定的, 而且这个区域简单地由该偏微分方程的两族特征线所覆盖. 如果边界分布是连续分布, 即使不连续可微, 其解具有同样性质; 而且从数据的导数不连续的边界点 A 出发的特征线可以看作是把这种奇异性状 "引入" 到解的定义域中.

其次假设当一对条件是沿共同的而且是非特征线段的线段例如 x 轴的区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上给定时, 即在该处

$$u(x,0)=\varphi(x)$$

和

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right|_{y=0} = \psi(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{38.9}$$

求偏微分方程 (38.1) 的解. 再用通解 (38.2), 由此推导出

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) + g(x), \\ \psi(x) &= -f'(x) + g'(x), \quad a \leqslant x \leqslant b \end{aligned} \tag{38.10}$$

构成确定 f 和 g 的联立方程组. 对第二个方程积分后, 得到关系式

$$f(x) - g(x) = -\int_c^x \psi(\zeta)d\zeta, \quad c \text{ 为常数}, \tag{38.11}$$

它与 (38.10) 的第一式一起得出用 φ, ψ 来表示 f, g 的表示式

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2}\int_c^x \psi(\zeta)d\zeta, \\ g(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\int_c^x \psi(\zeta)d\zeta, \quad a \leqslant x \leqslant b. \end{aligned} \tag{38.12}$$

这就直接导致解的一个经典形式, 称为 d'Alembert 解 (1747), 即

$$u(x,y) = \frac{\varphi(x+y) + \varphi(x-y)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} \psi(\zeta)d\zeta, \tag{38.13}$$

它在以点

$$(a,0), \left(\frac{1}{2}[a+b], -\frac{1}{2}[b-a]\right), \quad (b,0), \left(\frac{1}{2}[a+b], \frac{1}{2}[b-a]\right)$$

为角点且由特征线段为边构成的一个正方形 (见图 60) 内成立. 通常认为在 x 轴上面和下面该正方形的三角形部分是该轴上规定数据的影响区域; 对 x, y 平面上的其他处这样的数据不起作用. 反之, 当在 x, y 平面上一个点 P 已选定时, 在该点处的解 u_P 仅依赖于过 P 的一对特征线与 x 轴两交点之间的 x 轴部分上的数据; 且每一个这样的三角形称为该点解的依赖区域. 数据中的不连续性结果导致对解的不连续性, 而从不连续点出发的特征线标志着影响区域内的奇线.

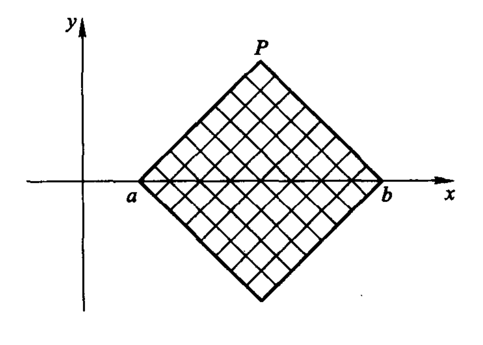


图 60

特征线 (或一般的特征曲线) 被挑选出来作为决定偏微分方程的 (唯一的)

特解所需要指定数据的适当位置; 例如, 如果 u 及其法向导数是指定在 (38.1) 的特征线 $y=x$ 上, 即

$$u(x,y)=\varphi(x),\quad \left[-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right]=\psi(x),\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

从通解 (38.2) 得出的关系式

$$f(0)+g(2x)=\varphi(x),\quad a\leqslant x\leqslant b$$

和

$$-2f'(0)=\psi(x),\quad a\leqslant x\leqslant b$$

显然不能决定 f 和 g. 所以沿特征线的数据的选择是有限制的, 与在第二章中对一阶偏微分方程观察到的这个性质是一致的.

再考虑 (38.1) 的除了满足沿半直线 $x>0$ 上形为 (38.9) 的那些条件外, 还满足条件

$$u(0,y)=0,\quad y>0 \tag{38.14}$$

的解. 只要 $x\pm y>0$, d'Alembert 表示式 (38.13) 仍然有效, 因为带有正自变量的函数 φ,ψ 已给出; 且如果函数 φ,ψ 有奇对称性, 即

$$\varphi(-\sigma)=-\varphi(\sigma),\quad \psi(-\sigma)=-\psi(\sigma),\quad \sigma>0,$$

则满足从 (38.13) 在 $x=0$ 导出的要求

$$0=\frac{1}{2}[\varphi(y)+\varphi(-y)]+\frac{1}{2}\int_{-y}^{+y}\psi(\zeta)d\zeta,\quad y>0.$$

对 φ,ψ 的给定值从正自变量范围采用奇对称性规定扩张到负自变量范围, 表示式 (38.13) 现在对所有 $x,y>0$ 都适用且提供该问题所要求的解.

设边界条件 (38.14) 换成非齐次条件, 即

$$u(0,y)=\chi(y),\quad y>0, \tag{38.15}$$

注意到从偏微分方程 (38.1) 的通解

$$u(x,y)=f(x-y)+g(x+y)$$

推演出的表示式 (38.12) 连同条件 (38.9) 在 $x>0$ 上完全决定 $f(x)$ 和 $g(x)$. 当 $x-y<0$ 时, 为了得到 (38.2) 中所要求的 f 的值, 边界条件 (38.15) 加在 (38.2) 上, 有

$$\chi(y)=f(-y)+g(y)$$

或

$$
\begin{aligned}
f(-y) &= \chi(y) - g(y) \\
&= \chi(y) - \frac{1}{2}\varphi(y) - \frac{1}{2}\int_c^y \psi(\zeta)d\zeta, \quad y > 0.
\end{aligned} \tag{38.16}
$$

因此 (38.16) 补充了所要找的 f 带负自变量的值, 且关系式 (38.2),(38.12),(38.16) 联合起来就构成了所要求解的互补表示式

$$
u(x,y) = \begin{cases} \chi(y-x) + \dfrac{1}{2}[\varphi(x+y) - \varphi(y-x)] + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{y-x}^{y+x} \psi(\zeta)d\zeta, & y > x, \\ \dfrac{1}{2}[\varphi(x-y) - \varphi(y+x)] + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-y}^{x+y} \psi(\zeta)d\zeta, & y < x, \end{cases} \tag{38.17}
$$

它在第一象限 $x > 0, y > 0$ 过原点的特征线 $y = x$ 的上面和下面的扇形 $y > x, y < x$ 内成立. 分别的表示式沿这条特征线并不一致, 除非 u 在 x 和 y 轴上的指定值在原点有一连续拟合, 即

$$
\chi(0) = \varphi(0).
$$

类似地, 沿此特征线 $u(x,y)$ 的法向导数有不连续性, 除非在原点包含 ψ 和 χ 的一个确定关系式成立; 这样, 使所需的导数组合

$$
-\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y\to x+0} = 2\chi'(0) - \varphi'(0) - \psi(0)
$$

和

$$
-\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y\to x-0} = -\varphi'(0) + \psi(0)
$$

相等, 合适的关系式证明是

$$
\chi'(0) = \psi(0).
$$

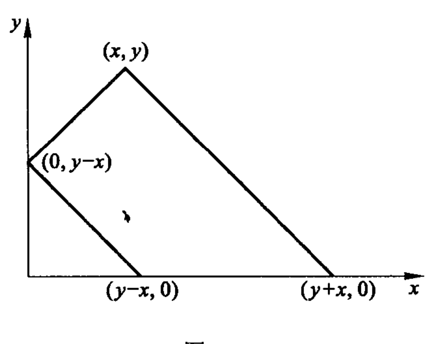


图 61

当 $y > x$ 时, 解 $u(x,y)$ 的依赖区域不同于底边沿 x 轴的三角形区域, 由于除 x 轴上数据外有 y 轴上的数据 (与在 $x = 0$ 的边界条件相联系); 且其多边形边界 (见图 61) 由特征线段构成.

包含对每个自变量 x, y 的二阶导数的偏微分方程 (38.1) 的通解

$$
u(x,y) = F(y-x) + G(y+x) \tag{38.18}
$$

中的一对函数 F, G, 当以下 4 个条件给定时就能确定, 即沿 x 轴的一对条件

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \left.\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right|_{y=0}=\psi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant L \tag{38.19}$$

和沿直线 $x=0, x=L$ 的各一个条件

$$u(0,y)=0, \quad u(L,y)=0, \quad y\geqslant 0; \tag{38.20}$$

因而就求得了在半无限区域

$$0<x<L, \quad y>0$$

中的解, 且 F, G 的自变量范围分别是 $(-L,\infty), (0,\infty)$. 当条件 (38.19) 用在自变量的有限区间上时能推演出有限的解的信息; 所以必须用边界条件 (38.20) 得到其余信息. 将后者用到函数 (38.18) 上, 给出

$$F(y)+G(y)=0, \quad y>0, \tag{38.21}$$

和

$$F(y-L)+G(y+L)=0, \quad y>0; \tag{38.22}$$

现在令 (38.22) 中的 y 换成 $y+L$, 所得关系式为

$$F(y)+G(y+2L)=0, \quad y>0,$$

连同 (38.21) 推断出

$$G(y+2L)=G(y), \quad y>0. \tag{38.23}$$

类似地, (38.21) 中的 y 换成 $y+L$ 且注意 (38.22), 其结果是

$$F(y-L)=F(y+L), \quad y>0. \tag{38.24}$$

所以按照 (38.23),(38.24), F 和 G 两个函数都有周期性质, 且一旦它们在一基本周期 $2L$ 上被确定, 则不论其自变量取值如何, 都成为已知的.

从 (38.18),(38.19) 推断出的条件是 (用撇 “$'$” 表示对 x 的微分符号)

$$F(-x)+G(x)=\varphi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant L,$$
$$F'(-x)+G'(x)=\psi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant L,$$

且对后者积分后取形式

$$-F(-x)+G(x)=\int_c^x \psi(\zeta)d\zeta.$$

这样就直接得出 F 和 G 的分别的表示式, 即

$$F(-\sigma)=\frac{1}{2}\varphi(\sigma)-\frac{1}{2}\int_c^\sigma \psi(\zeta)d\zeta,\quad 0<\sigma<L,$$
$$G(\sigma)=\frac{1}{2}\varphi(\sigma)+\frac{1}{2}\int_c^\sigma \psi(\zeta)d\zeta,\quad 0<\sigma<L;\tag{38.25}$$

当这些式子和关系式 (38.21),(38.22) 联合起来, 接着就求得

$$F(\sigma)=-\frac{1}{2}\varphi(\sigma)-\frac{1}{2}\int_c^\sigma \psi(\zeta)d\zeta,\quad 0<\sigma<L,$$
$$G(\sigma)=-F(\sigma-2L)=-\frac{1}{2}\varphi(2L-\sigma)+\frac{1}{2}\int_c^\sigma \psi(\zeta)d\zeta,\quad L<\sigma<2L.\tag{38.26}$$

因此, (38.25),(38.26) 提供了用 φ 和 ψ 的在长为 $2L$ 的自变量区间上的指定值来表示的 F 和 G 的显式表示式; 且这样就得到了要找的偏微分方程 (38.1) 的解 (38.18).

上面的解适用于其边界部分 $x=0, x=L, y=0$ 不属于特征线族的矩形区域 (见图 62). 另一方面, 有特征线段对这一区域的一个覆盖, 这些线段从底边 $y=0, 0<x<L$ 出发, 与边界线 $x=0, L$ 的相继接触点经历 "反射"; 从点 $x_1(0<x_1<L)$ 引出的一对特征线及其前两个反射延伸出现于图 62 中.

图 62

设解 (38.17) 由在 $y=0, 0<x<\infty$ 的齐次条件 $(\varphi=0, \psi=0)$ 所限定; 给出边界条件

$$u(0,y)=\chi(y),\quad y>0,\tag{38.27}$$

则解的形式是

$$u(x,y)=\widehat{\chi}(y-x),\tag{38.28}$$

这里

$$\widehat{\chi}(\sigma)=\begin{cases}\chi(\sigma), & \sigma>0,\\ 0, & \sigma<0.\end{cases}$$

其次选定 x 的一个有限范围, 即 $0<x<L$, 且加上另外的边界条件

$$u(L,y)=0,\quad y>0,$$

早先的解 (38.28) 在现在情形下仍然保持成立只要

$$y<L.$$

该偏微分方程的个别解的组合

$$\widehat{\chi}(y-x)-\widehat{\chi}(y+x-2L) \tag{38.29}$$

在 $x=L$ 为零且比 (38.28) 在更宽的范围 $0<y<2L$ 上有效; 在 (38.29) 上加上另一项

$$\widehat{\chi}(y-x-2L)$$

使之满足在 $x=0$ 的边界条件从而扩张这个解到范围 $y<3L$. 按这方式继续, 就给出了一个一般表示式, 即

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{\chi}(y-2nL-x)-\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{\chi}(y-2nL+x), \quad 0<x<L, y>0, \tag{38.30}$$

而且容易证实它满足此偏微分方程和在 $x=0, x=L, y=0$ 的边界条件.

二阶线性双曲型偏微分方程

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}, \tag{38.31}$$

称为一维齐次波动方程, 作为沿弦的位置坐标 x 和时间变量 t 的函数, 描述一拉紧弦偏离 x 轴的小振幅平面局部位移 $s(x,t)$ (见图 63), 如果该弦有均匀质量密度 ρ 且当位移发生时其内张力 P 保持不变, 则 (38.31) 中的常系数 c 有速度的量纲, 等于

$$c=\sqrt{P/\rho}.$$

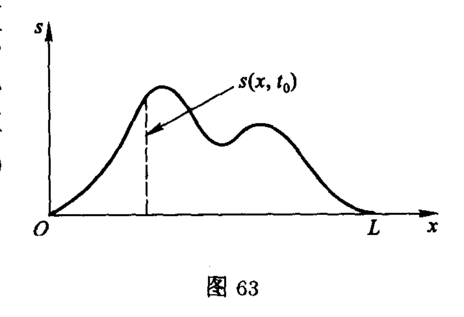


图 63

(38.31) 的通解

$$s(x,t)=F(x-ct)+G(x+ct) \tag{38.32}$$

中的各项有一个有用的解释, 即它们刻画任意的位移图形, 当时间变量 t 增加时, 它们不改变形状, 在 x 的值的增或减方向以速度 c 平移. 因此由 F 表示的图形在时间 t 的相继时刻 $t_1, t_2(>t_1)$ 仅仅是向 x 的较大值移动总计量 $c(t_2-t_1)$.

由 (38.31) 和适用于该弦固定端点 $x=0, L$ 的一对条件

$$s(0,t)=0, \quad s(L,t)=0, \quad t>0 \tag{38.33}$$

组成的方程组能用早先对二阶抛物型和椭圆型偏微分方程详述过的分离变量法来研究. 该方程组的本征函数和本征值是

$$\sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n=1,2,\cdots$$

因此在规定的有限范围的端点为零的该波动方程的特解有形式

$$s_n(x,t) = a_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\left(\frac{n\pi ct}{L} - \delta_n\right), \quad n = 1, 2, \cdots \tag{38.34}$$

这里 a_n 和 δ_n 表示任意常数; 这样的解有周期性时间变化, 具有角频率 $\omega_n = n\pi c/L$ 和一个正弦的坐标变化, 在 $x = 0, L$ 之间有 $n - 1$ 个结点. 将具有固定端点的弦的这些离散本征振动叠加, 就得到 (38.31) 的一个更一般的解

$$s(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos(\omega_n t - \delta_n), \tag{38.35}$$

它满足预先指定的在 $t = 0$ 的一对初始条件 (可以回顾一下, 它比扩散方程所需满足的初始条件多一个关于时间的一阶导数); 这样, 如果

$$s_0(x) = s(x,0), \quad v_0(x) = \frac{\partial}{\partial t}s(x,t)\bigg|_{t=0}, \quad 0 < x < L$$

分别规定初始弦位移和速度, 由 (38.35) 推断出的且决定 (38.34) 中参数 a_n, δ_n 的一对 Fourier 正弦级数表示式有形式

$$\begin{aligned} s_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\delta_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad 0 < x < L, \\ v_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\omega_n \cos\delta_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad 0 < x < L. \end{aligned} \tag{38.36}$$

在做了与这些本征函数的正交性有关的熟悉运算后, 就求得

$$\begin{aligned} a_n \cos\delta_n &= \frac{2}{L}\int_0^L s_0(x')\sin\frac{n\pi x'}{L}dx', \\ a_n\omega_n \sin\delta_n &= \frac{2}{L}\int_0^L v_0(x')\sin\frac{n\pi x'}{L}dx', \quad n = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

且这些表示式连同 (38.35), 提供了 (38.32) 式在 $0 < x < L, t > 0$ 中的一个表示, 它的分量函数 F, G 对其所有自变量的值以

$$\begin{aligned} F(\sigma) &= \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi\sigma}{L}\int_0^L s_0(x')\sin\frac{n\pi x'}{L}dx' \\ &\quad + \frac{1}{\pi L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi\sigma}{L}\int_0^L v_0(x')\sin\frac{n\pi x'}{L}dx', \\ G(\sigma) &= \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi\sigma}{L}\int_0^L s_0(x')\sin\frac{n\pi x'}{L}dx' \\ &\quad - \frac{1}{\pi L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi\sigma}{L}\int_0^L v_0(x')\sin\frac{n\pi x'}{L}dx' \end{aligned} \tag{38.37}$$

给出. 与 (38.23),(38.24) 一致, 对 F, G 的上述表示式定义了其自变量的 $2L$ 周期函数.

将坐标原点重新定在弦的中心且假设 $v_0(x)=0$, 则得到一个特解

$$\begin{aligned} s(x,t) = & \frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{2n\pi x}{L}\cos\omega_{2n}t\int_{-L/2}^{L/2}s_0(x')\sin\frac{2n\pi x'}{L}dx' \\ & +\frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{L}\cos\omega_{2n+1}t\int_{-L/2}^{L/2}s_0(x')\cos\frac{(2n+1)\pi x'}{L}dx', \end{aligned} \tag{38.38}$$

且这形式能用以推断取极限 $L\to\infty$ 时的对应解, 关系式

$$\begin{cases} \omega_{2n+2}-\omega_{2n}=\dfrac{2\pi c}{L}\to 0, & L\to\infty, \\ \omega_{2n+3}-\omega_{2n+1}=\dfrac{2\pi c}{L}\to 0, & L\to\infty \end{cases}$$

表明对无穷长弦的振动任何频率是允许的, 与有限长弦的离散型特征形成对照. 考虑到当 L 很大, 连同一个包含 $2n+1$ 而非 $2n$ 的类似式子,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Phi\left(\frac{2n\pi}{L}\right)\to\int_0^{\infty}\Phi\left(\frac{2\sigma L}{\pi}\right)d\sigma\to\frac{L}{2\pi}\int_0^{\infty}\Phi(\zeta)d\zeta$$

成立, 从 (38.38) 看来 Fourier 积分表示式

$$s(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\zeta\cos\zeta ct\int_{-\infty}^{\infty}s_0(x')\cos\zeta(x-x')dx' \tag{38.39}$$

似乎描述了给定一对初始条件 $s(x,0)=s_0(x)$, $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)s(x,t)\Big|_{t=0}=0$ 后的无穷长弦的位移.

在 $t=0$ 处 (38.39) 的自相容性是以关系式

$$s_0(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x')s_0(x')dx', \quad -\infty<x<\infty$$

为条件的, 这里被积式因子

$$\begin{aligned} \delta(x-x') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\zeta(x-x')}d\zeta=\delta(x'-x) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\zeta(x-x')d\zeta \end{aligned} \tag{38.40}$$

以很特殊方式起作用, 从另一个因子的自变量范围内的所有值中选取一个单独的值. 在人们以非严格的方式应用并普及了上述 δ 函数后, Schwartz (施瓦兹,

1915—2002) 于 1947 年给出了对这样一个广义函数的合适的数学解释. 值得注意的是, (38.40) 使得能够对二重积分 (38.39) 赋值, 即

$$s(x,t)=\frac{1}{2}[s_0(x-ct)+s_0(x+ct)],$$

事实上, 这正是 (38.31) 的具有规定初始条件的合适解.

由于分离变量乘积形式

$$\exp\left[\pm i\frac{\omega}{c}+i\omega t\right]=\exp\left[i\omega\left(\pm\frac{x}{c}+t\right)\right]$$

描述 (38.31) 的解不论频率参数 ω 取何值, 它们的 Fourier 积分或叠加, 即

$$s(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[A(\omega)e^{i\frac{\omega x}{c}}+B(\omega)e^{-i\frac{\omega x}{c}}\right]e^{i\omega t}d\omega \tag{38.41}$$

能直接用于非齐次边界条件

$$s(0,t)=s_1(t),\quad s(L,t)=s_2(t),\quad t>0 \tag{38.42}$$

的情形; 这样, (38.41),(38.42) 提供了关系式

$$s_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[A(\omega)+B(\omega)]e^{i\omega t}d\omega,\quad t>0,$$
$$s_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[A(\omega)e^{i\frac{\omega L}{c}}+B(\omega)e^{-i\frac{\omega L}{c}}\right]e^{i\omega t}d\omega,\quad t>0,$$

这转而推导出

$$A(\omega)+B(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}s_1(t')e^{-i\omega t'}dt'$$

和

$$A(\omega)e^{i\frac{\omega L}{c}}+B(\omega)e^{-i\frac{\omega L}{c}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}s_2(t')e^{-i\omega t'}dt'.$$

解对 $A(\omega)$ 和 $B(\omega)$ 的上面两个方程, 然后代入到 (38.41) 中, 在该区间的端点 $x=0,L$ 取给定值的波动方程预期的解就得到了, 即

$$s(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_0^{\infty}\frac{s_1(t')\sin\dfrac{\omega}{c}(L-x)+s_2(t')\sin\dfrac{\omega x}{c}}{\sin\dfrac{\omega L}{c}}e^{i\omega(t-t')}dt'. \tag{38.43}$$

利用 δ 函数表示式 (38.40) 及其作用容易证实上面的表示式满足初始条件; 此外,

设 $s_2(t)=0$ 且在 (38.43) 中引入展开式

$$\begin{aligned}\frac{\sin\frac{\omega}{c}(L-x)}{\sin\frac{\omega L}{c}}&=\frac{e^{-i\frac{\omega x}{c}}-e^{-i\frac{\omega}{c}(2L-x)}}{1-e^{-2i\omega L/c}}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left[-i\frac{\omega}{c}(x+2nL)\right]-\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left[-i\frac{\omega}{c}(2(n+1)L-x)\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left[-i\frac{\omega}{c}(x+2nL)\right]-\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-i\frac{\omega}{c}(2nL-x)\right],\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}s(x,t)=&\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}s_1(t')\delta\left(t'-t+\frac{x+2nL}{L}\right)dt'\\&-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}s_1(t')\delta\left(t'-t+\frac{2nL-x}{c}\right)dt'\\=&\sum_{n=0}^{\infty}s_1\left(t-\frac{2nL+x}{c}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}s_1\left(t-\frac{2nL-x}{c}\right),\end{aligned}$$

与 (38.30) 一致.

需要注意在 (38.43) 的分母中的三角函数 $\sin\frac{\omega L}{c}$ 当 ω 等于任何一个自由振动频率 $\omega_n=n\pi c/L$ 时为零, 这种增强或共振响应的现象是很多动力系统具有的特点; 因此这个 ω 积分应从实轴上挖掉点 ω_n 附近的一段以求得其确切的意义. 此外, 由于 $s(x,t)$ 在以后的时间, 即 $t'>t$ 时不能依赖于端点位移 $s_1(t'),s_2(t')$, (38.43) 中的 t' 积分的上限实际上等于 t. 在运动方程中引入附加 (即阻尼) 项后, 不需要绕过实 ω 轴上的共振奇点就能得到 $s(x,t)$ 有确切定义的积分表示式; 这样, 给出偏微分方程

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}-\frac{2\epsilon}{c^2}\frac{\partial s}{\partial t}=0,\quad \epsilon>0,$$

当 $\epsilon/\omega\ll 1$ 时具有形为

$$s(x,t)=e^{i\omega t}\exp\left[\pm i\frac{\omega x}{c}\pm\frac{\epsilon x}{c}\right]$$

的近似解, 令

$$s(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[A(\omega)e^{i\frac{\omega x}{c}+\frac{\epsilon x}{c}}+B(\omega)e^{-i\frac{\omega x}{c}-\frac{\epsilon x}{c}}\right]e^{i\omega t}d\omega.$$

加上条件 (38.42) 以求用 $s_1(t), s_2(t)$ 去表示 $A(\omega), B(\omega)$, 由此推导出

$$s(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \cdot \int_0^t \frac{s_1(t')\sin\left[\frac{\omega - i\epsilon}{c}(L-x)\right] + s_2(t')\sin\left[\frac{\omega - i\epsilon}{c}x\right]}{\sin\frac{\omega - i\epsilon}{c}L} e^{i\omega(t-t')}dt', \tag{38.44}$$

这里复值组合 $\omega - i\epsilon$ 出现于各个自变量中且分母中的三角函数对 ω 的任何实值不为零. 用 ω' 代替 $\omega - i\epsilon$ 将 (38.44) 转换成另一表示式

$$s(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \cdot \int_0^t \frac{s_1(t')\sin[\omega'(L-x)] + s_2(t')\sin\omega' x}{\sin\omega' L/c} e^{-\epsilon(t-t')}e^{i\omega'(t-t')}dt',$$

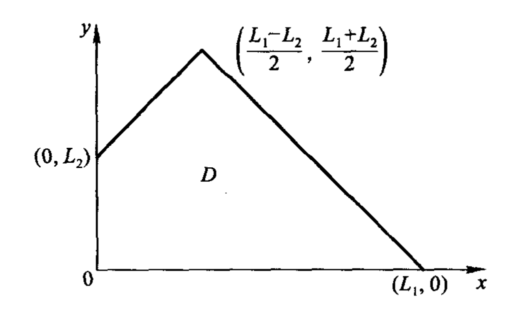
其中对 ω' 的积分周线在实轴下方伸展.

无需说明, 不是每一个线性双曲型偏微分方程会有通过便于施加的补充条件而得到的通解; 然而, 在上面考虑的简单情形的解的很多特点有更广的意义, 而且特征变量和特征曲线的重要作用继续保持.

习 题 38

1. 考虑偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$



连同齐次规定

$$u(x,0) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right|_{y=0} = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant L_1$$

和

$$u(0,y)=0,\quad 0\leqslant y\leqslant L_2,$$

这里 $L_1>L_2$; 证明: 在有一对特征线段边界的区域 D 内

$$u=0.$$

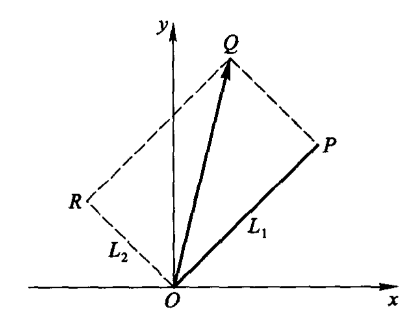
2. 设要求解偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

这时 u 的值在两线段 OP,OQ 上被规定, 其中 OQ 不是特征线的一部分. 如果矩形 $OPQR$ 的平行边有长度 L_1,L_2 (如 $L_1>L_2$) 且 OP,OQ 的方程分别是

$$y=x,\quad 0\leqslant x\leqslant \frac{L_1}{\sqrt{2}}$$

和



$$y=\alpha x,\quad \alpha=\frac{L_1+L_2}{L_1-L_2}>1,\quad 0\leqslant x\leqslant \frac{L_1-L_2}{\sqrt{2}};$$

证明: 当 $\varphi(0)=\psi(0)$,

$$\begin{cases} u=\varphi(x) & \text{在 } OP \text{ 上},\\ u=\psi(x) & \text{在 } OQ \text{ 上} \end{cases}$$

时, 表示式

$$u(x,y)=\psi\left[\frac{L_1-L_2}{2L_2}(y-x)\right]+\varphi\left[\frac{y+x}{2}\right]-\varphi\left[\frac{L_1}{2L_2}(y-x)\right]$$

在整个矩形区域 $OPQR$ 连续. 问 u 沿 OP,OQ 的法向导数是什么? 计算在原点附近沿角 QOP 的角平分线的 u 的方向导数.

3. 设要求偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

的解, 给出沿非特征线的三个不同条件, 即

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=\psi(x)\quad x\geqslant 0 \tag{*}$$

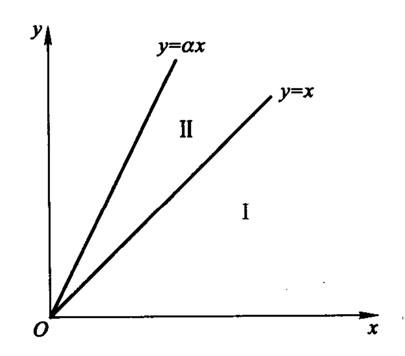
和

$$u=\chi(x)\ \text{在}\ y=\alpha x\ \text{上}\ \alpha>1,\quad x\geqslant 0. \tag{**}$$

在 x 轴的条件 (*) 已被吸收于 (以前导出的解)

$$u_{\mathrm{I}}(x,y)=\frac{1}{2}[\varphi(x-y)+\varphi(x+y)]+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\psi(\zeta)d\zeta$$

之中了, 它在直线 $y=0,y=x,x>0$ 之间的扇形 I 内成立.



考虑 $u_{\mathrm{I}}(x,y)$ 沿 $y=x$ 的值, 指定值 (**) 和问题 2 的分析, 连同

$$\frac{L_1-L_2}{2L_2}\to-\frac{1}{1-\alpha},\quad \frac{L_1}{2L_2}\to\frac{1+\alpha}{1-\alpha},$$

验证在 (II) 中 u 的表示式为

$$u_{\mathrm{II}}(x,y)=\chi\left(\frac{x-y}{1-\alpha}\right)+\frac{1}{2}\left[\varphi(x+y)-\varphi\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}(x-y)\right)\right]+\frac{1}{2}\int_{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}^{x+y}\psi(\zeta)d\zeta.$$

函数 u_{I} 和 u_{II} 联合地定义在整个 I, II 上满足该偏微分方程的一个连续函数, 且后者也把这个解扩张到直线 $y=\alpha x,x>0$ 和 (特征) 直线 $y+x=0,x<0$ 之间触及原点的扇形中. 该解沿特征线 $y=x,x>0$ 的连续法向导数不能自动得到; 证明: 为使之成立的必要条件

$$\left[-\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right]u_{\mathrm{I}}\Big|_{y=x}=\left[-\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right]u_{\mathrm{II}}\Big|_{y=x},\quad x>0$$

规定在原点的数据的值之间的一个特定关系, 即

$$(\alpha+2)\varphi'(0)+2\alpha\psi(0)=2\chi'(0).$$

4. 用双曲型偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad y<0$$

的特征变量

$$\xi=x-\sqrt{-y},\quad \eta=x+\sqrt{-y},\quad y<0$$

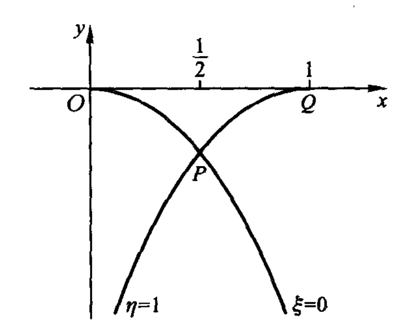
重新改写此方程, 然后得出解的一般形式. 确定分别在 OP 和 PQ 之间的特征抛物线

$$\xi=0,\quad \eta=1$$

的线段上取给定值

$$\begin{cases} u=\varphi_1(x), & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2},\\ u=\varphi_2(x), & \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1, \end{cases}\quad \varphi_1\left(\frac{1}{2}\right)=\varphi_2\left(\frac{1}{2}\right)$$

的特解.



这个解在什么区域上成立? 假设用沿 OQ

$$u=\varphi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1$$

来取代上述条件, $u(x,y)$ 在何处且如何被决定?

5. 证明: 双曲型偏微分方程

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{i}$$

当用特征变量

$$\xi=xy,\quad \eta=\frac{y}{x};$$

重新改写后取形式

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{1}{2\xi}u\right]=0; \tag{ii}$$

推演出 (ii) 的通解为

$$u(\xi,\eta)=f(\xi)+\sqrt{|\xi|}g(\eta).$$

用后者去寻找 (i) 的满足条件

$$u=\varphi_1(x)\ 在\ y=x\ 上,\quad 0\leqslant x\leqslant 1$$

和

$$u=\varphi_2(x)\ 在\ y=\frac{1}{x}\ 上,\quad 1\leqslant x<\infty,\quad \varphi_1(1)=\varphi_2(1)$$

的特解. 这个解在什么区域上成立?

6. 构造偏微分方程

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad x>0 \tag{i}$$

的通解, 利用到特征变量

$$\xi=y-\ln x,\quad \eta=y+\ln x.$$

观察到 (i) 能写成因子分解形式, 即

$$\left[x\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right]\left[x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right]=0$$

因此替换成一对一阶偏微分方程

$$\begin{aligned} x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}&=v,\\ x\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}&=0. \end{aligned} \tag{ii}$$

说明如何从方程组 (ii) 可以推导出 (i) 的通解.

7. 给定非齐次偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{-x}\sin y,\quad x>0,\quad y>0, \tag{i}$$

它的通解有形式

$$u(x,y)=\frac{1}{2}e^{-x}\sin y+f(x-y)+g(x+y).$$

如果

$$u(x,0)=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\Big|_{y=0}=0,\quad x>0,$$

决定 (i) 的一个合适解, 说明基于条件

$$u(x,x)=\varphi(x) \text{ 规定在 } 0\leqslant x\leqslant\infty \text{ 上},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)\Big|_{x=0}=0,$$

如何能把这个解延拓到 x,y 平面的其他处.

8. 无限长弦的小振幅横向位移 $s(x,t)$ 的偏微分方程

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2},\quad -\infty<x<\infty, t>0 \tag{i}$$

的基本解由一对条件

$$s(x,0)=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}s(x,t)\Big|_{t=0}=\delta(x) \tag{ii}$$

定义, 它们表示弦的初始位移处处为零, 在点 $x=0$ 有一个局部脉冲 (或瞬时速度); 对应于扩展了的初始速度模式的其他解能从这个解直接找到.

设 $H(z)$ 表示 Heaviside (阶梯) 函数, 具有值

$$H(z)=\begin{cases}1, & z>0,\\ 0, & z<0\end{cases}$$

和导数

$$\frac{dH}{dz}=\delta(z);$$

其次记

$$s(x,t)=AH[\xi(x,t)]+BH[\eta(x,t)], \tag{iii}$$

这里

$$\xi(x,t)=x-ct=C_1,\quad \eta(x,t)=x+ct=C_2$$

确定 (i) 的特征曲线且 A,B 是常数. 证实 (iii) 表示 (i) 的解且用条件 (ii) 去确定

$$A=-B=\frac{1}{2c},$$

因此得到受欢迎的解为

$$s(x,t)=\frac{1}{2c}[H(x+ct)-H(x-ct)]=\begin{cases}\dfrac{1}{2c}, & |x|<ct,\\ 0, & |x|>ct.\end{cases}$$

这个结果是否与更一般初值问题的 d'Alembert 表示式相容?

作为另一种分析方法, 引入 $s(x,t)$ 的复 Fourier 变换, 即

$$\widehat{s}(k,t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}s(x,t)dx,$$

验证对它的微分方程

$$\frac{d^2\widehat{s}}{dt^2}+(kc)^2\widehat{s}=0$$

和相容表示式

$$s(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A(k)e^{ikct}+B(k)e^{-ikct}]e^{ikx}dk.$$

用初始条件 (ii) 合适地确定 $A(k),B(k)$, 且从而建立基本解的一个积分形式, 即

$$\begin{aligned}s(x,t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin kct}{kc}e^{ikx}dk\\&=\frac{1}{2\pi c}\int_{-\infty}^{\infty}[\sin k(x+ct)-\sin k(x-ct)]\frac{dk}{k}\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{2c}, & |x|<ct,\\ 0, & |x|>ct,\end{cases}\end{aligned}\qquad\text{(iv)}$$

它与前面的结论一致.

设波动方程 (i) 由于包含一个附加项而被修正为

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}-\frac{2\epsilon}{c}\frac{\partial s}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=0,\quad \epsilon>0,$$

它考虑与局部速度 $\dfrac{\partial s}{\partial t}$ 成比例的该运动的阻尼. 用 Fourier 变换方法以及由此得到对 (iv) 的置换

$$s(x,t)=\frac{1}{2\pi c}e^{-\epsilon ct}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{k^2-\epsilon^2}ct}{\sqrt{k^2-\epsilon^2}}e^{ikx}dk,$$

它也能显式地计算出来, 即

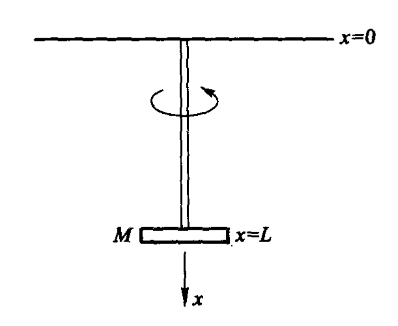
$$\begin{aligned}s(x,t)&=\frac{1}{\pi c}e^{-\epsilon ct}\int_{0}^{\infty}\cos kx\frac{\sin\sqrt{k^2-\epsilon^2}ct}{\sqrt{k^2-\epsilon^2}}dk\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{2c}e^{-\epsilon ct}I_0[\epsilon\sqrt{c^2t^2-x^2}], & ct>|x|,\\ 0, & ct<|x|,\end{cases}\end{aligned}$$

这里 $I_0(x)=J_0(ix)$ 是一个柱函数.

9. 弹性圆柱形梁的扭转振动由波动方程

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} \tag{i}$$

描述, 这里 $\vartheta(x,t)$ 表示各平面截面绕轴向或 x 方向的角位移或扭转, 而 c 依赖于该梁的材料参数.



如果上端点 $(x=0)$ 固定且一个附加质量或负载 M 附着于下端点 $(x=L)$, 则合适的边界条件是

$$\vartheta(0,t)=0,\quad \frac{\partial\vartheta}{\partial x}=-\alpha^2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}\ 在\ x=L,\quad t>0, \tag{ii}$$

其中 α^2 与 M 成比例. 存在偏微分方程 (i) 的分离变量解, 即

$$\vartheta(x,t)=X(x)T(t), \tag{iii}$$

其单自变量因子 $X(x),T(t)$ 必须满足包含任意参数 ω 的分别的常微分方程

$$\frac{d^2T}{dt^2}+\omega^2T=0 \tag{iv}$$

和

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2X=0,\quad 0<x<L. \tag{v}$$

验证此问题的本征函数或非平凡解 (v) 满足 (由 (ii), (iv) 推出的) 边界条件

$$X(0)=0,\quad \left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=L}=(\omega\alpha)^2X(L), \tag{vi}$$

有形式

$$X_n(x)=\sin\frac{\omega_n}{c}x,\quad n=1,2,\cdots$$

它包含本征值 ω_n 或超越方程

$$\cot\lambda_n=\frac{(\alpha c)^2}{L}\lambda_n,\quad \lambda_n=\frac{\omega_nL}{c} \tag{vii}$$

的根. 断定这些本征函数的非正交性质, 由关系式

$$\int_0^L X_m(x)X_n(x)dx = -(\alpha c)^2 X_m(L)X_n(L), \quad m \neq n \tag{viii}$$

所显示.

给出一对规定的初始条件

$$\vartheta(x,0) = \vartheta_0 \frac{x}{L}, \quad \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < L, \tag{ix}$$

设 $\vartheta(x,t)$ 的展开式为

$$\vartheta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) \cos \omega_n t, \tag{x}$$

其时间因子是与 (ix) 的第二个条件相容的 (iv) 的解, 系数 a_n 用第一个条件从 Fourier 型表示式

$$\vartheta(x,0) = \vartheta_0 \frac{x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x), \quad 0 < x < L \tag{xi}$$

中求得. 利用 (vii) 和 (viii) 去建立各个系数的表示式

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\displaystyle\int_0^L \vartheta(x,0)X_n(x)dx + (\alpha c)^2 \vartheta(L,0)X_n(L)}{\displaystyle(\alpha c)^2 X_n^2(L) + \int_0^L X_n^2(x)dx} \\ &= 4\vartheta_0 \frac{c}{L} \frac{\sin \omega_n \dfrac{L}{c}}{\omega_n \left[2\omega_n \dfrac{L}{c} + \sin 2\omega_n \dfrac{L}{c}\right]}, \quad n = 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{xii}$$

结合 (x) 和 (xii) 就得到要求的解

$$\vartheta(x,t) = 4\vartheta_0 \frac{c}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n \dfrac{L}{c} \sin \dfrac{\omega_n x}{c} \cos \omega_n t}{\omega_n \left[2\omega_n \dfrac{L}{c} + \sin 2\omega_n \dfrac{L}{c}\right]} \tag{xiii}$$

有另一种方法去得到结果 (xiii), 不用提及前面的本征函数; 这包括一个积分变换分析, 即决定 $\vartheta(x,t)$ 的 Laplace 变换

$$\Theta(x,p) = \int_0^\infty e^{-pt} \vartheta(x,t)dt, \quad \mathrm{Re}\, p > 0;$$

这样, 利用初始条件可发现 Θ 满足非齐次常微分方程

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}-\left(\frac{p}{c}\right)^2\Theta=-\frac{p}{c^2}\vartheta_0\frac{x}{L},\quad 0<x<L, \tag{xiv}$$

这里变换变量 p 起参数作用. 利用边界条件 (vi), $\Theta(x,p)$ 的对应条件对变成

$$\Theta(0,p)=0,\quad \frac{\partial}{\partial x}\Theta\bigg|_{x=L}=-p\alpha^2\vartheta_0-p^2\alpha^2\Theta(L,t),$$

这些条件结合 (xiv) 的通解, 即

$$\Theta(x,p)=\frac{1}{p}\vartheta_0\frac{x}{L}+A\sinh\frac{p}{c}x+B\cosh\frac{p}{c}(L-x),$$

推断出

$$A=-\frac{c}{p^2L}\vartheta_0\frac{1}{\cosh\frac{p}{c}L+\alpha^2cp\sinh\frac{p}{c}L}$$

和

$$B=0,$$

所以

$$\Theta(x,p)=\frac{1}{p}\vartheta_0\frac{x}{L}-\frac{c}{p^2L}\vartheta_0\frac{\sinh\frac{p}{c}x}{\cosh\frac{p}{c}L+\alpha^2cp\sinh\frac{p}{c}L}$$

是完全确定的.

其 Laplace 变换等于 $\Theta(x,p)$ 的函数 $\vartheta(x,t)$ 能由计算反演积分而找到, 即

$$\begin{aligned}\vartheta(x,t)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}e^{pt}\Theta(x,p)dp,\epsilon>0\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}e^{pt}\left[\frac{1}{p}\vartheta_0\frac{x}{L}-\frac{c}{p^2L}\vartheta_0\frac{\sinh\frac{p}{c}x}{\cosh\frac{p}{c}L+\alpha^2cp\sinh\frac{p}{c}L}\right]dp,\end{aligned}$$

它是沿平行于复 p 平面的虚轴的一条直线来求积分的. 被积函数作为 p 的函数, 其奇点位于原点 $p=0$ 和由本征值方程 (viii) 确定的虚轴上的点集 $p_n=\pm i\omega_n$ 上. 在 $p=0$ 的单极点对积分没有最终的贡献, 因为被积函数的两分离部分产生相等的数量而消去, 从虚轴上所有单极点的贡献之和与 (x) 中表示的恰好一致.

10. 适用于横振动弦的波动方程

$$c^2\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \tag{i}$$

需要修改, 如果后者处于沿 x 方向以速度 v 作均匀纵向运动的状态; 且这通过满足

$$x' = x + vt, \quad t' = t$$

的变量变换 $x \to x', t \to t'$ 而导出; 按照导出的关系式

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad 和 \quad \frac{\partial}{\partial t} = v\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}$$

证实 (i) 变成

$$(v^2 - c^2)\frac{\partial^2 s}{\partial x'^2} + 2v\frac{\partial^2 s}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2 s}{\partial t'^2} = 0. \tag{ii}$$

今后在 (ii) 中去掉撇号 "′", 建立其通解为

$$s(x,t) = f[x - (c+v)t] + g[x + (c-v)t]. \tag{iii}$$

设在区间 $0 < x < L$规定初始位移和对应横向初速度

$$s(x,0) = s_0(x), \quad \left.\frac{\partial}{\partial t}s(x,t)\right|_{t=0} = v_0(x),$$

验证对自变量的有限制的范围内 (iii) 的解中的任意函数 f, g 的表示式为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{v}{c}\right)s_0(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x v_0(\zeta)d\zeta, \quad 0 < x < L, \\ g(x) &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{v}{c}\right)s_0(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x v_0(\zeta)d\zeta, \quad 0 < x < L. \end{aligned} \tag{iv}$$

如果运动的弦通过固定支点 $x = 0, L$ 上, 则要求

$$s(0,t) = 0, \quad s(L,t) = 0 \tag{v}$$

作为确定如 (iii) 的一般适用性所要求的对 f, g 的条件. 为此, 证明 (v) 的第一个要求推导出一个连接式

$$f(\zeta) = -g\left[-\frac{c-v}{c+v}\zeta\right], \quad -L\frac{c+v}{c-v} < \zeta < 0, \quad v < c, \tag{vi}$$

它扩充 f 的定义到负自变量的区间上 (通过从较早的表示式 (iv) 所得到的 g 的值); 而第二个要求推导出

$$g(\zeta) = -f\left[\frac{2cL}{c-v} - \frac{c+v}{c-v}\zeta\right], \quad L < x < \frac{2cL}{c+v}, \tag{vii}$$

它以类似方式扩充 g 的定义. 转而从 (vi), (vii) 消去 g 和 f, 推演出关系式

$$f(\zeta) = f\left[\frac{2cL}{c-v} + \zeta\right], \quad g(\zeta) = g\left[\zeta - \frac{2cL}{c+v}\right], \tag{viii}$$

它们刻画 f,g 作为有分别的周期

$$\frac{2cL}{c-v} \quad 和 \quad \frac{2cL}{c+v}$$

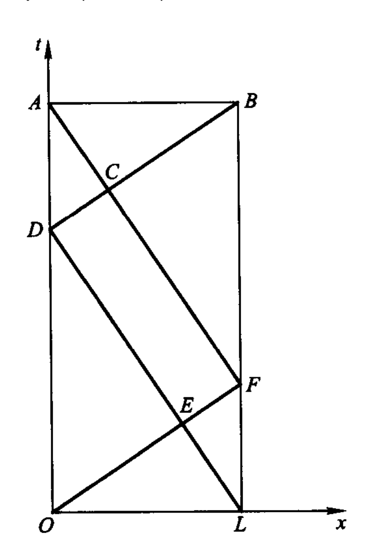
的函数, 验证不论其自变量如何, f,g 是有确切定义的, 且由 (iii) 给出的位移函数 $s(x,t)$ 按时间变化有周期

$$\frac{2cL}{c^2-v^2}.$$

如图, 考虑 x,t 平面中区域 $OABL$ 和它被偏微分方程 (ii) 的相交特征线的剖分; 一个特征线族的平行线段 OF 和 DB 由

$$t=\frac{x}{v+c}, \quad t=\frac{x}{v+c}+\frac{L}{c-v}$$

描述, 且第二族对应的一对 DL 和 AF 由



$$t=\frac{x-L}{v-c}, \quad t=\frac{x}{v-c}+\frac{2cL}{c^2-v^2}$$

描述. 这样线段 OA 的长度为

$$T=\frac{2cL}{c^2-v^2},$$

它等于 $s(x,t)$ 关于变量 t 的周期, 且 $s(x,t)$ 对

$$t>T, \quad 0<x<L$$

的值直接从区域 $OABL$ 内的那些值推演出. 在 $0 < x < L$ 上给定 $s_0(x)$ 和 $v_0(x)$ 的值, 在区域 OEL 中的解由 (iii),(iv) 给出; 证实在 ODE 和 BCF 中 f 的值用 (vi) 求得, 而 g 在 EFL 和 ACD 中的值由 (vii) 给出, 讨论 f,g 在区域 ABC 和 $CDEF$ 中的确定值.

11. 考虑在分析热交换中提出的满足耦合一阶偏微分方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= u_2 - u_1, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} &= u_1 - u_2, \end{aligned} \qquad x > 0, \quad t > 0, \tag{i}$$

的一对函数 $u_1(x,t), u_2(x,t)$; 这里 u_1, u_2 分别对应于一气体和一固体物质的温度, 且热传递从固体 (在 $x > 0$) 影响到周围的其初始水平 (在 $x = 0$) 给定的气体温度. 证明 u_1, u_2 满足一个共同的二阶双曲型偏微分方程, 且

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right](u_1 - u_2) = 0. \tag{ii}$$

此外, 如果

$$u_1 - u_2 = e^{-(x+t)} U(x,t), \tag{iii}$$

则 U 由二项方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} = U \tag{iv}$$

描述. 引入 U 关于积 xt 的幂的级数展开式, 即

$$U(x,t) = c_0 + c_1 xt + c_2 (xt)^2 + \cdots + c_n (xt)^n + \cdots$$

且验证用零阶 Bessel 函数的显式表示

$$U(x,t) = cJ_0(2i\sqrt{xt}), \tag{v}$$

其中 $J_0(z)$ 对所有的 z 有收敛的级数展开

$$J_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{2n}}{(n!)^2}.$$

观察到差式

$$u_1 - u_2 = (A - B) e^{-(x+t)} J_0(2i\sqrt{xt})$$

满足

$$u_1(0,t) = A$$

和

$$u_2(x,0)=B.$$

验证各个特征表示

$$\begin{aligned}u_1&=A-\int_0^x(u_1-u_2)dx'\\&=A-(A-B)\int_0^x e^{-(x'+t')}J_0(2i\sqrt{x't'})dx'\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}u_2&=B-\int_0^t(u_1-u_2)dt'\\&=B+(A-B)\int_0^t e^{-(x'+t')}J_0(2i\sqrt{x't'})dt'.\end{aligned}$$

12. 考虑一薄圆盘上的温度分布, 此圆盘在其平面内均匀旋转且在其边缘接受一定常热流量, 而在两侧面由于对流而失去热量. 给定稳定态温度 $u(r,\vartheta)$ 的偏微分方程, 即

$$\Omega\frac{\partial u}{\partial\vartheta}=k\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\right]u-\frac{2\sigma}{\rho c\delta}(u-u_\infty),\tag{i}$$

这里 Ω 表示旋转速度, δ 表示圆盘厚度, 而最后项说明在温度为 u_∞ 的一介质中的冷却, 研究按角坐标 ϑ 以 2π 为周期的一个特解

$$u-u_\infty=f(r)e^{in\vartheta},\quad n=0,\pm1,\cdots$$

证实在圆盘中心 $(r=0)$ 正则通解能表成形式

$$u(r,\vartheta)-u_\infty=c_0J_0(\lambda_0r)+\sum_{n=1}^{\infty}[c_nJ_n(\lambda_nr)e^{in\vartheta}+\overline{c}_nJ_n(\overline{\lambda}_nr)e^{-in\vartheta}],$$

这里上横线 "—" 是复共轭符号, 而 J_n 表示 Bessel 函数. 求参数 λ_n 与偏微分方程 (i) 的参数之间的关系并验证 λ_0 是纯虚数.

如果在边缘 $(r=a)$ 的流量条件表示成

$$j(\vartheta)=\kappa\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}\begin{aligned}&=Q,\quad -\epsilon<\vartheta<\epsilon,\\&=0,\quad \epsilon<\vartheta<\pi,\quad -\pi<\vartheta<-\epsilon\end{aligned}$$

或

$$j(\vartheta)=\frac{Q\epsilon}{\pi}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\epsilon}{n\epsilon}(e^{in\vartheta}+e^{-in\vartheta})\right],$$

其中 $\varepsilon \to 0$ 的 (点态加热) 极限为

$$j(\vartheta) = \frac{q}{\pi}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(e^{in\vartheta} + e^{-in\vartheta})\right],$$

如果

$$q = \lim_{\epsilon \to \infty}(Q\epsilon) = 有限,$$

证明

$$c_n = \frac{q}{\pi\kappa\lambda_n J_n'(\lambda_n a)},$$

这里 $J_n'(z) = dJ_n/dz$.

13. 设要求决定满足偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leqslant r < 1, t > 0, \tag{i}$$

带 (非齐次) 边界条件

$$a\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=1} + b\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{r=1} = c\ (常数) \tag{ii}$$

和初始条件

$$u(r,0) = f(r), \quad 0 \leqslant r < 1 \tag{iii}$$

的正则函数 $u(r,t)$. 记

$$u = u_1(r,t) + u_2(r,t), \tag{iv}$$

这里 u_2 是 (i), (ii) 的特解, 证明它能表示成形式

$$u_2 = At + Br^2, \tag{v}$$

其中 A, B 有确切固定的值.

验证满足 (i) 和齐次形式的 (ii) 的 $u_1(x,t)$ 的表示式为

$$u_1(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r) e^{-k\lambda_n^2 t}, \tag{vi}$$

这里分离常数 λ_n 是包含零阶和一阶 Bessel 函数的方程

$$\alpha\lambda J_0(\lambda) + J_1(\lambda) = 0, \quad \alpha = \frac{b}{a}k \tag{vii}$$

的根.

证实积分性质

$$\int_0^1 J_0(\lambda_m r)J_0(\lambda_n r)rdr + \frac{b}{a}kJ_0(\lambda_m)J_0(\lambda_n) = 0, \quad m \neq n$$

和

$$\int_0^1 J_0^2(\lambda_n r)rdr + \frac{b}{a}kJ_0^2(\lambda_n) = \left[\frac{1}{2} + \frac{bk}{a} + \frac{b^2k^2}{2a^2}\lambda_n^2\right]J_0^2(\lambda_n)$$
$$= N_n \text{ (记成)}.$$

应用 (vi) 连同初始条件 (iii) 和表示式 (iv), (v) 去导出系数表示式

$$c_n = \frac{1}{N_n}\left\{\int_0^1 u_1(r,0)J_0(\lambda_n r)rdr + \frac{b}{a}ku_1(1,0)J_0(\lambda_n)\right\} \qquad n = 0, 1, \cdots$$

其中

$$u_1(r,0) = f(r) - u_2(r,0).$$

如果本征值方程换成

$$\alpha = -\frac{J_1(\lambda)}{\lambda J_0(\lambda)}, \tag{viii}$$

则可以推出

$$\lambda \to \xi_n, \quad J_1(\xi_n) = 0, \quad \text{当 } \alpha \ll 1$$

和

$$\lambda \to \mu_n, \quad J_0(\mu_n) = 0, \quad \text{当 } \alpha \gg 1.$$

为改进这些极限估计, 将 λ 考虑为 (viii) 中的函数且利用性质

$$\frac{d}{dx}J_0(x) = -J_1(x), \quad \frac{d}{dx}J_1(x) = J_0(x) - \frac{1}{x}J_1(x)$$

来验证关系式

$$\frac{d\lambda}{d\alpha} = -\frac{\lambda}{1 + 2\alpha + \alpha^2\lambda^2}.$$

其次, 应用 Taylor 级数展开式

$$\lambda(\alpha) = \lambda(0) + \alpha\left(\frac{d\lambda}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} + \frac{1}{2}\alpha^2\left(\frac{d^2\lambda}{d\alpha^2}\right)_{\alpha=0} + \cdots$$

得到

$$\lambda(\alpha) = \xi_n - \xi_n\alpha + \frac{3}{2}\xi_n\alpha^2 + \cdots, \quad \alpha \ll 1.$$

用 $1/\epsilon$ 代替 α, 得出

$$\frac{d\lambda}{d\epsilon} = \frac{\lambda}{\epsilon^2 + 2\epsilon + \lambda^2},$$

所以

$$\begin{aligned}\lambda(\epsilon) &= \lambda(0) + \epsilon\left(\frac{d\lambda}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} + \frac{1}{2}\epsilon^2\left(\frac{d^2\lambda}{d\epsilon^2}\right)_{\epsilon=0} + \cdots \\ &= \mu_n + \frac{\epsilon}{\mu_n} - \frac{\epsilon^2}{2\mu_n^3} + \cdots \\ &= \mu_n + \frac{1}{\mu_n\alpha} - \frac{1}{2\mu_n^3\alpha^2} + \cdots, \quad \alpha \gg 1.\end{aligned}$$

后 记

希望锲而不舍地学习本教材的读者能够领会到它提供的材料的有用, 研究的范围之广以及使用的方法之妙. 几个世纪以来, 对偏微分方程的分析一直是人们深入研究的学科, 已经得到大量的有关偏微分方程的知识. 例如, 变系数微分方程很少有显式解这一事实就导致了被称为扰动分析的大量的研究成果, 扰动分析旨在获得其定义方程与有完全解的方程有"微小"差异的问题的结果. 当得不到整体解的时候, 另一种可以应用的成功的方法给出了解在所考虑的求解区域的不同部分的互补展开式, 就相容性而言它们是互相关联或匹配的. 此外, 基于新的理论概念和借助于数值分析的对非线性方程的研究以极其迅速的方式推进了偏微分方程这一学科的发展. 所以, 读者在熟练掌握经典方法之后, 就可以继续对这些问题进行有益的探索.

参考书目

[1] G. F. Carrier and C. E. Pearson, *Partial differential equations.* Academic, 1976.

[2] C. R. Chester, *Techniques in partial differential equations,* McGraw Hill, 1971.

[3] K. E. Gustafson, *Introduction to partial differential equations and Hilbert space methods*, John Wiley, 1980.

[4] G. L. Lamb, Jr., *Introductory applications of partial differential equations*, John Wiley, 1995.

[5] E. Zauderer, *Partial differential equations of applied mathematics,* John Wiley, 1983.

索 引

(★ 表示审定的数学名词)

B

C

D

E

F

本书是一本有特色的有关偏微分方程引论的教材。相当多的内容是通过热传导方程、Laplace方程和波动方程的初边值问题、边值问题以及初值问题的具体例子的计算和证明来讲授偏微分方程的基本概念、理论和求解方法，特别是分离变量法、本征函数与本征值、Sturm—Liouville理论、Green函数、积分方程、Fourier级数、Fourier积分、Fourier变换、特征线方法、Bessel函数和Legendre多项式等特殊函数以及偏微分方程在物理、流体力学和电磁理论等方面的应用。大量的习题(从篇幅上看占正文的近70%)也是本书的特色。本书起点不高、深入浅出、循序渐进，具有基本微积分知识就能阅读本书。

本书可用作大学本科和研究生的教材或参考书，也可作为大学教师和科技人员的参考书。


ISBN 978-7-04-017359-8

9 787040 173598 >

定价 61.00 元

学科类别：数学

网址：academic.hep.com.cn